

7. Επαναλαμβανόμενα Δυναμικά Παίγνια.

Τα επαναλαμβανόμενα δυναμικά παίγνια αποτελούν συνδυασμό ταυτόχρονου και δυναμικού παιγνίου, είτε στην περίπτωση που ένα ταυτόχρονο παίγνιο επαναλαμβάνεται διαχρονικά, είτε επανάληψη ενός βασικού δυναμικού παιγνίου διαδοχικά στο χρόνο.

Έστω ένα παίγνιο δίλημμα του φυλακισμένου που επαναλαμβάνεται δύο φορές. Το παίγνιο που παίζεται κάθε περίοδο είναι

		B	
		L	R
A	L	1,1	5,0
	R	0,5	4,4

Λύνοντας το παίγνιο της δεύτερης περιόδου, το αποτέλεσμα είναι το σημείο ισορροπίας κατά Nash, (L,L). Αν δεν υπάρχει χρονική προτίμηση, τότε τα αποτελέσματα του συνόλου του παιγνίου, όπως αυτά εμφανίζονται στην αρχή της πρώτης περιόδου, είναι τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα, προσαυξανόμενα από τα αποτελέσματα του αποτελέσματος της δεύτερης περιόδου,

		B	
		L	R
A	L	2,2	6,1
	R	1,6	5,5

Κατά συνέπεια το σημείο ισορροπίας επαναλαμβάνεται δύο φορές.

Έστω, τώρα ότι οι δύο παίκτες γνωρίζουν ότι αν την πρώτη περίοδο παικτεί το (R,R), τότε την δεύτερη για κάποιο λόγο θα παικτεί πάλι το (R,R). Σε κάθε άλλη περίπτωση θα παικτεί το (L,L). Τότε ο πίνακας στην αρχή του παιγνίου θα έχει τις εξής αποδόσεις,

		B	
		L	R
A	L	2,2	6,1
	R	1,6	8,8

Ο πίνακας αυτός έχει δύο σημεία ισοροπίας κατά Nash. Η δυνατότητα δέσμευσης την πρώτη περίοδο, αν υπάρχει, μπορεί να αυξήσει τις δυνατές λύσεις του παιγνίου.

Γενικά, στα επαναλαμβανόμενα παίγνια, οι αποδόσεις της μιας περιόδου, προστίθενται στις αποδόσεις της προηγούμενης. Αν υπάρχει χρονική προτίμηση, τότε οι μελλοντικές αποδόσεις πρέπει να σταθμιστούν με τον συντελεστή προεξόφλησης που απεικονίζει την προτίμηση αυτή.

Άπειρες Επαναλήψεις του Παιγνίου.

Έστω ότι το βασικό παίγνιο επαναλαμβάνεται άπειρες φορές. Οι παίκτες τώρα υιοθετούν τον εξής κανόνα, πράγμα γνωστό και στους δύο. Αν σε όλους τους προηγούμενους γύρους του παιγνίου η λύση ήταν (R,R), τότε παίζει R. Στην αντίθετη περίπτωση παίζει L για πάντα.

Έστω ότι η προηγούμενη κίνηση ήταν (R,R). Αν ο ένας από τους δύο παίκτες αθετήσει τον κανόνα που περιγράφηκε πιο πάνω, θα κερδίσει 5 μονάδες την τρέχουσα περίοδο, και 1 όλες τις υπόλοιπες περιόδους μετά την αντίδραση του άλλου παίκτη. Αν ο κοινός

συντελεστής προεξόφλησης είναι $\delta = \frac{1}{1+r}$, όπου r είναι το επιτόκιο της αγοράς, τότε η παρούσα αξία της κίνησης L είναι

$$V_L = 5 + \delta \cdot 1 + \delta^2 \cdot 1 + \dots = 5 + \frac{\delta}{1-\delta}$$

δεδομένου ότι

$$1 + \delta + \delta^2 + \dots = \frac{1}{1-\delta}$$

Αντίθετα, αν παίζει R, δηλαδή, σεβαστεί τον κανόνα τούτη τη περίοδο, τότε την επόμενη περίοδο η αξία του παιγνίου θα είναι ακριβώς η ίδια με την αξία του παιγνίου την τρέχουσα περίοδο, αφού το παίγνιο επαναλαμβάνεται άπειρους γύρους. Άρα, η παρούσα αξία της κίνησης R, είναι

$$V_R = 4 + \delta V_R$$

$$\text{άρα } V_R = \frac{4}{1 - \delta}$$

Οπότε, η λύση R είναι συμφέρουσα, όταν $V_R > V_L$, δηλαδή, όταν

$$\frac{4}{1 - \delta} > 5 + \frac{\delta}{1 - \delta}.$$

Που σημαίνει, όταν $\delta > \frac{1}{4}$.

Είναι λοιπόν δυνατή η συνεννόηση των παικτών με τρόπο ώστε να καλυτερέψουν τα αποτελέσματά τους, εφ' όσον βέβαια τα κίνητρα, δηλαδή ο προεξοφλητικός συντελεστής, είναι τέτοια που να καθιστούν την λύση συνεργασίας ισορροπία κατά Nash. Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει κίνητρο αλλαγής στρατηγικής και για τους δύο παίκτες.

8. Σύμπραξη στο Δυοπώλιο Cournot.

Γνωρίζουμε ότι στο δυοπώλιο Cournot, η συνολική προσφερόμενη ποσότητα είναι μεγαλύτερη από αυτή του μονοπωλίου, ενώ τα συνολικά κέρδη είναι μικρότερα από τα κέρδη του μονοπωλίου. Θα ήταν λοιπόν δυνατό οι δύο παίκτες να αποφασίσουν μετά από συνεννόηση να παράγουν συνολική ποσότητα ίση με αυτή του μονοπωλίου, π.χ. προσφέροντας ο καθένας το μισό της προσφοράς του μονοπωλητή. Στην περίπτωση αυτή ο κάθε παίκτης θα απολάμβανε το μισό των κερδών του μονοπωλίου, που είναι

μεγαλύτερο από το κέρδος που αποκομίζει χωρίς συνεργασία. Το πρόβλημα είναι ότι αν ο ένας μειώσει την προσφορά, και ο άλλος δεν ακολουθήσει, τότε ο δεύτερος θα αυξήσει τα κέρδη του, ενώ ο πρώτος ενδεχομένως να τα μειώσει. Για τον λόγο αυτό δεν υπάρχει δυνατότητα σύμπραξης σε ένα παίγνιο ενός γύρου.

Αν το παίγνιο όμως είναι επαναλαμβανόμενο με άπειρους γύρους, τότε μπορεί να υπάρξουν κίνητρα που να υποστηρίζουν μια λύση σύμπραξης.

Μια δυνατή στρατηγική είναι η ακόλουθη. *Να προσφέρει η κάθε επιχείρηση το μισό της μονοπωλιακής προσφοράς, $\frac{q_m}{2}$, αν τις προηγούμενες περιόδους ο άλλος έκανε το ίδιο, αλλιώς να προσφέρει το επίπεδο Cournot, q_c , για πάντα.*

Τα κέρδη της κάθε επιχείρησης όταν παράγει $\frac{q_m}{2}$, είναι

$$\frac{\pi_m}{2} = \frac{(\alpha - c)^2}{8}.$$

Αντίθετα όταν προσφέρει q_c , η επιχείρηση κάνει κέρδη

$$\pi_c = \frac{(\alpha - c)^2}{9}.$$

Τέλος η ποσότητα που μεγιστοποιεί τα κέρδη της κάθε επιχείρησης αν η άλλη προσφέρει $\frac{q_m}{2}$, δηλαδή, η ποσότητα που μεγιστοποιεί τα κέρδη μιας περιόδου αν ο ένας από τους δύο παραγωγούς αποφασίσει να αθετήσει την συμφωνία, δηλαδή, η άριστη αντίδραση όταν ο αντίπαλος προσφέρει την ποσότητα του μονοπωλίου, δίδεται από

$$\max_{q_i} q_i \left(\alpha - q_i - \frac{1}{2} q_m - c \right)$$

οπότε $q_i = \frac{3(\alpha - c)}{8}$ ενώ τα κέρδη στην περίπτωση αυτή είναι

$$\pi_i = \frac{9(\alpha - c)^2}{64}.$$

Οπότε συμφέρει και τις δύο επιχειρήσεις να συμπράξουν όταν

$$\frac{1}{1-\delta} \frac{1}{2} \pi_m > \pi_d + \frac{\delta}{1-\delta} \pi_c$$

ή όταν

$$\delta > \frac{9}{17}.$$

8.2 Γενίκευση των Αποτελεσμάτων.

Αν ο προεξοφλητικός συντελεστής είναι μικρότερος από 9/17, τίθεται το ερώτημα αν υπάρχουν περιθώρια σύμπραξης των δύο επιχειρήσεων, με τρόπο ώστε να βελτιώσουν την θέση τους συγκριτικά με την ισορροπία Cournot. Η όποια συμφωνία θα οδηγούσε στην προσφορά της κάθε επιχείρησης μεταξύ του μισού του επιπέδου μονοπωλίου και του επιπέδου Cournot, δηλαδή, $\frac{q_m}{2} > q^* > q_c$.

Η στρατηγική των δύο επιχειρήσεων θα ήταν τότε η ακόλουθη. *Να προσφέρει η κάθε επιχείρηση q^* , αν τις προηγούμενες περιόδους ο άλλος έκανε το ίδιο, αλλιώς να προσφέρει το επίπεδο Cournot, q_c , για πάντα.*

Τα κέρδη της κάθε επιχείρησης αν και οι δύο προσφέρουν q^* είναι

$$\pi^* = q_i (\alpha - q_i - q^* - c).$$

Αν η μία επιχείρηση προσέφερε q^* , η ποσότητα που θα μεγιστοποιούσε τα κέρδη της άλλης την συγκεκριμένη περίοδο (αν αθετούσε την συμφωνία) δίδεται από

$$\max_{q_i} q_i (\alpha - q_i - q^* - c)$$

οπότε η επιχείρηση που θα αθετούσε την συμφωνία θα προσέφερε

$$q_i = \frac{\alpha - q^* - c}{2},$$

$$\text{ενώ τα αντίστοιχα κέρδη θα ήταν } \pi_d = \pi_i = \frac{(\alpha - q^* - c)^2}{4}.$$

Όπου το π_d συμβολίζει το άμεσο κέρδος από την αθέτηση της στρατηγικής, για την επιχείρηση που θα αναλάβει την ενέργεια αυτή. Άρα η σύμπραξη θα συνέφερε αν

$$\frac{1}{1-\delta} \pi^* > \pi_d + \frac{\delta}{1-\delta} \pi_c.$$

Λύνοντας την ανισότητα αυτή βρίσκουμε το ελάχιστο επίπεδο προσφοράς από την κάθε επιχείρηση που θα ήταν συμβατό με την σύμπραξη,

$$q^* = \frac{9-5\delta}{3(9-\delta)} (\alpha - c).$$

Η συνάρτηση αυτή είναι φθίνουσα ως προς δ . Όσο το δ προσεγγίζει το 0, η λύση Cournot επικρατεί, ενώ όσο το δ προσεγγίζει το 9/17, τόσο πλησιάζουμε στην προσφορά του μονοπωλίου.