

## 6. Αβεβαιότητα και μη Αναστρέψιμες Επενδύσεις

Στην περίπτωση που μία επένδυση δεν μπορεί να αντιστραφεί χωρίς κόστος, δηλαδή αφού έχει πραγματοποιηθεί η αγορά κεφαλαιακού εξοπλισμού, κατασκευή κτηρίων κτλ. δεν είναι δυνατό άμεσα να πωληθεί αποφέροντας το πλήρες ποσό που δαπανήθηκε, η ύπαρξη αβεβαιότητας μπορεί να αλλάξει σημαντικά την συμπεριφορά του επενδυτή. Συγκεκριμένα είναι δυνατό κάτω από ορισμένες συνθήκες να είναι συμφέρον στον επενδυτή να περιμένει πριν προβεί στην επένδυση με σκοπό την απόκτηση πληροφορήσης. Η αναμονή αποκτά οικονομική αξία αφού έτσι διατηρείται το δικαίωμα (ικανότητα) επένδυσης σε πιο κατάλληλη στιγμή.

Έστω ότι ο επενδυτής αντιμετωπίζει δύο χρονικές περιόδους. Την τρέχουσα περίοδο,  $t = 0$ , υπάρχει πλήρης βεβαιότητα ενώ την δεύτερη περίοδο,  $t = 1$ , είναι δυνατό να επικρατήσουν δύο καταστάσεις. Με πιθανότητα  $\pi$  η απόδοση της επένδυσης την περίοδο 1 είναι  $R_{11}$  ενώ με πιθανότητα  $1-\pi$  η απόδοση είναι  $R_{12}$ , και  $R_{11} > P_K > R_{12}$  .. Στην κατάσταση 1, η απόδοση είναι μεγαλύτερη από την επενδυτική δαπάνη, ενώ στην δεύτερη περίπτωση συμβαίνει το αντίθετο. Έστω ότι  $R_{11} > 0$  και  $R_{12} < 0$

Η παρούσα αξία της επένδυσης αν αυτή υλοποιηθεί άμεσα είναι

$$V_0 = -P_K + R_0 + \rho E(R_1) = -P_K + R_0 + \rho(\pi R_{11} + (1 - \pi)R_{12})$$

Αν δεν υπήρχε δυσκολία στην ρευστοποίηση, η επένδυση θα γινόταν άμεσα. Ο επενδυτής θα απεκόμιζε το κέρδος της πρώτης περιόδου και έπειτα θα πωλούσε τον εξοπλισμό αποσβένοντας την δαπάνη και παράλληλα αποφεύγοντας την αβεβαιότητα.

Αν ο επενδυτής αποφασίσει να μην επενδύσει στην αρχή της τρέχουσας περιόδου, και να περιμένει μέχρι την αρχή της δεύτερης περιόδου, θα χάσει την απόδοση της τρέχουσας περιόδου, αλλά τότε θα γνωρίζει ποία από τις δύο καταστάσεις θα επικρατήσει. Στην περίπτωση αυτή θα προβεί στην επένδυση μόνο αν επικρατήσει η ευνοϊκή κατάσταση, δηλαδή αυτή στην όπου θα πραγματοποιήσει κέρδη. Η προσδοκώμενη αξία αυτής της στρατηγικής στην αρχή της πρώτης περιόδου είναι

$$V_1 = \pi(\rho(-P_K) + \rho R_{11})$$

Η αξία της αναμονής είναι η διαφορά των δύο παραπάνω εκφράσεων

$$W_0 = V_1 - V_0 = (1 - \rho\pi)P_K - R_0 - \rho(1 - \pi)R_{12}$$

αν η έκφραση αυτή είναι θετική τότε συμφέρει η αναμονή, αντίθετα αν είναι μηδέν ή αρνητική, τότε συμφέρει η άμεση επένδυση. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση δυσκολίας ρευστοποίησης της επένδυσης το ύψος της απόδοσης στην ευνοϊκή έκβαση (όπου πραγματοποιείται κέρδος) δεν επηρεάζει την απόφαση επένδυσης, μόνο το ύψος της δυσμενούς έκβασης έχει το προνόμιο αυτό.

Τα αποτελέσματα της συγκριτικής στατικής είναι

$$\frac{dW_0}{dR_{12}} = -\rho(1 - \pi) < 0$$

μία αύξηση της απόδοσης στην δυσμενή περίπτωση μειώνει την οικονομική αξία της αναμονής.

$$\frac{dW_0}{d\pi} = -\rho P_K + \rho R_{12} < 0$$

Η αύξηση της πιθανότητας της ευνοϊκής κατάστασης μειώνει την αξία της αναμονής. Το αντίστροφο ισχύει για την πιθανότητα της δυσμενής κατάστασης.

$$\frac{dW_0}{d\rho} = -\pi P_K + (1 - \pi)R_{12} < 0$$

Η μείωση του επιτοκίου μειώνει την αξία αναμονής

$$\frac{dW_0}{dR_0} = -1 < 0$$

Η αύξηση της τρέχουσας απόδοσης μειώνει την αξία της αναμονής

$$\frac{dW_0}{dP_K} = (1 - \rho\pi) >> 0 \quad \text{as} \quad 1 >> \rho\pi$$

Η αύξηση της τιμής απόκτησης του εξοπλισμού αυξάνει την αξία της αναμονής αν συμβεί την τρέχουσα περίοδο και την μειώνει αν συμβεί την δεύτερη περίοδο. Αποδείξτε.

## 7. Πληροφόρηση και Αποφάσεις

### 7.1 Τέλεια Πληροφόρηση

Στο παράδειγμα του πίνακα 5.1 η αριστοποιητική ενέργεια είναι η  $a_1$  αφού μεγιστοποιεί την προσδοκώμενη χρησιμότητα  $U(C(a,s))$ .

**Πίνακας 5.1**

Καταστάσεις	s1	s2	s3	Προσδοκώμενη Χρησιμότητα $E(u(a))$
Πιθανότητες	1/3	1/3	1/3	
a1	9	4	9	22/3
a2	7	7	7	21/3
a3	5	5	10	20/3

Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει κάποιος μηχανισμός σηματοδότησης ως προς το ποία είναι η κατάσταση που θα υλοποιηθεί. Η πληροφόρηση αυτή θα δοθεί στον αποφασίζοντα πριν αναλάβει κάποια δεσμευτική ενέργεια. Στην περίπτωση αυτή ο ορθολογικώς συμπεριφερόμενος φορέας αποφάσεων θα προσαρμόσει την συμπεριφορά του λαμβάνοντας υπ' όψη του την πληροφόρηση αυτή. Αν ήξερε ότι θα υλοποιηθεί η κατάσταση  $s_1$  τότε θα έπρεπε να αναλάβει την ενέργεια  $a_1$ , αν ήξερε ότι θα επέλθει η  $s_2$  τότε θα αποφάσιζε  $a_2$  και τέλος αν ήξερε ότι θα επέλθει η  $s_3$ , η απόφαση του θα ήταν  $a_3$ . Η στρατηγική αυτή θα έδινε μία προσδοκώμενη χρησιμότητα  $26/3$  που είναι ανώτερη αυτής των  $22/3$  που επιτυγχάνεται αγνοώντας το γεγονός ότι πρόκειται να αποκτήσει πρόσθετη πληροφόρηση πριν αναλάβει οποιαδήποτε ενέργεια. Η χρησιμότητα της στρατηγικής που περικλείει την πρόσθετο πληροφόρηση μπορεί να υπολογιστεί με τον τύπο

$$EU = \sum_s \max_a U(a,s)\phi(s)$$

όπου  $\max_a U(a,s)$  είναι το μέγιστο επίπεδο χρησιμότητας που μπορεί να επιτευχθεί αν η κατάσταση που πρόκειται να υλοποιηθεί είναι η  $s$ .

### 7.2 Ατελής Πληροφόρηση

Κατά κανόνα οποιοδήποτε μηχανισμός σηματοδότησης θα είναι ατελής, δηλαδή δεν θα είναι δυνατός ο ακριβής προσδιορισμός της κατάστασης που θα υλοποιηθεί από τη πληροφόρηση που εκπέμπεται. Για παράδειγμα μπορεί να ξέρουμε ότι θα υπάρξει πληροφόρηση σχετικά με το αν το  $s_3$  θα υλοποιηθεί και μόνο. Έτσι η αβεβαιότητα σχετικά με τις άλλες δύο καταστάσεις δεν πρόκειται να αρθεί πριν την λήψη της απόφασης. Στην περίπτωση αυτή η αριστοποιητική ενέργεια θα ήταν η  $a_3$  αν επέλθει η  $s_3$ . Αν γίνει γνωστό ότι δεν θα επέλθει η  $s_3$ , τότε η απόφαση πρέπει να γίνει με τον αναθεωρημένο πίνακα αποφάσεων 5.2, όπου οι πιθανότητες μεταξύ των δύο υπολοίπων καταστάσεων υποτίθενται ίσες αφού ήσαν ίσες και στον αρχικό πίνακα.

## Πίνακας 5.2

	s1	s2	EU(a)
a1	9	4	13/2
a2	7	7	14/2
a3	5	5	10/2

Εδώ θα επιλεγεί η a2 αφού δίνει χρησιμότητα 14/2. Προσθέτοντας την χρησιμότητα αυτή στη χρησιμότητα που αποδίδει το a3 όταν υλοποιηθεί η s3 πολλαπλασιαζόμενη με την πιθανότητα υλοποίησης της s3, έχουμε συνολική χρησιμότητα 24/3, που είναι καλύτερη από την περίπτωση όπου δεν υπάρχει η δυνατότητα απόκτησης πληροφόρησης αλλά χειρότερη από την περίπτωση όπου η πληροφόρηση που θα αποκτηθεί είναι τέλεια.

### 7.3 Συναρτήσεις Πληροφόρησης

Οι έννοιες που παρουσιάστηκαν πιο πάνω μπορούν να αναπτυχθούν αναλυτικά με την βοήθεια των συναρτήσεων πληροφόρησης. Οι συναρτήσεις αυτές απλά εκφράζουν τις καταστάσεις ως συνάρτηση των ενδεχόμενων σημάτων. Δηλαδή αναπαριστούν την σχέση μεταξύ σημάτων και καταστάσεων. Ένας μηχανισμός τέλεια σηματοδότησης μπορεί να αναπαρασταθεί με την ακόλουθη συνάρτηση

$$\eta (s_1) = y_1$$

$$\eta (s_2) = y_2$$

$$\eta (s_3) = y_3$$

όπου τα  $y$  είναι τα σήματα και η  $\eta (.)$  είναι η συνάρτηση τέλεια πληροφόρησης. Αν η πληροφόρηση είναι μηδενική έχουμε

$$\eta (s_1) = y_1$$

$$\eta (s_2) = y_1$$

$$\eta (s_3) = y_1$$

Τέλος η συνάρτηση ατελούς πληροφόρησης που αντιστοιχεί στην περίπτωση που συζητήσαμε πιο πάνω είναι

$$\eta (s_1) = y_1$$

$$\eta (s_2) = y_1$$

$$\eta (s_3) = y_2$$

### 7.4 Προσδοκώμενη Χρησιμότητα στην περίπτωση Πληροφόρησης, γενικευμένη προσέγγιση.

Στην περίπτωση έλλειψης πληροφόρησης η αριστοποιητική απόφαση συνίσταται στην ανάληψη μίας και μόνο ενέργειας. Αντίθετα στην περίπτωση όπου υπάρχει δυνατότητα απόκτησης πληροφόρησης η αριστοποιητική

απόφαση συνίσταται στην επιλογή μίας στρατηγικής, δηλαδή ενός συνόλου ενεργειών που αριστοποιούν την χρησιμότητα υπό συνθήκη του σήματος. Δεδομένης κάποιας συνάρτησης πληροφόρησης  $\eta(\cdot)$  και των αντιστοίχων αριστοποιητικών ενεργειών η προσδοκώμενη χρησιμότητα υπολογίζεται με τον ακόλουθο τρόπο.

$$EU(\eta, a(\cdot)) = \sum_s U(a(\eta(s)), s) \phi(s)$$

όπου  $EU(\eta, a(\cdot))$  είναι η συνολική χρησιμότητα της στρατηγικής  $a(\cdot)$  δεδομένης της συνάρτησης πληροφόρησης  $\eta$ , και  $U(a(\eta(s)), s)$  είναι η χρησιμότητα που προκύπτει από την ενέργεια  $a(\eta(s))$  που επιλέγεται όταν ληφθεί το σήμα  $\eta(s)$ .

Για να βρούμε την στρατηγική που αριστοποιεί την χρησιμότητα πρέπει να υπολογίσουμε την χρησιμότητα για όλες τις δυνατές στρατηγικές, πράγμα που είναι χρονοβόρο για περιπτώσεις που είναι λίγο πιο πολύπλοκες από αυτές που παρουσιάσαμε μέχρι εδώ. Με σκοπό την αποφυγή του προβλήματος αυτού έχει αναπτυχθεί μία εναλλακτική μέθοδος υπολογισμού της προσδοκώμενης χρησιμότητας όταν υπάρχει δυνατότητα απόκτησης πληροφόρησης.

Σημειώνουμε κατ' αρχή ότι για κάθε συνάρτηση πληροφόρησης  $\eta(\cdot)$ , η πιθανότητα εμφάνισης κάποιου συγκεκριμένου σήματος είναι

$$\phi(y / \eta) = \sum_{s \in \eta^{-1}(y)} \phi(s)$$

όπου η  $\eta^{-1}(y)$  είναι η αντίστροφη συνάρτηση πληροφόρησης που δείχνει κάτω από ποιές καταστάσεις εμφανίζεται ένα συγκεκριμένο σήμα. Στο παράδειγμα ατελούς πληροφόρησης που χρησιμοποιήσαμε έχουμε  $\eta_1^{-1}(y_1) = [s_1, s_2]$  και  $\eta_1^{-1}(y_2) = [s_3]$  οπότε,

$$\phi(y_1 / \eta_1) = \phi(s_1) + \phi(s_2) = 2 / 3$$

$$\phi(y_2 / \eta_1) = \phi(s_3) = 1 / 3$$

Δεύτερο, η αναθεωρημένη πιθανότητα της κατάστασης  $s$  όταν έχει ληφθεί κάποιο σήμα  $y$  μπορεί να υπολογιστεί με τον ακόλουθο τρόπο

$$\phi(s / y) = 0 \text{ αν το } s \text{ δεν είναι στοιχείο της } \eta^{-1}(y)$$

$$\phi(s / y) = \phi(s) / \phi(y / \eta) \text{ αν το } s \text{ είναι στοιχείο της } \eta^{-1}(y)$$

Για παράδειγμα η συνάρτηση ατελούς πληροφόρησης  $\eta$  δίνει

$$\phi(s_1 / y_1) = \phi(s_2 / y_1) = 1 / 2 \quad \text{και} \quad \phi(s_3 / y_1) = 0$$

οπότε η προσδοκώμενη χρησιμότητα μπορεί να εκφραστεί με τον ακόλουθο τρόπο

$$EU(\eta, a(\cdot)) = \sum_y \left[ \sum_{s \in \eta^{-1}(y)} U(a(y), s) \phi(s/y) \right] \phi(y/\eta)$$

Η έκφραση μέσα στη παρένθεση είναι η προσδοκώμενη χρησιμότητα της ενέργειας  $a(y)$  που υπολογίζεται βάση των αναθεωρημένων πιθανοτήτων. Η συνολική προσδοκώμενη χρησιμότητα υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας την προσδοκώμενη χρησιμότητα στην περίπτωση που έλθει σήμα  $y$  επί την πιθανότητα έλευσης του σήματος και αθροίζοντας για όλα τα  $y$ .

Μπορούμε να περιγράψουμε την επιλογή της άριστης στρατηγικής σε τέσσερα στάδια.

1. για κάθε σήμα υπολογίζεται το  $\phi(y/\eta)$
2. για κάθε σήμα και κατάσταση υπολογίζεται το  $\phi(s/y)$
3. για κάθε σήμα εντοπίζεται η ενέργεια που μεγιστοποιεί την έκφραση μέσα στην παρένθεση. Δηλαδή η ενέργεια για την οποία

$$\sum_{s \in \eta^{-1}(y)} U(a^*(y), s) \phi(s/y) \geq \sum_{s \in \eta^{-1}(y)} U(a, s) \phi(s/y) \text{ για όλα } a \in A$$

4. Η συνολική προσδοκώμενη χρησιμότητα είναι

$$EU(\eta, a^*(\cdot)) = \sum_y \left[ \sum_{s \in \eta^{-1}(y)} U(a^*(y), s) \phi(s/y) \right] \phi(y/\eta)$$

## 7.5 Παραδείγματα

1. Στο παράδειγμα της ατελούς πληροφόρησης που χρησιμοποιήθηκε πιο πάνω με το τρίτο στάδιο είχαμε  $a^*(y_1) = a_2$  και  $a^*(y_2) = a_3$ . Η συνολική προσδοκώμενη χρησιμότητα σύμφωνα με το στάδιο 4 είναι  $(14/2 \times 2/3) + (10 \times 1/3) = 24/3$ .

2. Έστω ο πίνακας χρησιμοτήτων

	s1	s2	s3	s4	EU(a)
$\phi(s)$	1/4	1/3	1/6	1/4	
a1	4	9	6	8	7
a2	8	6	9	4	6,5
a3	4	3	12	6	5,5
a4	6	6	6	10	7

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει δυνατότητα απόκτησης πληροφορίας οι ενέργειες  $a_1$  και  $a_4$  είναι και οι δύο αριστοποιητικές, αφού οδηγούν σε προσδοκώμενη χρησιμότητα ίση με 7. Αν όμως υπήρχε μία συνάρτηση πληροφορίας  $\eta_2$

$$\eta_2(s_1) = y_1$$

$$\eta_2(s_2) = y_2$$

$$\eta_2(s_3) = y_2$$

$$\eta_2(s_4) = y_1$$

έχουμε ότι  $\eta_2^{-1}(y_1) = [s_1, s_4]$  και  $\eta_2^{-1}(y_2) = [s_2, s_3]$ .

Ακολουθώντας τα τέσσερα στάδια

1.  $\phi(y_1, \eta_2) = 1/2$   $\phi(y_2, \eta_2) = 1/2$

$$\phi(s_1, y_1) = 1/2 \quad \phi(s_1, y_2) = 0$$

2.  $\phi(s_2, y_1) = 0$   $\phi(s_2, y_2) = 2/3$

$$\phi(s_3, y_1) = 0 \quad \phi(s_3, y_2) = 1/3$$

$$\phi(s_4, y_1) = 1/2 \quad \phi(s_4, y_2) = 0$$

3. η αριστοποιητική ενέργεια αν εκδηλωθεί το  $y_1$  είναι το  $a_4$ . Δηλαδή  $a^*(y_1) = a_4$ . Η προσδοκώμενη χρησιμότητα αν έλθει το  $y_1$  είναι  $16/2$ . Με τον ίδιο τρόπο έχουμε  $a^*(y_2) = a_1$  και αντίστοιχη χρησιμότητα  $24/3$ .

4. η συνολική χρησιμότητα είναι  $(16/2 \times 1/2) + (24/3 \times 1/2) = 8$ .