ΠΜΣ «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΓΟΡΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ»

Η Καμπύλη των Επιτοκίων

Μάθημα: **Αγορές Χρήματος και Κεφαλαίου**

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Διάρθρωση της ενότητας

01 **Από το επιτόκιο ΚΤ στα μακροχρόνια**
Ισολογισμοί ΚΤ–τραπεζών, διατραπεζική αγορά, προσδοκίες, ασφάλιστρα

02 **Η καμπύλη επιτοκίων σήμερα**
Ορισμός, πρόσφατα δεδομένα, περιθώρια κρατικών ομολόγων

03 **Ομόλογα: βασικές έννοιες**
Χαρακτηριστικά, τιμή, απόδοση στη λήξη, κίνδυνοι

04 **Τρέχοντα και προθεσμιακά επιτόκια**
Ομόλογα μηδενικού τοκομεριδίου, bootstrap, forward rates

05 **Θεωρίες της καμπύλης επιτοκίων**
Προσδοκίες, προτίμηση ρευστότητας, κατακερματισμένες αγορές

06 **Πιστωτικός κίνδυνος και πληθωρισμός**
Ασφάλιστρο πιστωτικού κινδύνου, αξιολογήσεις, TIPS

07 **Ασκήσεις**
Ομόλογα, bootstrap, προθεσμιακά, καμπύλη, ενσωματωμένα δικαιώματα

A **Παράρτημα Α: Δέντρο επιτοκίων**
Τιμολόγηση ομολόγου με δικαίωμα ανάκλησης

01

Από το επιτόκιο της ΚΤ στα μακροχρόνια επιτόκια

Πώς χτίζεται κάθε επιτόκιο: επιτόκιο πολιτικής → προσδοκίες → ασφάλιστρο προθεσμίας → ασφάλιστρα κινδύνου

Ρευστά διαθέσιμα: ισολογισμοί ΚΤ και τραπεζών

Κεντρική Τράπεζα (δισ. €)

Ενεργητικό		Παθητικό	
Χρυσός, συνάλλαγμα	100	Τραπεζογραμμάτια	400
Τίτλοι (αγορές ομολόγων)	600	**Αποθεματικά τραπεζών (τρεχ. λογ. + διευκόλυνση καταθέσεων)**	**550**
Δάνεια σε τράπεζες (MRO)	300	Καταθέσεις Δημοσίου	50

Τράπεζα Α

Ενεργητικό		Παθητικό	
Αποθεματικά στην ΚΤ	**80**	Καταθέσεις	850
Δάνεια	700	Δανεισμός ΚΤ	50
Ομόλογα	220	Ίδια κεφάλαια	100
Σύνολο	**1000**	**Σύνολο**	**1000**

Τράπεζα Β

Ενεργητικό		Παθητικό	
Αποθεματικά στην ΚΤ	**10**	Καταθέσεις	800
Δάνεια	900	Δανεισμός ΚΤ	100
Ομόλογα	90	Ίδια κεφάλαια	100
Σύνολο	**1000**	**Σύνολο**	**1000**

Ρευστά διαθέσιμα (αποθεματικά)

Οι **καταθέσεις των τραπεζών στην ΚΤ**: υποχρέωση της ΚΤ, απαίτηση της τράπεζας. Τα κατέχουν **μόνο** οι τράπεζες.

Σε τι χρησιμεύουν

Στον **διακανονισμό πληρωμών** μεταξύ τραπεζών (σύστημα Τ2) και στην κάλυψη των **ελάχιστων αποθεματικών** (1% των καταθέσεων).

Ποιος τα δημιουργεί

Μόνο η ΚΤ: όταν δανείζει τράπεζες ή αγοράζει τίτλους, πιστώνει τους λογαριασμούς τους. Το σύνολο των αποθεματικών το ελέγχει η ΚΤ, όχι οι τράπεζες.

Αριθμοί ενδεικτικοί, απλοποιημένοι ισολογισμοί. Κίτρινο: ρευστά διαθέσιμα. Τα 550 της ΚΤ είναι το άθροισμα όλων των τραπεζών· οι Α και Β είναι δύο από αυτές.

Πώς δανείζονται οι τράπεζες από την ΚΤ

Η τράπεζα Β δανείζεται **30 δισ. €** για μία εβδομάδα στις **πράξεις κύριας αναχρηματοδότησης (MRO)** με επιτόκιο **2,65%**, δίνοντας ως **εξασφάλιση** ομόλογα:

Κεντρική Τράπεζα: μεταβολές

Ενεργητικό		Παθητικό	
Δάνεια σε τράπεζες	**+30**	**Αποθεματικά τράπεζας Β**	**+30**

Τράπεζα Β: μεταβολές

Ενεργητικό		Παθητικό	
Αποθεματικά στην ΚΤ	**+30**	**Δανεισμός από ΚΤ**	**+30**

Τι συνέβη

- Η ΚΤ **δημιούργησε** 30 δισ. € νέα αποθεματικά με μια λογιστική εγγραφή.
- Τα ομόλογα της Β μένουν στον ισολογισμό της, αλλά δεσμεύονται ως εξασφάλιση (με «κούρεμα», haircut).
- Το ίδιο αποτέλεσμα έχει μια **αγορά ομολόγων (QE)**: η ΚΤ πληρώνει πιστώνοντας αποθεματικά.

Κόστος για την τράπεζα Β

Τόκος = 30 δισ. × 2,65% × 7/360

= **15,46 εκατ. €** για μία εβδομάδα.

Αν χρειαστεί ρευστότητα για μία νύχτα χωρίς προγραμματισμένη πράξη, η Β μπορεί να καταφύγει στη **διευκόλυνση οριακής χρηματοδότησης** με **2,90%**: το **ταβάνι** του διατραπεζικού επιτοκίου.

Πώς κερδίζουν τόκο οι τράπεζες από την ΚΤ

Η τράπεζα Α έχει αποθεματικά 80 δισ. €. Τα ελάχιστα αποθεματικά της είναι 1% × 850 = **8,5 δισ. €**· τα υπόλοιπα **71,5 δισ. €** είναι **πλεονάζοντα**.

Πού τα κρατά	Ποσό	Επιτόκιο	Τόκος ανά ημέρα
Ελάχιστα αποθεματικά (τρεχούμενος λογαριασμός)	8,5 δισ.	0,00%	0 €
Διευκόλυνση αποδοχής καταθέσεων (DFR)	71,5 δισ.	2,50%	**71,5 δισ. × 2,50% / 360 = 4,97 εκατ. €**

Το «πάτωμα»

Καμία τράπεζα δεν θα δανείσει άλλη τράπεζα **κάτω από 2,50%**, αφού μπορεί να πάρει 2,50% χωρίς κίνδυνο από την ΚΤ.

Το «ταβάνι»

Καμία τράπεζα δεν θα δανειστεί από άλλη **πάνω από 2,90%**, αφού μπορεί να δανειστεί από την ΚΤ (MLF) με εξασφάλιση.

Γιατί 0% στα ελάχιστα

Από τον Σεπτέμβριο 2023 η ΕΚΤ δεν τοκίζει τα ελάχιστα αποθεματικά, για να μειώσει το κόστος των τόκων που πληρώνει.

Αριθμοί ενδεικτικοί· συνθήκη ημερών act/360, όπως στην αγορά χρήματος του ευρώ.

Διατραπεζική αγορά: η Α δανείζει τη Β

Βήμα 1. Ένας πελάτης της Β πληρώνει 20 δισ. € σε πελάτη της Α. Η πληρωμή διακανονίζεται με μεταφορά αποθεματικών:

Τράπεζα Β

Ενεργητικό		Παθητικό	
Αποθεματικά	**10 → −10**	Καταθέσεις	800 → 780

Τράπεζα Α

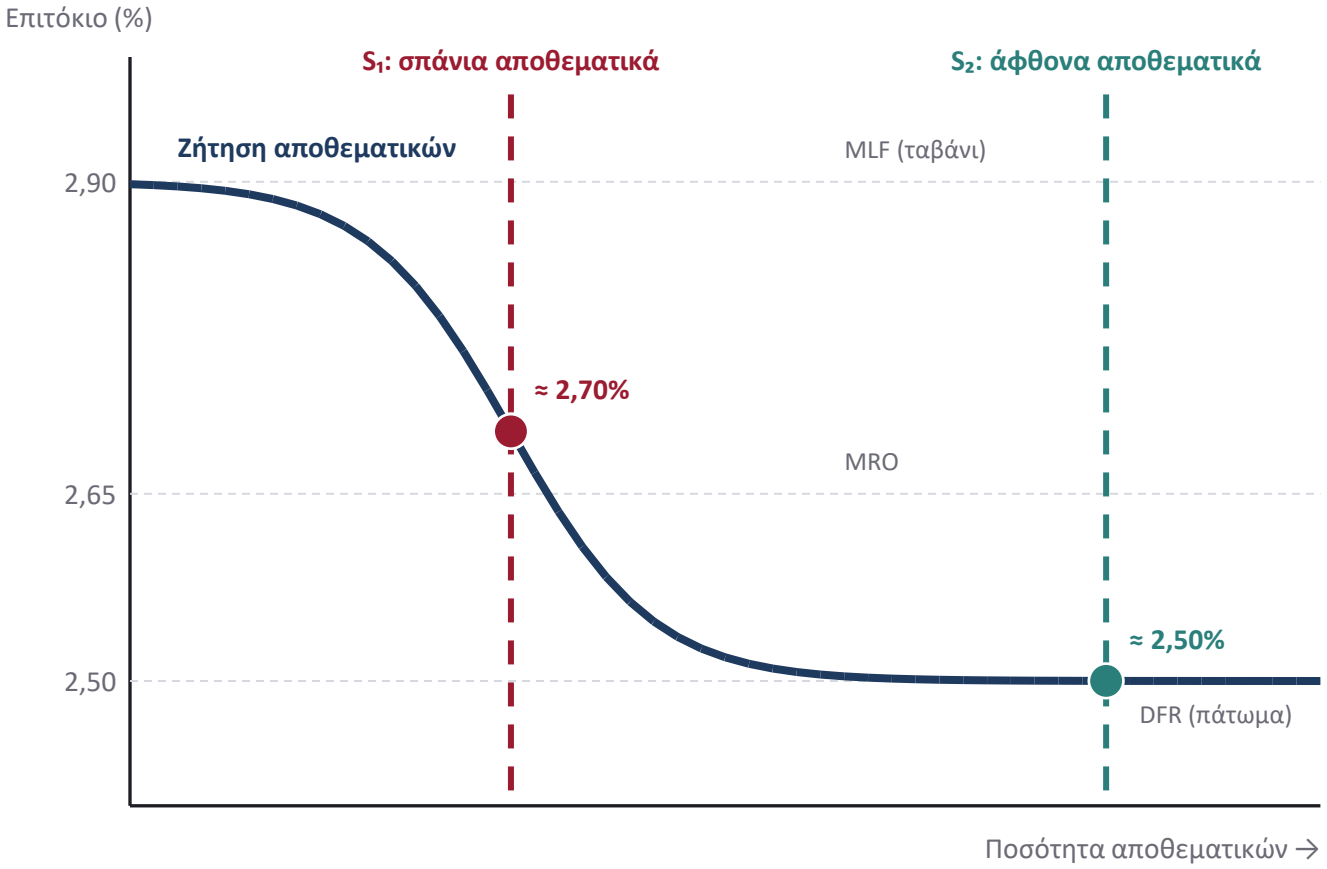
Ενεργητικό		Παθητικό	
Αποθεματικά	**80 → 100**	Καταθέσεις	850 → 870

Βήμα 2. Η Β χρειάζεται τουλάχιστον 7,8 δισ. (1% × 780) → **έλλειμμα 17,8 δισ.** Η Α έχει πλεόνασμα. Τι συμφέρει την καθεμία;

	Εναλλακτική με την ΚΤ	Συμφωνία στη διατραπεζική αγορά (r = 2,55%)	Όφελος για 18 δισ., 1 νύχτα
Τράπεζα Α (δανειστής)	Κατάθεση στην ΚΤ με 2,50%	Δανείζει 18 δισ. στη Β με 2,55%	+18 δισ. × 0,05% / 360 = 25 χιλ. €
Τράπεζα Β (δανειζόμενη)	Δανεισμός από ΚΤ με 2,90%	Δανείζεται 18 δισ. από την Α με 2,55%	18 δισ. × 0,35% / 360 = 175 χιλ. € εξοικονόμηση

Βήμα 3. Λογιστικά: Α: αποθεματικά −18, δάνεια σε τράπεζες +18 · Β: αποθεματικά +18, διατραπεζικός δανεισμός +18. Την επόμενη ημέρα η Β επιστρέφει 18 δισ. + τόκο. **Κάθε επιτόκιο μεταξύ 2,50% και 2,90% ωφελεί και τις δύο**: το διατραπεζικό επιτόκιο βρίσκεται μέσα στον «διάδρομο».

Πώς προσδιορίζεται το διατραπεζικό επιτόκιο



Ανάγνωση

- Η **ζήτηση** αποθεματικών είναι φθίνουσα: όσο λιγότερα αποθεματικά, τόσο ακριβότερα δανείζονται οι τράπεζες· δεν ξεπερνά το MLF και δεν πέφτει κάτω από το DFR.
- Η **προσφορά** είναι κάθετη: την ορίζει η ΚΤ με τις πράξεις και τις αγορές τίτλων της.
- **S_1 (πριν το 2008):** επιτόκιο κοντά στο MRO – σύστημα «διαδρόμου».
- **S_2 (σήμερα, μετά το QE):** πλεονάζουσα ρευστότητα → επιτόκιο ≈ **DFR** – σύστημα «πατώματος».
- Το **€STR** (≈ 2,42%) είναι λίγο κάτω από το DFR, γιατί δανειστές χωρίς πρόσβαση στην ΚΤ (π.χ. αμοιβαία κεφάλαια) καταθέτουν σε τράπεζες με λίγο χαμηλότερο επιτόκιο.

Σχηματική καμπύλη ζήτησης. Επιτόκια ΕΚΤ από 16/09/2026.

Η μεγάλη εικόνα: κάθε επιτόκιο χτίζεται σε στρώσεις

+ Ασφάλιστρο ρευστότητας, φορολογία
Ευκολία πώλησης του τίτλου, φορολογική μεταχείριση

+ Ασφάλιστρο πιστωτικού κινδύνου
Πιθανότητα αθέτησης του εκδότη (κράτος, τράπεζα, επιχείρηση)

+ Ασφάλιστρο προθεσμίας (term premium)
Αποζημίωση για τον κίνδυνο επιτοκίου και πληθωρισμού στις μακριές λήξεις

+ Αναμενόμενη πορεία του επιτοκίου πολιτικής
Τι πιστεύει η αγορά ότι θα κάνει η ΚΤ στα επόμενα n έτη

Επιτόκιο πολιτικής της ΚΤ
Το σημείο εκκίνησης: ΕΚΤ (DFR 2,50%), Fed (3,75–4,00%)

Διαβάζεται από κάτω προς τα πάνω: από το βραχύ στο μακρύ άκρο και από τον «ασφαλή» στον «επικίνδυνο» δανειολήπτη.

Παραδείγματα

- **€STR** (διατραπεζικό overnight) ≈ DFR
- **Euribor 3μήνου** ≈ αναμενόμενο DFR 3 μηνών + μικρό περιθώριο
- **10ετές Bund** = προσδοκίες 10 ετών + term premium
- **10ετές ελληνικό** = Bund + πιστωτικός κίνδυνος/ρευστότητα
- **Στεγαστικό ή εταιρικό δάνειο** = όλα τα παραπάνω + περιθώριο τράπεζας

Βήμα 0: Τα επιτόκια της Ευρωπαϊκής Κεντρικής Τράπεζας



Πώς λειτουργεί

- Με **πλεονάζουσα ρευστότητα** στο σύστημα, οι τράπεζες δεν δανείζουν μεταξύ τους κάτω από όσο τους πληρώνει η ΕΚΤ: το **DFR είναι το ουσιαστικό επιτόκιο πολιτικής** (σύστημα «πατώματος»).
- Το διατραπεζικό επιτόκιο **€STR** κινείται λίγο κάτω από το DFR (≈ −8 μ.β.).
- Η ΕΚΤ αύξησε το DFR **από 2,00% σε 2,25% (Ιούνιος 2026) και 2,50% (Σεπτέμβριος 2026)**.
- Αντίστοιχα στις ΗΠΑ: εύρος-στόχος για το federal funds rate **3,75–4,00%** (Σεπτ. 2026).

Επιτόκια σε ισχύ από 16/09/2026. Πηγή: ΕΚΤ (μέσω FRED: ECBDFR, ECBMRRFR, ECBMLFR, €STR)· Federal Reserve.

Ο μηχανισμός μετάδοσης: η αλυσίδα των επιτοκίων



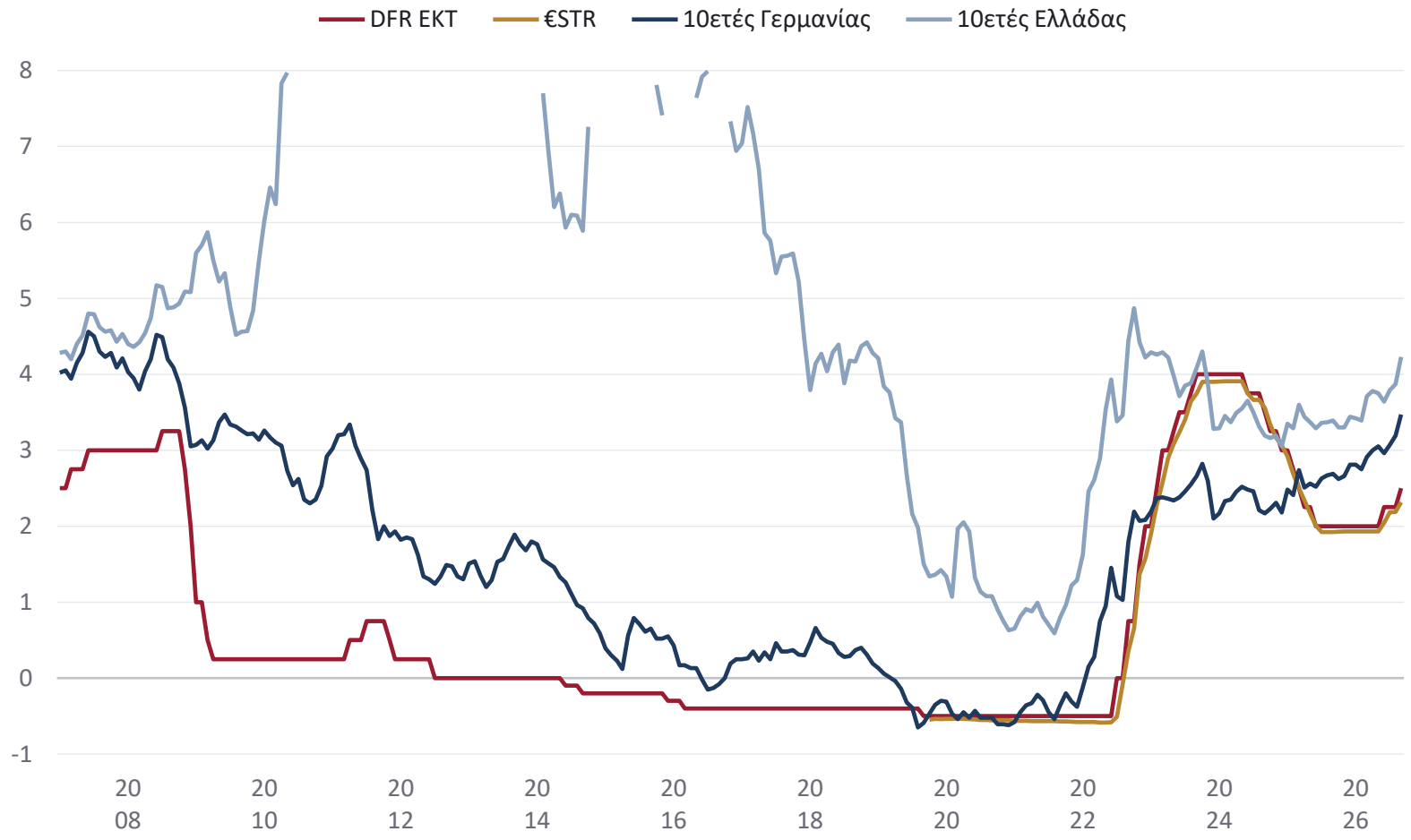
Βραχύ άκρο: σχεδόν μηχανικά

Τα επιτόκια overnight και 1–3 μηνών ακολουθούν το επιτόκιο της ΚΤ σχεδόν 1 προς 1 και αμέσως.

Μακρύ άκρο: μέσω προσδοκιών και ασφαλίστρων

Τα μακροχρόνια επιτόκια εξαρτώνται από το τι αναμένεται να κάνει η ΚΤ στο μέλλον και από το πόσο κίνδυνο αισθάνονται οι επενδυτές.

Ευρωζώνη: επιτόκιο ΕΚΤ και ομόλογα, 2007–2026

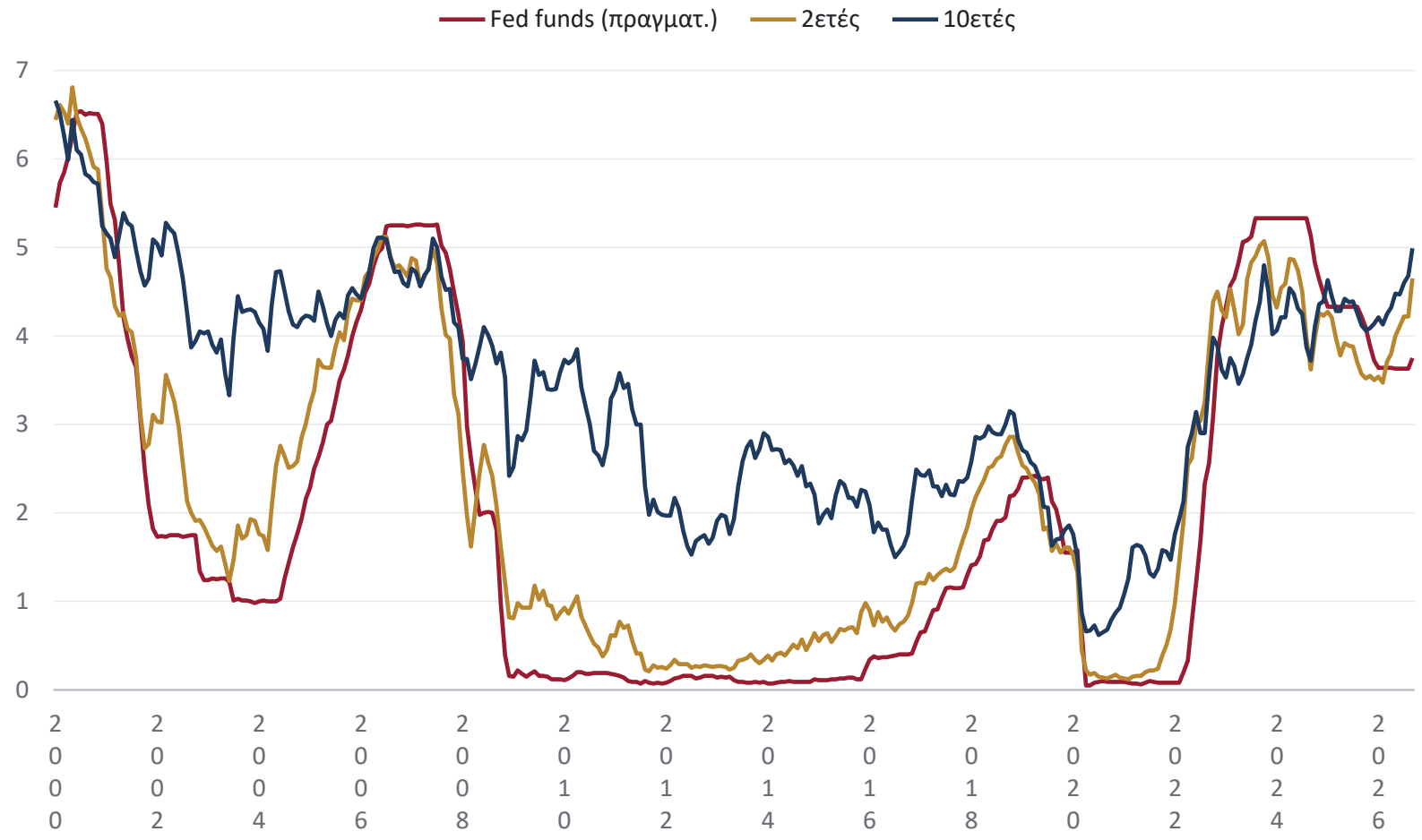


Μηνιαίοι μέσοι όροι (DFR: τέλος μήνα), έως Σεπτ. 2026. Πηγή: ΕΚΤ, OECD μέσω FRED.

Τι βλέπουμε

- Το **€STR** ακολουθεί το DFR σχεδόν ταυτόσημα.
- Το **10ετές Bund** κινείται πριν από την ΕΚΤ (2022: άνοδος πριν από τις αυξήσεις) και με μικρότερο εύρος.
- Το **ελληνικό 10ετές** προσθέτει πιστωτικό κίνδυνο: 29% το 2012, ~3,9% το 2026 (εκτός διαγράμματος για τιμές > 8%).

ΗΠΑ: Fed funds, 2ετές και 10ετές ομόλογο, 2000–2026



Μηνιαίοι μέσοι όροι έως Σεπτ. 2026. Πηγή: Federal Reserve, U.S. Treasury μέσω FRED.

Τι βλέπουμε

- Το **2ετές** «προτρέχει» της Fed: ενσωματώνει την αναμενόμενη πορεία του επιτοκίου τα επόμενα 2 έτη.
- Το **10ετές** είναι πιο ομαλό: μέσος όρος πολλών ετών προσδοκιών + ασφάλιστρο.
- 2022–24: Fed > 10ετές → **ανεστραμμένη καμπύλη**. 2026: 10ετές ≈ 5%, πάνω από τη Fed.

Η βασική εξίσωση: προσδοκίες + ασφάλιστρο προθεσμίας

Το επιτόκιο ενός ομολόγου χωρίς πιστωτικό κίνδυνο με λήξη n έτη είναι (κατά προσέγγιση):

$$i_{n,t} \approx \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E_t[i_{1,t+k}] + TP_{n,t}$$

Συνιστώσα προσδοκιών

Μέσος όρος των βραχυχρόνιων επιτοκίων (≈ επιτόκιο ΚΤ) που αναμένει η αγορά για κάθε έτος μέχρι τη λήξη. Θεωρία καθαρών προσδοκιών (ενότητα 05): TP = 0.

Ασφάλιστρο προθεσμίας TP

Η επιπλέον απόδοση που ζητούν οι επενδυτές για να δεσμευτούν στο μακρύ άκρο αντί να μετακυλίουν βραχυχρόνιους τίτλους. Θεωρία προτίμησης ρευστότητας (ενότητα 05): TP > 0.

Ακριβής μορφή (χωρίς ασφάλιστρο): $(1+i_{n,t})^n = (1+i_{1,t})\,(1+E_t[i_{1,t+1}])\cdots(1+E_t[i_{1,t+n-1}])$

Βήμα 1: Η αναμενόμενη πορεία του επιτοκίου της ΚΤ

Η αγορά προβλέπει τις μελλοντικές αποφάσεις της ΚΤ με βάση τον **πληθωρισμό** και την **οικονομική δραστηριότητα**. Ένας απλός οδηγός είναι ο **κανόνας του Taylor**:

$$i_t = r^* + \pi_t + 0{,}5\,(\pi_t - \pi^*) + 0{,}5\,(y_t - y^*)$$

r* = ουδέτερο πραγματικό επιτόκιο · π = πληθωρισμός · π* = στόχος (2%) · y − y* = παραγωγικό κενό

Παράδειγμα

r* = 1%, π = 2,5%, π* = 2%, κενό = 0:

i = 1 + 2,5 + 0,5·0,5 = **3,75%**

Αν σήμερα i = 2,50% → η αγορά αναμένει **αυξήσεις**.

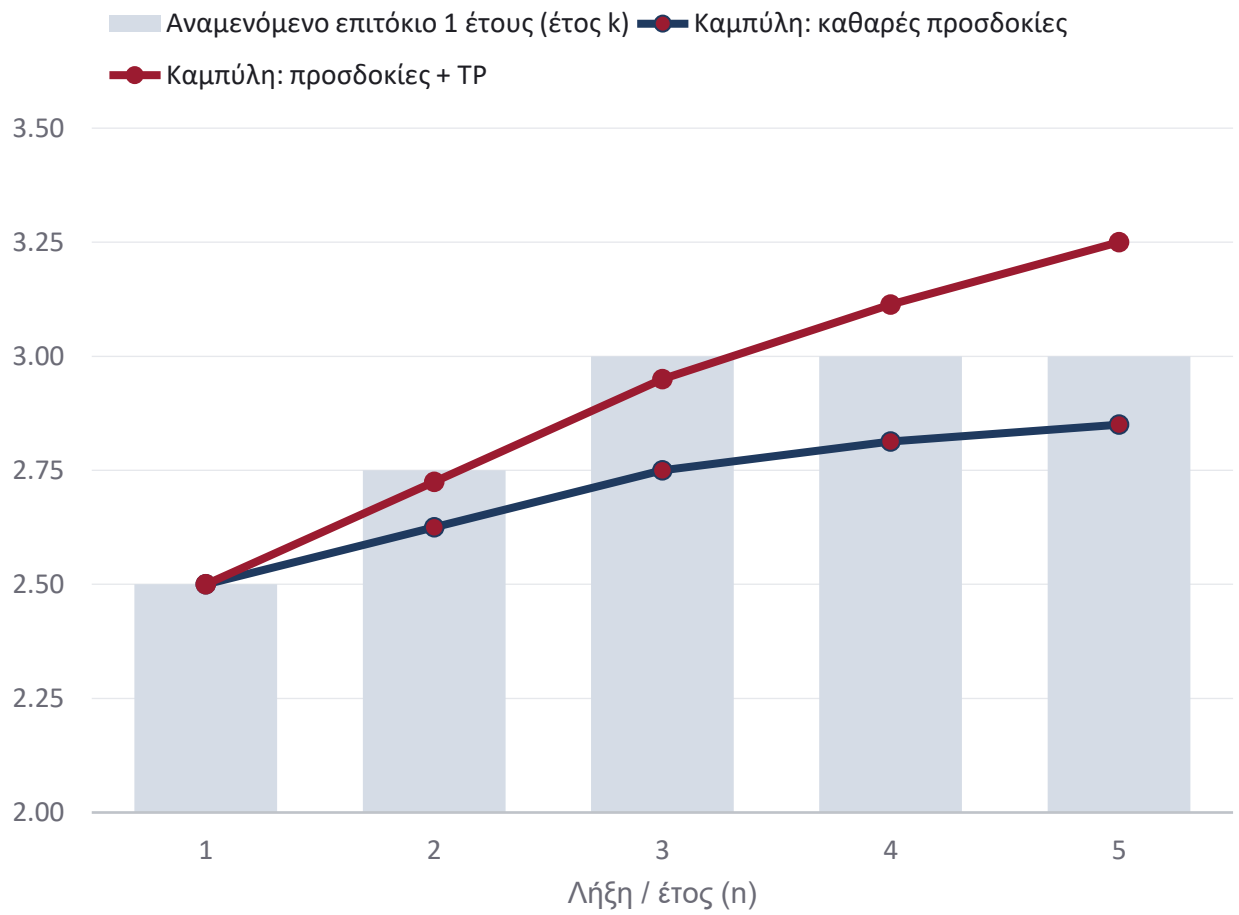
Forward guidance

Οι ανακοινώσεις της ΚΤ για τη μελλοντική πολιτική μετακινούν τις προσδοκίες και άρα τα 2ετή–5ετή επιτόκια, ακόμη και χωρίς αλλαγή του σημερινού επιτοκίου.

Αξιοπιστία

Αν η ΚΤ είναι αξιόπιστη στη μάχη κατά του πληθωρισμού, μια αύξηση σήμερα μπορεί να **μειώσει** τις μακροχρόνιες προσδοκίες πληθωρισμού.

Παράδειγμα: από την πορεία της ΚΤ στην καμπύλη

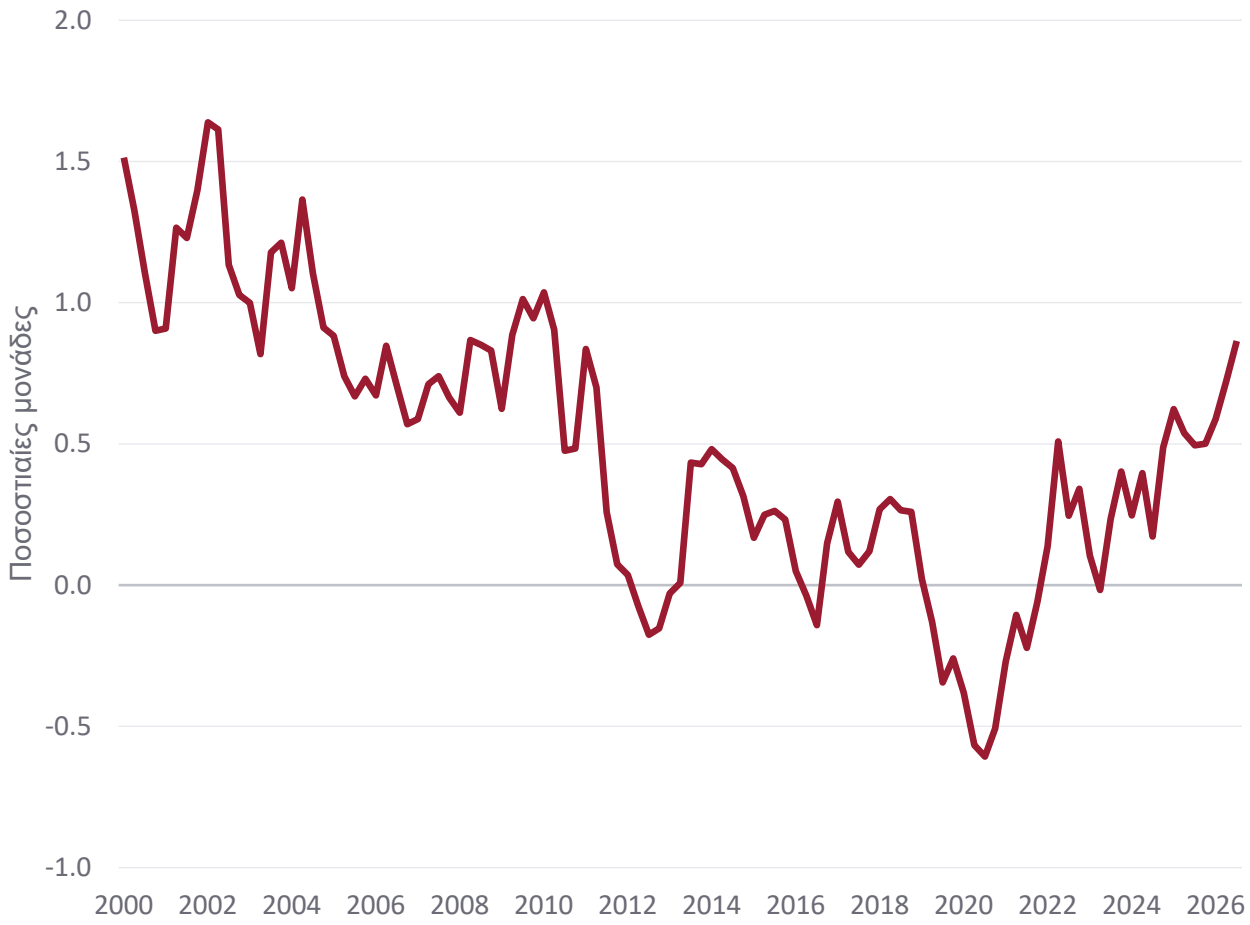


n	$E[i_1]$ έτους n	Μέσος όρος	TP_n	i_n
1	2,50%	2,500%	0,00%	**2,50%**
2	2,75%	2,625%	0,10%	**2,73%**
3	3,00%	2,750%	0,20%	**2,95%**
4	3,00%	2,813%	0,30%	**3,11%**
5	3,00%	2,850%	0,40%	**3,25%**

Η ΕΚΤ είναι σήμερα στο 2,50% και η αγορά αναμένει δύο αυξήσεις κατά 0,25. Η καμπύλη είναι ανοδική **για δύο λόγους**: (α) προσδοκίες αυξήσεων, (β) θετικό ασφάλιστρο που αυξάνεται με τη λήξη.

Αριθμητική προσέγγιση (αριθμητικός μέσος). Υποθετικά δεδομένα.

Βήμα 2: Το ασφάλιστρο προθεσμίας (term premium)

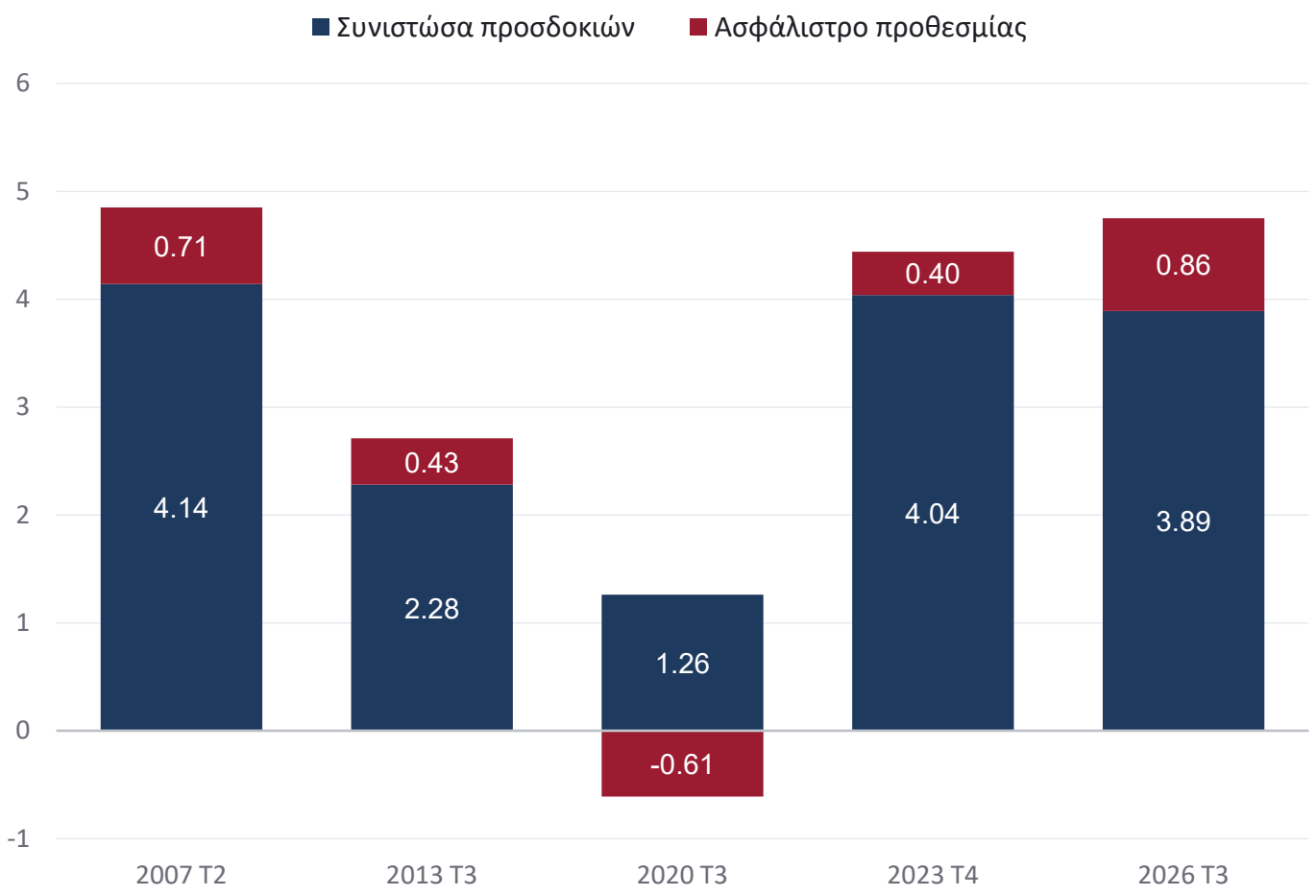


Από τι εξαρτάται

- **Κίνδυνος επιτοκίου:** μεγαλύτερη διάρκεια → μεγαλύτερες απώλειες αν ανέβουν τα επιτόκια.
- **Αβεβαιότητα πληθωρισμού:** ασφάλιστρο κινδύνου πληθωρισμού (IRP).
- **Προσφορά ομολόγων:** ελλείμματα και χρέος ↑ → TP ↑.
- **Αγορές ΚΤ (QE/QT):** το QE μείωσε το TP (αρνητικό 2019–21)· το QT το αυξάνει.
- **Ζήτηση «ασφαλούς καταφυγίου»:** σε κρίσεις το TP πέφτει.
- Σήμερα: **0,86** (Γ' τρίμ. 2026), το υψηλότερο από το 2011.

Τριμηνιαίοι μέσοι όροι. Υπόδειγμα Kim–Wright, Federal Reserve Board (FRED: THREEFYTP10).

Αποσύνθεση του 10ετούς ΗΠΑ: προσδοκίες και ασφάλιστρο



Τρίμηνο	10ετές	TP	Προσδοκίες
2007 T2	4,85	0,71	4,14
2013 T3	2,71	0,43	2,28
2020 T3	0,65	-0,61	1,26
2023 T4	4,44	0,40	4,04
2026 T3	4,76	0,86	3,89

Το 2020 το επιτόκιο ήταν χαμηλό **και** το TP αρνητικό (QE). Το 2026 το 10ετές είναι παρόμοιο με το 2007, αλλά με **μεγαλύτερο ασφάλιστρο** και ελαφρώς χαμηλότερες προσδοκίες.

Προσδοκίες = 10ετής απόδοση − TP (Kim–Wright). Τριμηνιαίοι μέσοι όροι. Πηγή: FRED (DGS10, THREEFYTP10), υπολογισμοί.

Βήμα 3: Ασφάλιστρα κινδύνου πάνω από τα κρατικά

$$i_{j,n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E_t[i_{1,t+k}] + TP_n + CRP_j + LP_j + TA_j$$

CRP – πιστωτικός κίνδυνος

Αποζημίωση για την πιθανότητα αθέτησης. Αυξάνεται σε υφέσεις.

LP – ρευστότητα

Τίτλοι με μικρή αγορά πωλούνται δύσκολα → υψηλότερη απόδοση.

TA – φορολογία

Φορολογικά πλεονεκτήματα (π.χ. δημοτικά ομόλογα ΗΠΑ) → χαμηλότερη απόδοση.

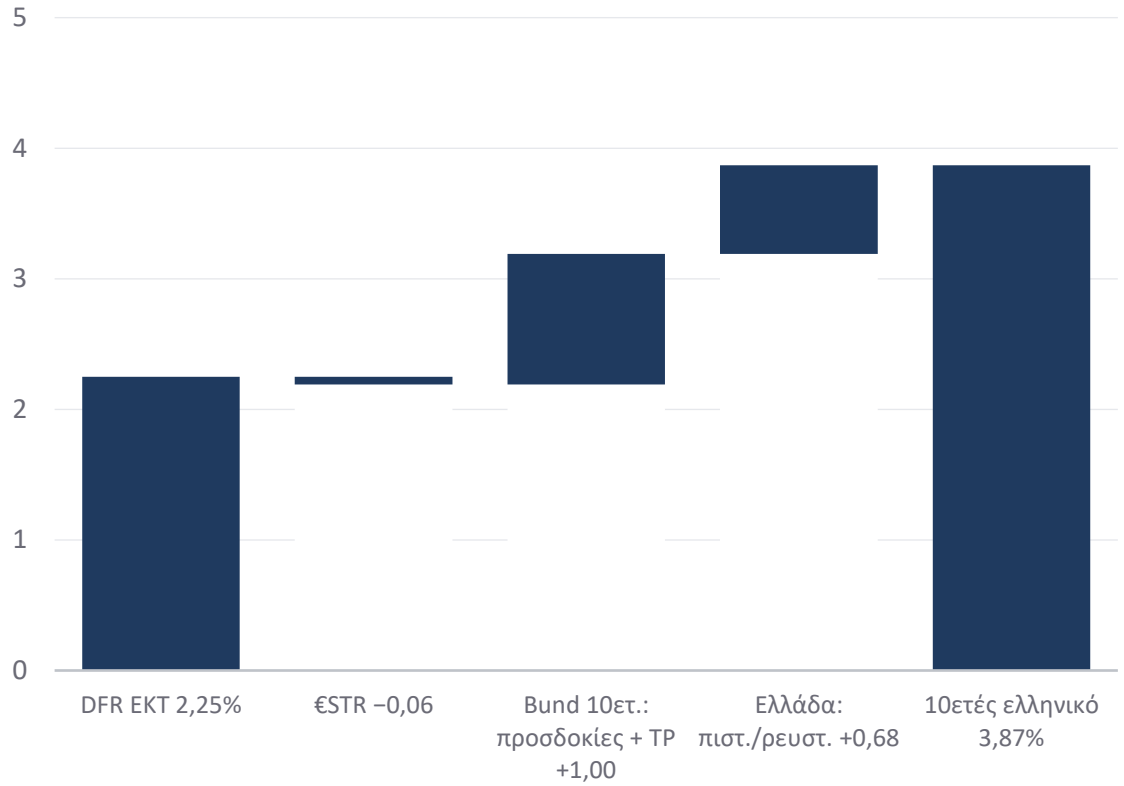
Fisher: ονομαστικό = πραγματικό + αναμενόμενος πληθωρισμός + ασφάλιστρο

$$i_n = r_n + \pi_n^e + IRP_n$$

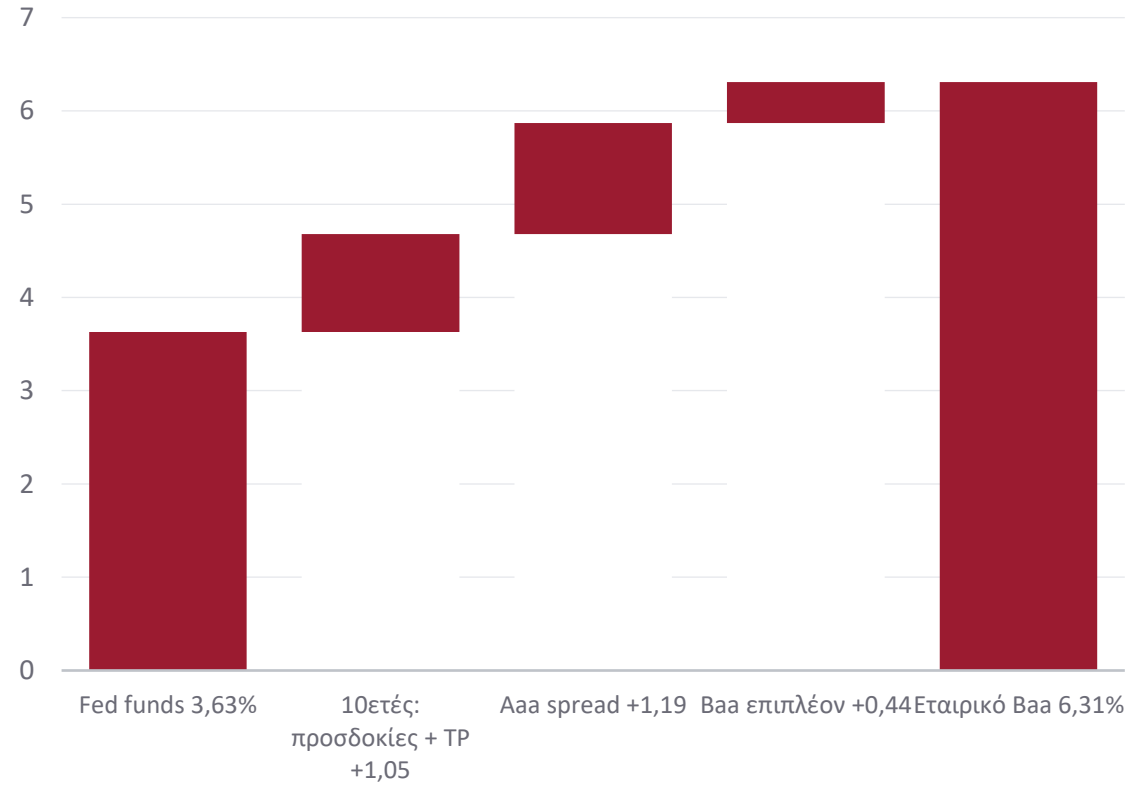
Η ΚΤ επηρεάζει και το πραγματικό επιτόκιο (βραχυχρόνια) και τις προσδοκίες πληθωρισμού (μέσω της αξιοπιστίας της). Τα TIPS επιτρέπουν να τα διαχωρίσουμε.

Εφαρμογή: από την ΚΤ στο επιτόκιο του δανειολήπτη

Ευρωζώνη (Αύγ. 2026)



ΗΠΑ (Αύγ. 2026)



Μηνιαίοι μέσοι όροι Αυγ. 2026 (DFR: 2,25% πριν από την αύξηση του Σεπτ.). Πηγή: ΕΚΤ, OECD, Federal Reserve, Moody's μέσω FRED· υπολογισμοί.

Κάθε «σκαλοπάτι» αντιστοιχεί σε μία από τις στρώσεις της εξίσωσης: επιτόκιο πολιτικής → προσδοκίες + TP → ασφάλιστρα κινδύνου του εκδότη.

Πώς η ΚΤ επηρεάζει το μακρύ άκρο της καμπύλης

1. **Επιτόκιο πολιτικής**
   Μετακινεί άμεσα το βραχύ άκρο· το μακρύ μόνο αν αλλάξει τις προσδοκίες.

2. **Forward guidance**
   Δεσμεύσεις για τη μελλοντική πορεία → αλλάζουν οι προσδοκίες (2–5 έτη).

3. **Αγορές ομολόγων (QE / QT)**
   Μεταβάλλουν την προσφορά διάρκειας → αλλάζουν το ασφάλιστρο προθεσμίας.

4. **Αξιοπιστία**
   Αγκυρωμένες προσδοκίες πληθωρισμού → χαμηλότερο ασφάλιστρο πληθωρισμού.

Γεγονός	Βραχύ	Μακρύ	Κλίση
Απρόσμενη αύξηση, θεωρείται προσωρινή	↑↑	↑	πιο επίπεδη
Αξιόπιστη αύξηση κατά του πληθωρισμού	↑	↓ ή ≈	πιο επίπεδη / αναστροφή
Forward guidance για χαμηλά επιτόκια	≈	↓	πιο επίπεδη
QE (αγορές ομολόγων)	≈	↓ (TP↓)	πιο επίπεδη
QT / ανησυχίες για δημόσια οικονομικά	≈	↑ (TP↑)	πιο απότομη
Αναμενόμενη ύφεση, μειώσεις επιτοκίων	↓	↓↓	αναστροφή

Το επιτόκιο της ΚΤ «αγκυρώνει» το βραχύ άκρο· το μακρύ άκρο το διαμορφώνει η αγορά.

Οκτώβριος 2026: γιατί ανεβαίνουν τα επιτόκια

ΗΠΑ

Fed: 3,75–4,00% (αύξηση Σεπτ. 2026). Καμπύλη 4,12% (1Μ) → 5,43% (30Υ). Η αγορά αναμένει **κι άλλες αυξήσεις**· το ΤΡ 10ετούς ανέβηκε στο 0,86.

Ευρωζώνη

ΕΚΤ: DFR 2,50% μετά από δύο αυξήσεις το 2026. 10ετές Bund 3,47% (Σεπτ.), από 2,7% έναν χρόνο πριν. Η Γαλλία πληρώνει ~100 μ.β. πάνω από τη Γερμανία.

Ηνωμένο Βασίλειο

Το 30ετές gilt ξεπέρασε το 6% για πρώτη φορά από το 1998. Αναλυτές το αποδίδουν σε **παγκόσμια άνοδο του term premium** και σε προσδοκίες αυξήσεων από την Τράπεζα της Αγγλίας.

Ερώτηση για συζήτηση: Ποιο μέρος της ανόδου των μακροχρόνιων επιτοκίων οφείλεται σε προσδοκίες για τις ΚΤ και ποιο στο ασφάλιστρο προθεσμίας; Πώς θα το ελέγχατε με τα δεδομένα των προηγούμενων διαφανειών;

Πηγές: FRED· Pound Sterling Live (14/10/2026)· Reuters/ανακοινώσεις ΕΚΤ και Fed.

02

Η καμπύλη επιτοκίων σήμερα

Τι δείχνει η καμπύλη και πώς μοιάζει τον Οκτώβριο του 2026

Καμπύλη των επιτοκίων

Οι επενδυτές ενδιαφέρονται για δύο πτυχές των επιτοκίων:

Επίπεδο επιτοκίων

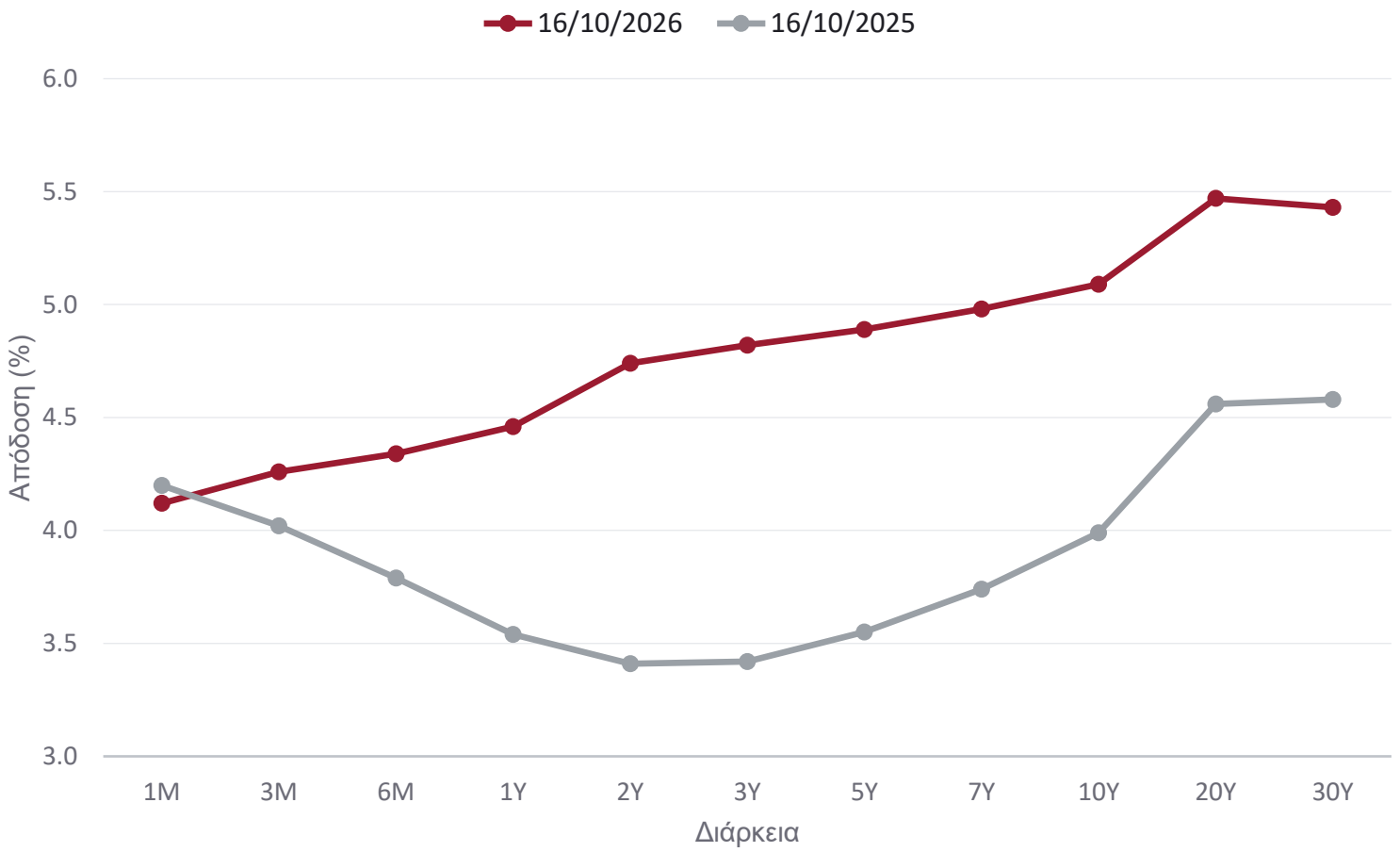
Πόσο υψηλά ή χαμηλά είναι τα επιτόκια συνολικά.

Καμπύλη επιτοκίων (term structure)

Πώς μεταβάλλεται η απόδοση με τη διάρκεια.

- Η **καμπύλη επιτοκίων ή αποδόσεων** (term structure of interest rates, yield curve) παριστά τη σχέση μεταξύ του επιτοκίου ή της απόδοσης ενός ομολόγου (μηδενικού τοκομεριδίου) και της διάρκειας ζωής του.
- Οι καμπύλες επιτοκίων συνήθως κατασκευάζονται με **κυβερνητικά ομόλογα** με (σχεδόν) μηδενικό πιστωτικό κίνδυνο, ώστε οι διαφορές αποδόσεων να οφείλονται μόνο στη διάρκεια.

Καμπύλη αποδόσεων ΗΠΑ: σήμερα και πριν από ένα έτος

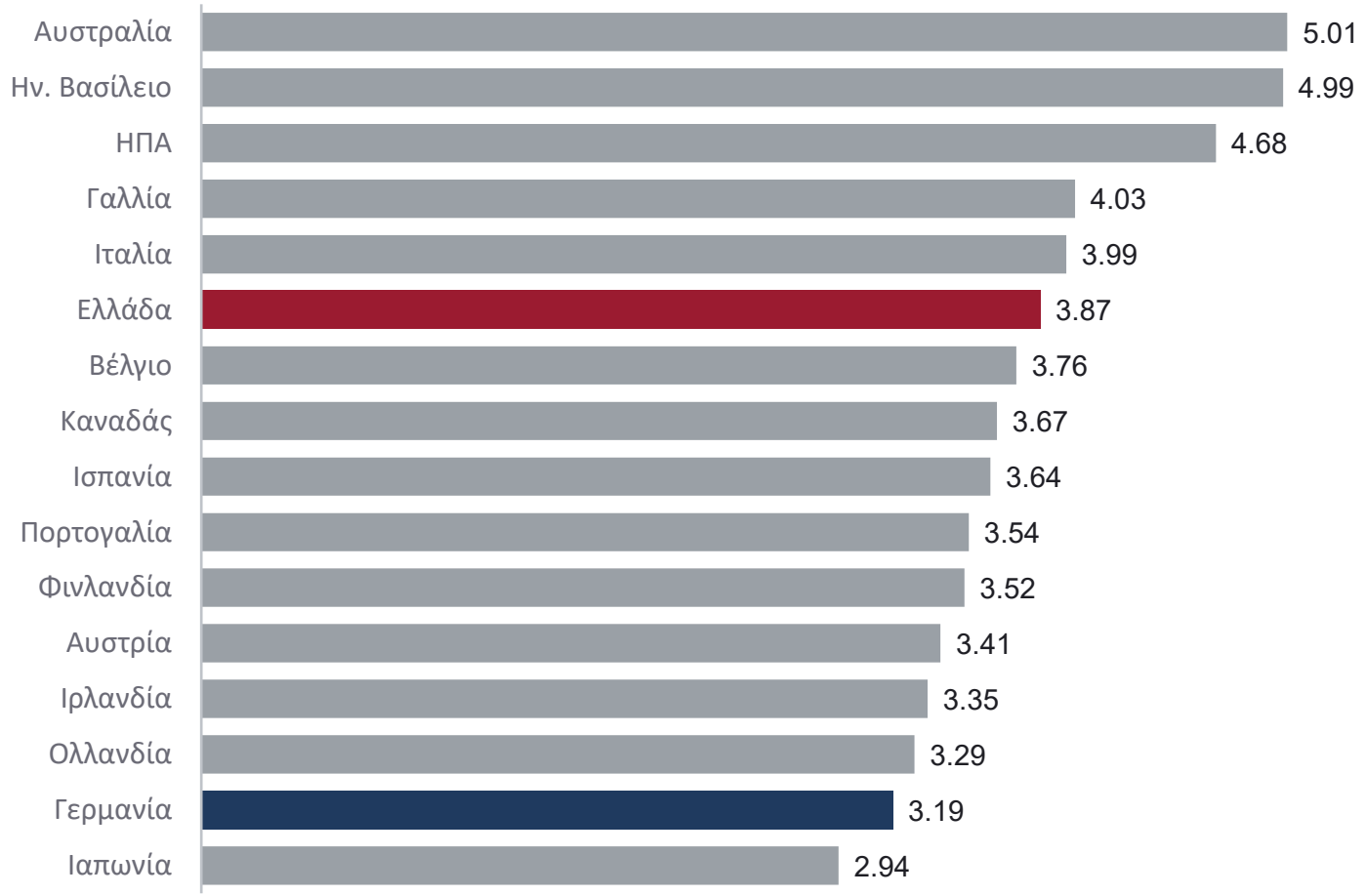


Τι άλλαξε σε ένα έτος

- Πριν από ένα έτος η καμπύλη ήταν **ανεστραμμένη στο βραχύ άκρο** (1M 4,20% > 2Y 3,41%): η αγορά ανέμενε μειώσεις επιτοκίων.
- Σήμερα είναι **ανοδική σε όλο το μήκος** (1M 4,12% → 30Y 5,43%), μετά την αύξηση της Fed τον Σεπτέμβριο 2026 στο 3,75–4,00%.
- Τα μακροχρόνια ανέβηκαν περισσότερο (10Y +110 μ.β.): προσδοκίες για νέες αυξήσεις και υψηλότερο ασφάλιστρο προθεσμίας.

Πηγή: U.S. Treasury, constant maturity yields (FRED: DGS1MO…DGS30).

Αποδόσεις 10ετών κρατικών ομολόγων: διεθνής σύγκριση



Μέσος όρος Αυγούστου 2026. Πηγή: OECD Main Economic Indicators μέσω FRED (IRLTLT01…M156N).

Ανάγνωση

- Το **επίπεδο** των μακροχρόνιων επιτοκίων διαφέρει πολύ μεταξύ χωρών, ακόμη και με κοινή νομισματική πολιτική (ευρωζώνη).
- Γερμανία (3,19%) = σημείο αναφοράς χωρίς κίνδυνο για το ευρώ.
- Οι διαφορές αντανακλούν **επιτόκια ΚΤ, προσδοκίες πληθωρισμού, ασφάλιστρο προθεσμίας και πιστωτικό κίνδυνο**.

Περιθώρια κρατικών ομολόγων (bond spreads), Αύγ. 2026

Χώρα	Απόδοση 10ετούς (%)	Περιθώριο έναντι Γερμανίας (μ.β.)	Περιθώριο έναντι ΗΠΑ (μ.β.)
Αυστρία	3,41	+23	-127
Αυστραλία	5,01	+183	+34
Βέλγιο	3,76	+57	-92
Γαλλία	4,03	+84	-65
Γερμανία	3,19	–	-149
Ελλάδα	**3,87**	**+68**	**-81**
ΗΠΑ	4,68	+149	–
Ην. Βασίλειο	4,99	+180	+31
Ιαπωνία	2,94	-25	-174
Ιρλανδία	3,35	+16	-133
Ισπανία	3,64	+45	-104
Ιταλία	3,99	+80	-69
Καναδάς	3,67	+49	-100
Ολλανδία	3,29	+10	-139
Πορτογαλία	3,54	+35	-114
Φινλανδία	3,52	+34	-116

Τι μετρά το περιθώριο

- **Spread = απόδοση χώρας – απόδοση ομολόγου αναφοράς** (Bund για το ευρώ).
- Στην ευρωζώνη, με κοινό επιτόκιο ΕΚΤ, το spread μετρά κυρίως **πιστωτικό κίνδυνο και ρευστότητα**.
- Εκτός ευρωζώνης περιλαμβάνει και διαφορές νομισματικής πολιτικής και πληθωρισμού.
- 1 μονάδα βάσης (μ.β.) = 0,01%.

Πηγή: OECD μέσω FRED, μέσοι μηνιαίοι όροι Αυγούστου 2026· υπολογισμοί περιθωρίων.

03

Ομόλογα: βασικές έννοιες

Χαρακτηριστικά, τιμή, απόδοση στη λήξη και κίνδυνοι

Τι είναι ομόλογο;

- **Ομόλογο (bond)** είναι τίτλος που ενσωματώνει **τοκοφόρο χρηματική απαίτηση** του κατόχου του για το ποσό που χορηγήθηκε ως **μακροχρόνιο δάνειο** στον εκδότη.
- Τα ομολογιακά δάνεια είναι **μακροχρόνιες πηγές χρηματοδότησης**, με διάρκεια μεγαλύτερη του ενός έτους.
- Υπάρχουν **πολλοί δανειστές (ομολογιούχοι)**: ο καθένας δανείζει ένα μικρό μέρος του συνολικού δανείου (**διασπορά κινδύνου**).
- Τα ομόλογα εκδίδονται στην **πρωτογενή αγορά** και στη συνέχεια διαπραγματεύονται εύκολα στη **δευτερογενή αγορά** κεφαλαίων.



Ποιοι εκδίδουν ομόλογα;

Κυβερνητικά (treasury bonds)

Εκδίδονται από την κυβέρνηση. Για ανεπτυγμένες οικονομίες ο κίνδυνος πτώχευσης θεωρείται σχεδόν μηδενικός· για αναπτυσσόμενες δεν είναι αμελητέος (π.χ. Μεξικό).

Εταιρικά (corporate bonds)

Εκδίδονται από επιχειρήσεις και μπορεί να ενέχουν σημαντικό κίνδυνο πτώχευσης.

Δημοτικά (municipal bonds)

Εκδίδονται από οργανισμούς τοπικής αυτοδιοίκησης· μπορεί να ενέχουν κίνδυνο πτώχευσης, αλλά συχνά συνοδεύονται από φορολογικά οφέλη.

Διεθνή (international bonds)

Ενέχουν πρόσθετο κίνδυνο από διακυμάνσεις της συναλλαγματικής ισοτιμίας.

Χρεωστικοί τίτλοι: βασικά χαρακτηριστικά ομολογιών

Ονομαστική αξία

Το ποσό ανά τίτλο που επιστρέφει ο εκδότης στη λήξη.

Ονομαστικό επιτόκιο (κουπόνι)

Το επιτόκιο με το οποίο δανείστηκε ο εκδότης. Παραμένει αμετάβλητο σε όλη τη διάρκεια της ομολογίας. Τόκοι περιόδου = ονομαστική αξία × ονομαστικό επιτόκιο.

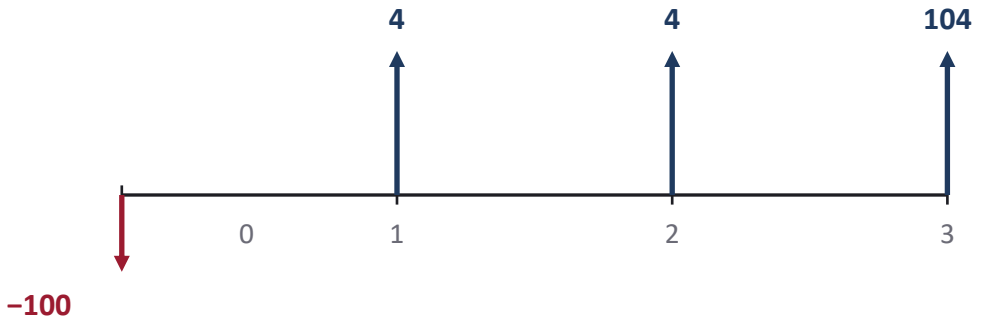
Διάρκεια

Συνήθως από 1 έως 30 έτη. Υπάρχουν και ομόλογα 100 ετών (centuries) και αορίστου λήξεως (consols). Καθορίζεται από τον εκδότη.

Είδη κουπονιού

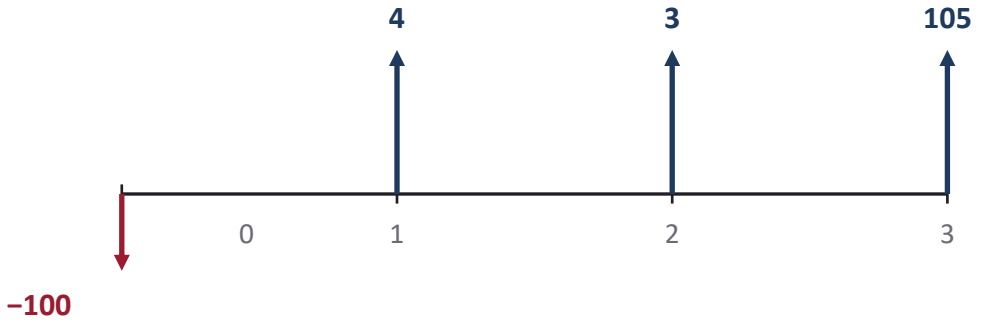
Σταθερού επιτοκίου (fixed coupon)

Το κουπόνι είναι σταθερό σε όλη τη διάρκεια ζωής του ομολόγου.



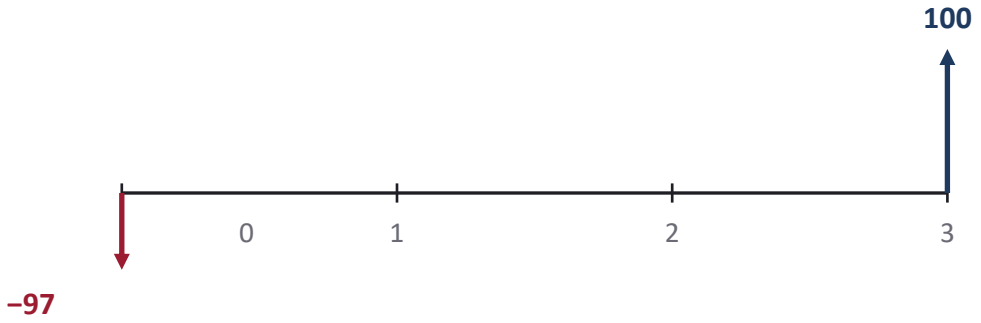
Κυμαινόμενου επιτοκίου (FRNs)

Το επιτόκιο κάθε περιόδου αναπροσαρμόζεται με βάση έναν δείκτη (π.χ. 6μηνο Euribor ή €STR, παλαιότερα LIBOR).



Χωρίς κουπόνι (zero coupon)

Δεν προβλέπονται ενδιάμεσες πληρωμές· ο επενδυτής αγοράζει υπό το άρτιο και εισπράττει την ονομαστική αξία.



Διάρκεια ομολόγων

Ανάλογα με τη διάρκειά τους, τα ομόλογα διακρίνονται σε:



Βραχυπρόθεσμα

έως 2 έτη

Μεσοπρόθεσμα

από 2 έως 10 έτη

Μακροπρόθεσμα

άνω των 10 ετών

Παραδείγματα: έντοκα γραμμάτια (3–12 μήνες) · 2ετές και 5ετές ομόλογο · 10ετές (το συνηθέστερο σημείο αναφοράς) · 30ετές.

Χρεωστικοί τίτλοι: επιτόκιο αγοράς και τιμή ομολογίας

- **Επιτόκιο αγοράς (yield to maturity):** το επιτόκιο που μπορεί να επιτευχθεί από ομολογίες μιας συγκεκριμένης κατηγορίας. Αποτελεί το **προεξοφλητικό επιτόκιο** για τον υπολογισμό της τιμής μιας ομολογίας.
- **Τιμή ομολογίας:** η παρούσα αξία των ταμειακών εισροών της. Απαιτούνται (α) οι ταμειακές εισροές της ομολογίας και (β) το επιτόκιο αγοράς.

$$P = \frac{C}{(1+y)} + \frac{C}{(1+y)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+y)^n} + \frac{M}{(1+y)^n}$$

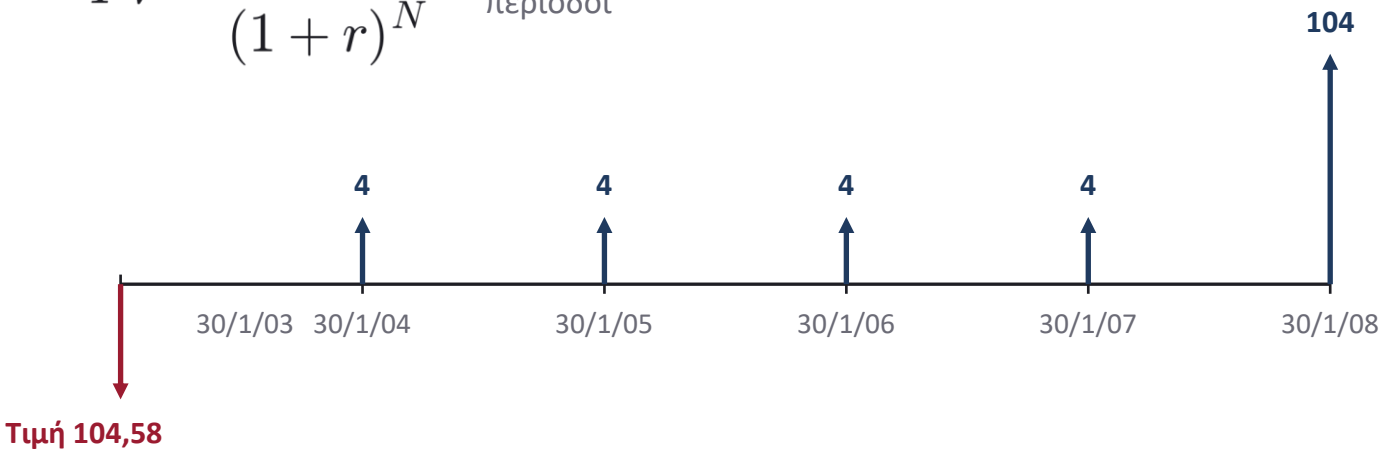
όπου P = η τιμή ή παρούσα αξία (PV) της ομολογίας, C = το ετήσιο τοκομερίδιο σε ευρώ, n = ο αριθμός των ετών μέχρι τη λήξη, M = η ονομαστική αξία, y = το κατάλληλο προεξοφλητικό επιτόκιο.

Τιμή ή παρούσα αξία ομολόγου

Υπολογίζουμε τις παρούσες αξίες όλων των μελλοντικών χρηματοροών. Παράδειγμα: κουπόνι 4%, ονομαστική αξία 100, διάρκεια 5 έτη, επιτόκιο αγοράς 3%.

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^N}$$

PV: παρούσα αξία · FV: μελλοντική αξία · r: επιτόκιο · N: περίοδοι



Έτος	Χρηματοροή	Συντελεστής $1/1{,}03^t$	Παρούσα αξία
1	4	0,9709	3,8835
2	4	0,9426	3,7704
3	4	0,9151	3,6606
4	4	0,8885	3,5539
5	104	0,8626	89,7113
		Τιμή ομολόγου	**104,58**

$$104{,}58 = \frac{4}{1{,}03} + \frac{4}{1{,}03^2} + \frac{4}{1{,}03^3} + \frac{4}{1{,}03^4} + \frac{104}{1{,}03^5}$$

Η τιμή του ομολόγου είναι το άθροισμα της παρούσας αξίας όλων των μελλοντικών χρηματοροών.

Μέτρηση του κινδύνου των χρεωστικών τίτλων

Κίνδυνος = πιθανότητα η πραγματοποιούμενη απόδοση να διαφέρει από την αναμενόμενη. Αυτό μπορεί να συμβεί όταν:

α) Πιστωτικός κίνδυνος

Ο εκδότης δεν είναι σε θέση να εκπληρώσει τις υποχρεώσεις του.

β) Κίνδυνος επιτοκίων

Η τιμή του χρεογράφου μειώνεται πριν από τη λήξη, επειδή αυξήθηκαν τα επιτόκια.

Οι μεταβολές των επιτοκίων επηρεάζουν περισσότερο:

- τις τιμές των ομολογιών με τη **μεγαλύτερη διάρκεια ζωής**· αύξηση των επιτοκίων οδηγεί σε μείωση των τιμών και αντιστρόφως,
- τις τιμές των ομολογιών με τα **μικρότερα τοκομερίδια** (χαμηλότερο εκδοτικό επιτόκιο).

Τιμή, επιτόκιο προεξόφλησης και επιτόκιο έκδοσης

Στο άρτιο (at par)

Τιμή = ονομαστική αξία

⇔

Επιτόκιο αγοράς = επιτόκιο έκδοσης

Υπέρ το άρτιο (premium)

Τιμή > ονομαστική αξία

⇔

Επιτόκιο αγοράς < επιτόκιο έκδοσης

Υπό το άρτιο (discount)

Τιμή < ονομαστική αξία

⇔

Επιτόκιο αγοράς > επιτόκιο έκδοσης

Απόδοση μέχρι τη λήξη (yield to maturity)

Ο γενικός τύπος της παρούσας αξίας των μελλοντικών χρηματοροών ενός ομολόγου:

$$PV = \frac{C}{(1+YTM)} + \frac{C}{(1+YTM)^2} + \cdots + \frac{C+M}{(1+YTM)^N}$$

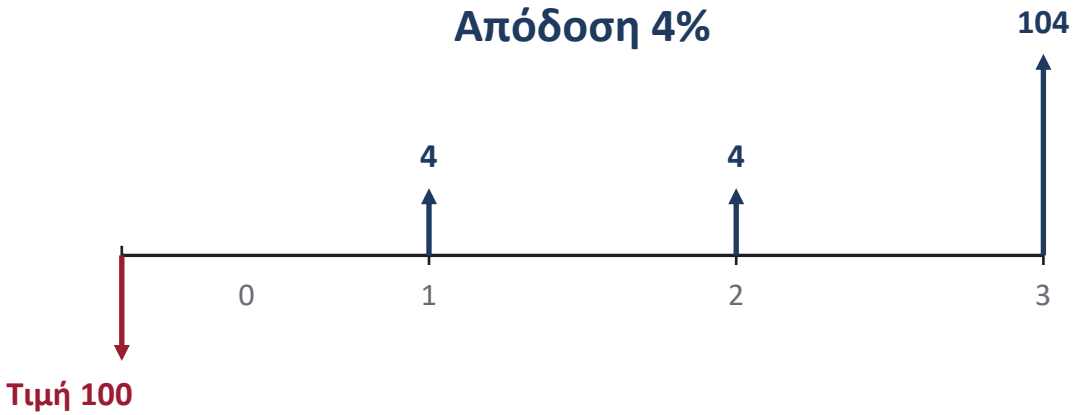
PV: παρούσα αξία χρηματοροών · C: κουπόνι · M: ονομαστική αξία · N: περίοδοι · **YTM: απόδοση στη λήξη**

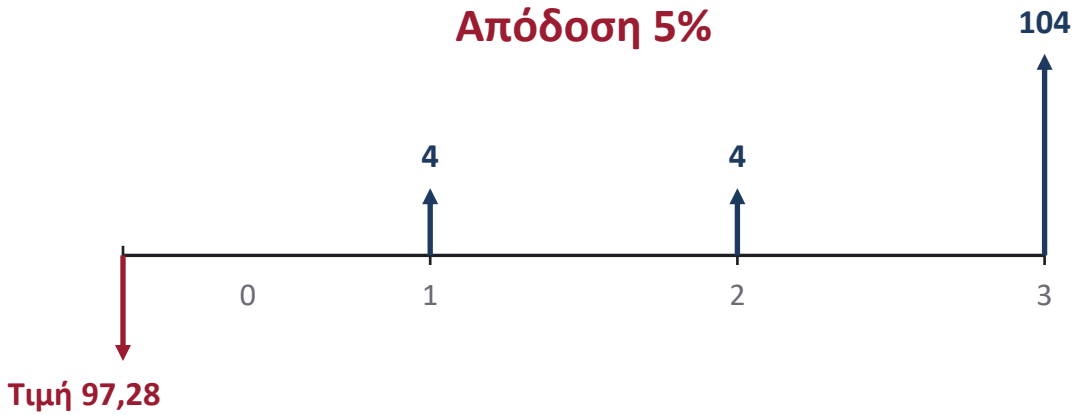
Ορισμός

Απόδοση μέχρι τη λήξη (yield to maturity) ονομάζεται το επιτόκιο που **εξισώνει την τρέχουσα τιμή** ενός ομολόγου με την **παρούσα αξία των μελλοντικών ροών** που υπόσχεται. Αντιπροσωπεύει τη μέση ετήσια απόδοση του ομολόγου αν αγοραστεί τώρα και διακρατηθεί μέχρι τη λήξη. Υποθέτει ότι τα κουπόνια επανεπενδύονται με απόδοση ίση με την YTM.

Σχέση τιμής και απόδοσης

Η απόδοση ενός ομολόγου, που είναι επιτόκιο, κινείται **αντίστροφα** με την τιμή του. Τριετές ομόλογο με κουπόνι 4:





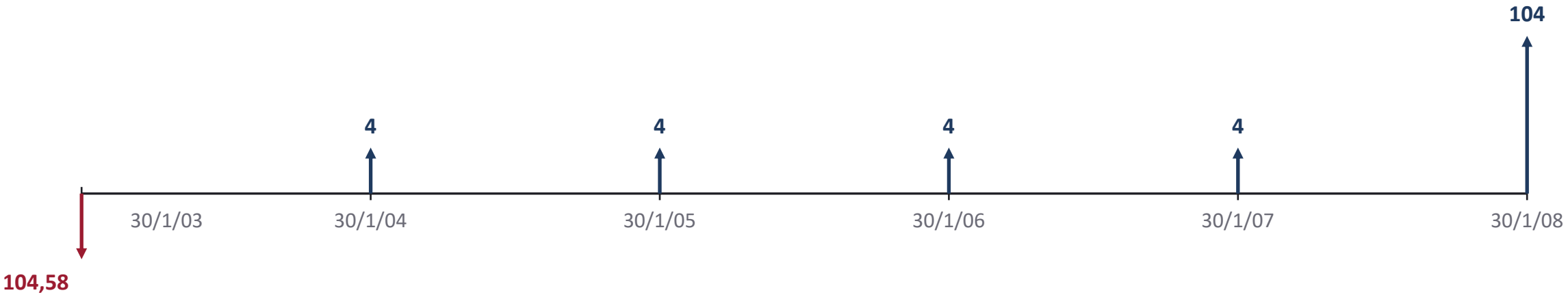
$$100 = \frac{4}{1{,}04} + \frac{4}{1{,}04^2} + \frac{104}{1{,}04^3}$$

$$97{,}28 = \frac{4}{1{,}05} + \frac{4}{1{,}05^2} + \frac{104}{1{,}05^3}$$

Όταν τα επιτόκια πέφτουν, η τιμή του ομολόγου ανεβαίνει, και αντίστροφα. P↓ ⇔ YTM↑

Σχέση κουπονιού και απόδοσης

Το κουπόνι ενός ομολόγου και η απόδοσή του είναι **διαφορετικές έννοιες**. Στο παράδειγμά μας (30/1/2003): κουπόνι 4, απόδοση 3%, τιμή 104,58.



$$104{,}58 = \frac{4}{(1+0{,}03)} + \frac{4}{(1+0{,}03)^2} + \cdots + \frac{100+4}{(1+0{,}03)^5}$$

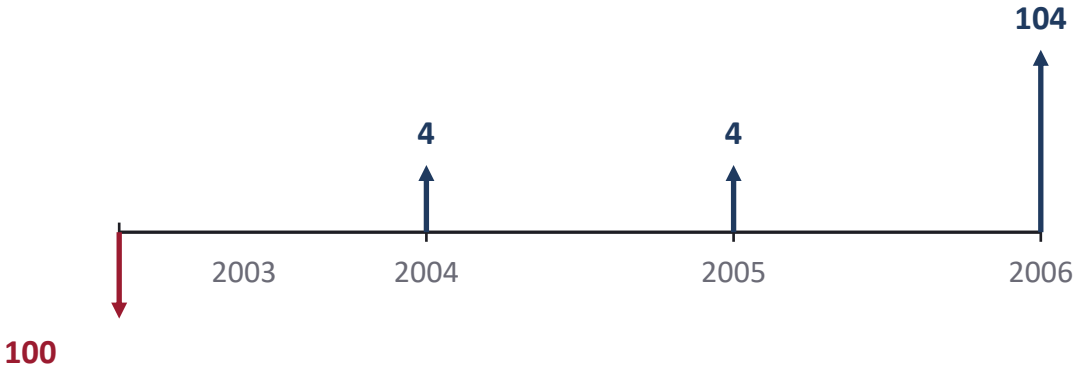
Κουπόνι = αριθμητής (σταθερό) · Απόδοση = προεξοφλητικό επιτόκιο στον παρονομαστή (μεταβάλλεται)

Το κουπόνι ενός ομολόγου σταθερού επιτοκίου **δεν αλλάζει** κατά τη διάρκεια της ζωής του, σε αντίθεση με την απόδοσή του, που μεταβάλλεται.

Σχέση τιμής και απόδοσης: νέες εκδόσεις έναντι παλαιών

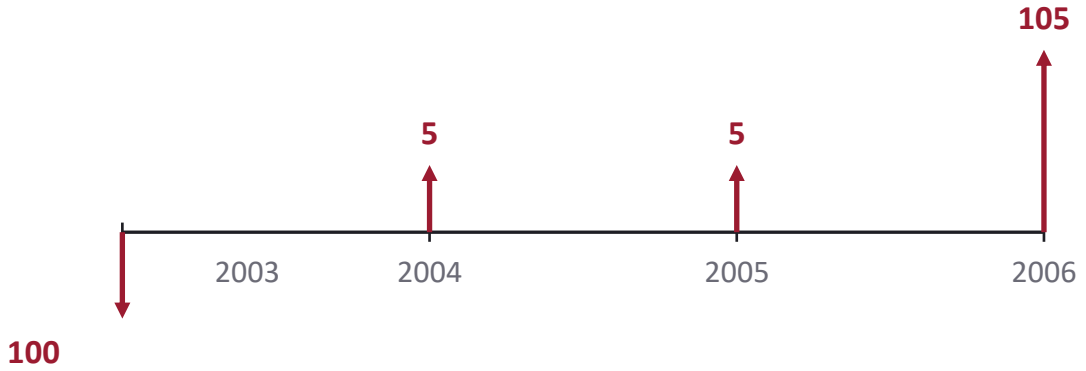
Ομόλογο Α: έκδοση 1/1/2003

Τριετές · κουπόνι 4% · προεξοφλητικό επιτόκιο 4% → τιμή 100



Ομόλογο Β: έκδοση 2/1/2003

Τριετές · κουπόνι 5% · τα επιτόκια ανέβηκαν στο 5% → τιμή 100



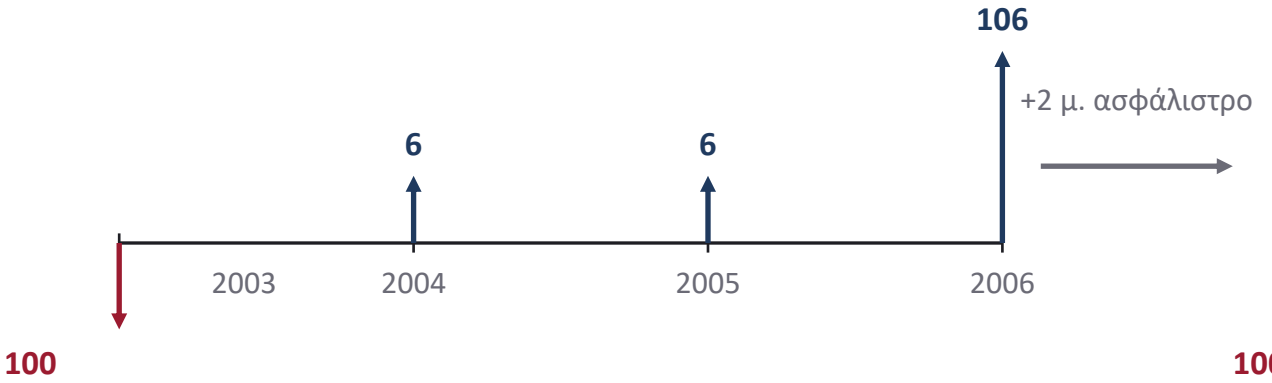
Η τιμή του **ομολόγου Α** προσαρμόζεται ώστε να αποδίδει κι αυτό 5%: $97{,}28 = \frac{4}{1{,}05} + \frac{4}{1{,}05^2} + \frac{104}{1{,}05^3}$

Αύξηση των επιτοκίων → νέες εκδόσεις με υψηλότερες αποδόσεις → **οι τιμές των παλαιότερων εκδόσεων πέφτουν**.

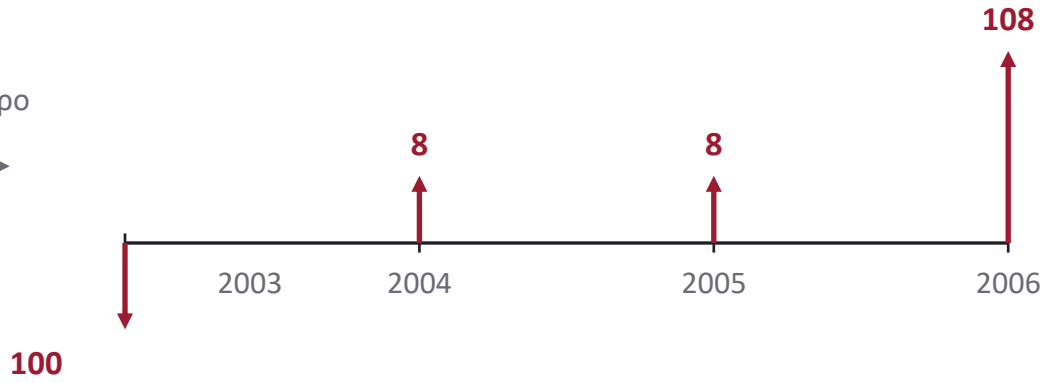
Πιστωτικός κίνδυνος: τιμολόγηση της φερεγγυότητας

- Για να αγοράσει ο επενδυτής το ομόλογο μιας άγνωστης εταιρείας, αυτό πρέπει να **αποδίδει περισσότερο** από το ομόλογο μηδενικού κινδύνου (π.χ. γερμανικό), ώστε να αποζημιωθεί για τον κίνδυνο.
- Ο κίνδυνος αφορά την πιθανότητα η εταιρεία να μην καταβάλει τα κουπόνια ή την ονομαστική αξία στις συμφωνημένες ημερομηνίες: **πιστωτικός κίνδυνος**.

Ομόλογο μηδενικού πιστωτικού κινδύνου



Αντίστοιχο ομόλογο της άγνωστης εταιρείας



Δύο ομόλογα σταθερού επιτοκίου με την ίδια διάρκεια αλλά διαφορετικό εκδότη έχουν διαφορετικές αποδόσεις, ανάλογα με την **πιστοληπτική κατάταξη** του εκδότη.

Βαθμίδες πιστοληπτικής αξιολόγησης (S&P, Fitch, Moody's)

Κατηγορία	Πιστοληπτική ικανότητα	S&P	Fitch	Moody's	Αθετήσεις ανά έτος
Επενδυτική (investment grade)	Ανώτατη βαθμολογία	**AAA**	**AAA**	**Aaa**	0,00%
	Πολύ ισχυρή ικανότητα εκπλήρωσης υποχρεώσεων	**AA+ / AA / AA–**	**AA+ / AA / AA–**	**Aa1 / Aa2 / Aa3**	0,00%
	Ισχυρή ικανότητα εκπλήρωσης υποχρεώσεων	**A+ / A / A–**	**A+ / A / A–**	**A1 / A2 / A3**	0,02%
	Επαρκής ικανότητα εκπλήρωσης υποχρεώσεων	**BBB+ / BBB / BBB–**	**BBB+ / BBB / BBB–**	**Baa1 / Baa2 / Baa3**	0,19%
Κερδοσκοπική (speculative grade)	Λιγότερο ευάλωτη βραχυπρόθεσμα, αλλά με σημαντικές αβεβαιότητες	**BB+ / BB / BB–**	**BB+ / BB / BB–**	**Ba1 / Ba2 / Ba3**	1,22%
	Ευάλωτη· εξαρτάται από ευνοϊκές συνθήκες	**B+ / B / B–**	**B+ / B / B–**	**B1 / B2 / B3**	5,81%
	Ιδιαίτερα ευάλωτη	**CCC+ … CC**	**CCC+ … C**	**Caa1 / Caa2 / Caa3**	22,43%
	Σε στάση ή κοντά σε στάση πληρωμών	**SD / D**	**DDD / DD / D**	**Ca / C**	–

Πηγή: Standard & Poor's, Fitch, Moody's· ενδεικτικά μέσα ετήσια ποσοστά αθέτησης ανά κατηγορία.

04

Τρέχοντα και προθεσμιακά επιτόκια

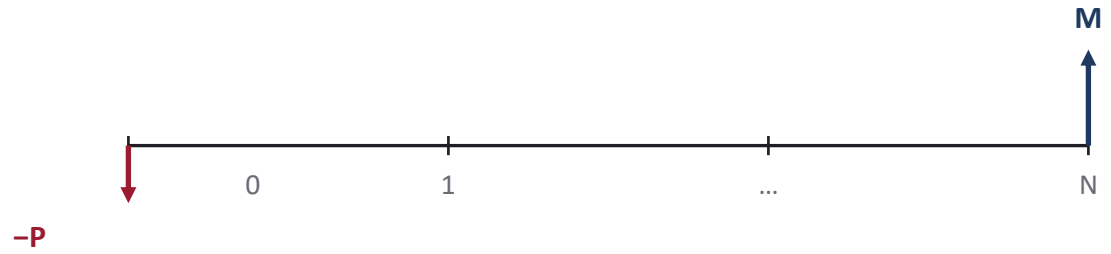
Ομόλογα μηδενικού τοκομεριδίου, spot rates και forward rates

Ομόλογα μηδενικού τοκομεριδίου

- Όπως και άλλα χρηματοοικονομικά περιουσιακά στοιχεία, η αξία ενός ομολόγου είναι η **παρούσα αξία των αναμενόμενων μελλοντικών ταμειακών ροών** του.
- Τα ομόλογα μηδενικού τοκομεριδίου είναι χρεωστικοί τίτλοι με **μία και μοναδική πληρωμή (M) στη λήξη**:

$$P = \frac{M}{(1 + r_N)^N}$$

όπου P είναι η τιμή του ομολόγου, N ο χρόνος μέχρι τη λήξη και r_N το προεξοφλητικό επιτόκιο (η απόδοση από τη διακράτηση του ομολόγου μέχρι τη λήξη).



Τρέχον επιτόκιο (spot rate)

Τα τρέχοντα επιτόκια υπολογίζονται από τις τιμές ομολόγων μηδενικού τοκομεριδίου με διαφορετικούς χρόνους ωρίμανσης:

$$r_N = \left(\frac{M}{P}\right)^{1/N} - 1$$

- Το τρέχον επιτόκιο **r(N)** είναι το προεξοφλητικό επιτόκιο για μια ταμειακή ροή του έτους N. Π.χ. το r(3) είναι το ετήσιο επιτόκιο με το οποίο η αγορά αποτιμά μια χρηματοροή που πραγματοποιείται μετά από 3 έτη.
- Τα ομόλογα μηδενικού τοκομεριδίου συνήθως έχουν λήξεις έως 1 έτος. Για μεγαλύτερες λήξεις τα επιτόκια υπολογίζονται από τιμές ομολόγων με κουπόνια (bootstrapping).

Bootstrap: τρέχοντα επιτόκια από ομόλογα με κουπόνι

Στην αγορά υπάρχουν λίγα ομόλογα μηδενικού τοκομεριδίου. Τα τρέχοντα επιτόκια (spot) **εξάγονται διαδοχικά** από τις τιμές ομολόγων με κουπόνι: κάθε βήμα χρησιμοποιεί τα επιτόκια που βρέθηκαν στα προηγούμενα.

Ομόλογο	Λήξη	Κουπόνι (ετήσιο)	Τιμή (ον. αξία 100)	Χρηματοροές
Α	1 έτος	0% (zero)	97,087	100
Β	2 έτη	4%	100,95	4 · 104
Γ	3 έτη	5%	102,80	5 · 5 · 105

Γενικός τύπος για το βήμα n:

$$r_n = \left[\frac{C + 100}{P_n - C \sum_{t=1}^{n-1} d_t} \right]^{1/n} - 1, \qquad d_t = \frac{1}{(1 + r_t)^t}$$

Η ιδέα

- Μια χρηματοροή της χρονιάς t αξίζει το ίδιο, **όποιο ομόλογο κι αν την πληρώνει**: προεξοφλείται με το ίδιο r(t).
- Αλλιώς θα υπήρχε αρμπιτράζ: αγορά του φθηνού ομολόγου, πώληση των «κομματιών» του.
- Από τα r(t) παίρνουμε τους **συντελεστές προεξόφλησης** d(t) και τα **προθεσμιακά επιτόκια**.

Bootstrap: λύση βήμα προς βήμα

Βήμα 1 – ομόλογο Α (μηδενικού τοκομεριδίου):

$$97{,}087 = \frac{100}{1 + r_1} \;\Rightarrow\; r_1 = 3{,}00\%$$

Βήμα 2 – ομόλογο Β: το πρώτο κουπόνι προεξοφλείται με το r_1 που ήδη βρήκαμε:

$$100{,}95 = \frac{4}{1{,}03} + \frac{104}{(1 + r_2)^2} \;\Rightarrow\; (1 + r_2)^2 = \frac{104}{97{,}066} \;\Rightarrow\; r_2 = 3{,}51\%$$

Βήμα 3 – ομόλογο Γ: τα δύο πρώτα κουπόνια προεξοφλούνται με r_1 και r_2:

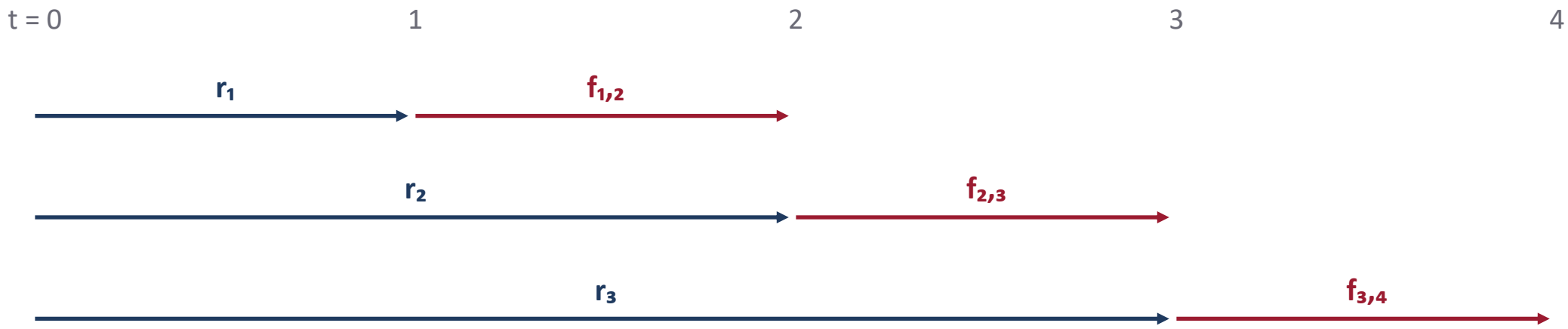
$$102{,}80 = \frac{5}{1{,}03} + \frac{5}{1{,}0351^2} + \frac{105}{(1 + r_3)^3} \;\Rightarrow\; (1 + r_3)^3 = \frac{105}{93{,}279} \;\Rightarrow\; r_3 = 4{,}02\%$$

t	Spot r(t)	d(t)	YTM ομολόγου	Προθεσμιακό f(t−1,t)
1	**3,00%**	0,9709	3,00%	–
2	**3,51%**	0,9333	3,50%	4,02%
3	**4,02%**	0,8884	3,99%	5,06%

Σε ανοδική καμπύλη το **spot > YTM** του ομολόγου με κουπόνι: η YTM είναι ένας «μέσος όρος» των spot όλων των χρηματοροών.

Προθεσμιακά επιτόκια (forward rates)

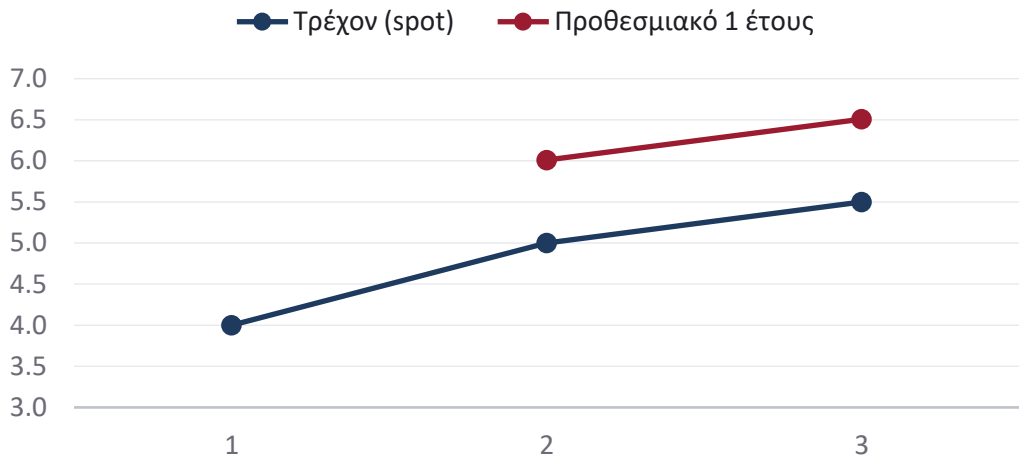
Τα προθεσμιακά επιτόκια υπολογίζονται μέσω της καμπύλης επιτοκίων.



Το σύμβολο $\mathbf{f_{3,4}}$ ορίζεται ως το προθεσμιακό επιτόκιο για την περίοδο 3 έως 4: το επιτόκιο με το οποίο μπορεί κάποιος να συμφωνήσει **σήμερα** να δανειστεί ένα ποσό μετά από 3 έτη και να το αποπληρώσει σε ένα έτος (έναρξη στο τέλος του 3ου έτους, λήξη στο τέλος του 4ου).

Προθεσμιακά επιτόκια: αριθμητικό παράδειγμα

Λήξη	Τρέχον επιτόκιο (r_t)	Προθεσμιακό επιτόκιο (f_t)
1	4,0%	–
2	5,0%	6,01%
3	5,5%	6,507%



$$(1+r_2)^2 = (1+r_1)(1+f_{1,2}) \Rightarrow 1{,}05^2 = 1{,}04\,(1+f_{1,2}) \Rightarrow f_{1,2} = 6{,}01\%$$

$$(1+r_3)^3 = (1+r_2)^2(1+f_{2,3}) \Rightarrow 1{,}055^3 = 1{,}05^2\,(1+f_{2,3}) \Rightarrow f_{2,3} = 6{,}507\%$$

Όταν το προθεσμιακό επιτόκιο είναι πάνω από το τρέχον, η καμπύλη έχει ανοδική κλίση.

Προθεσμιακά επιτόκια: γενικοί τύποι

Προθεσμιακό επιτόκιο μιας περιόδου:

$$(1+r_n)^n = (1+r_{n-1})^{n-1}(1+f_{n-1,n}) \;\Rightarrow\; f_{n-1,n} = \frac{(1+r_n)^n}{(1+r_{n-1})^{n-1}} - 1$$

Προθεσμιακό επιτόκιο για n περιόδους (από το έτος k έως το k+n):

$$(1+r_{k+n})^{k+n} = (1+r_k)^k(1+f_{k,k+n})^n \;\Rightarrow\; f_{k,k+n} = \left[\frac{(1+r_{k+n})^{k+n}}{(1+r_k)^k}\right]^{1/n} - 1$$

Η λογική: δύο τρόποι να επενδύσεις για k+n έτη πρέπει να αποδίδουν το ίδιο – απευθείας με το r(k+n) ή πρώτα με το r(k) και μετά με το προθεσμιακό f(k,k+n).

Δημιουργία προθεσμιακής σύμβασης επιτοκίου

Έστω ότι ένα έντοκο γραμμάτιο ενός έτους, P(1), κοστίζει **925,93** (απόδοση 8%) και ένα έντοκο γραμμάτιο δύο ετών, P(2), κοστίζει **841,68** (απόδοση 9%). Το προθεσμιακό επιτόκιο είναι:

$$f_{1,2} = \frac{(1+r_2)^2}{1+r_1} - 1 = \frac{P(1)}{P(2)} - 1 = \frac{925{,}93}{841{,}68} - 1 = 10{,}01\%$$

Σήμερα

Αγορά μονοετούς: −925,93

Πώληση 1,1001 διετών: +1,1001 × 841,68 = +925,93

Καθαρή ροή: 0

Μετά από 1 έτος

Είσπραξη από το μονοετές

+1.000

Μετά από 2 έτη

Πληρωμή 1,1001 × 1.000

−1.100,10

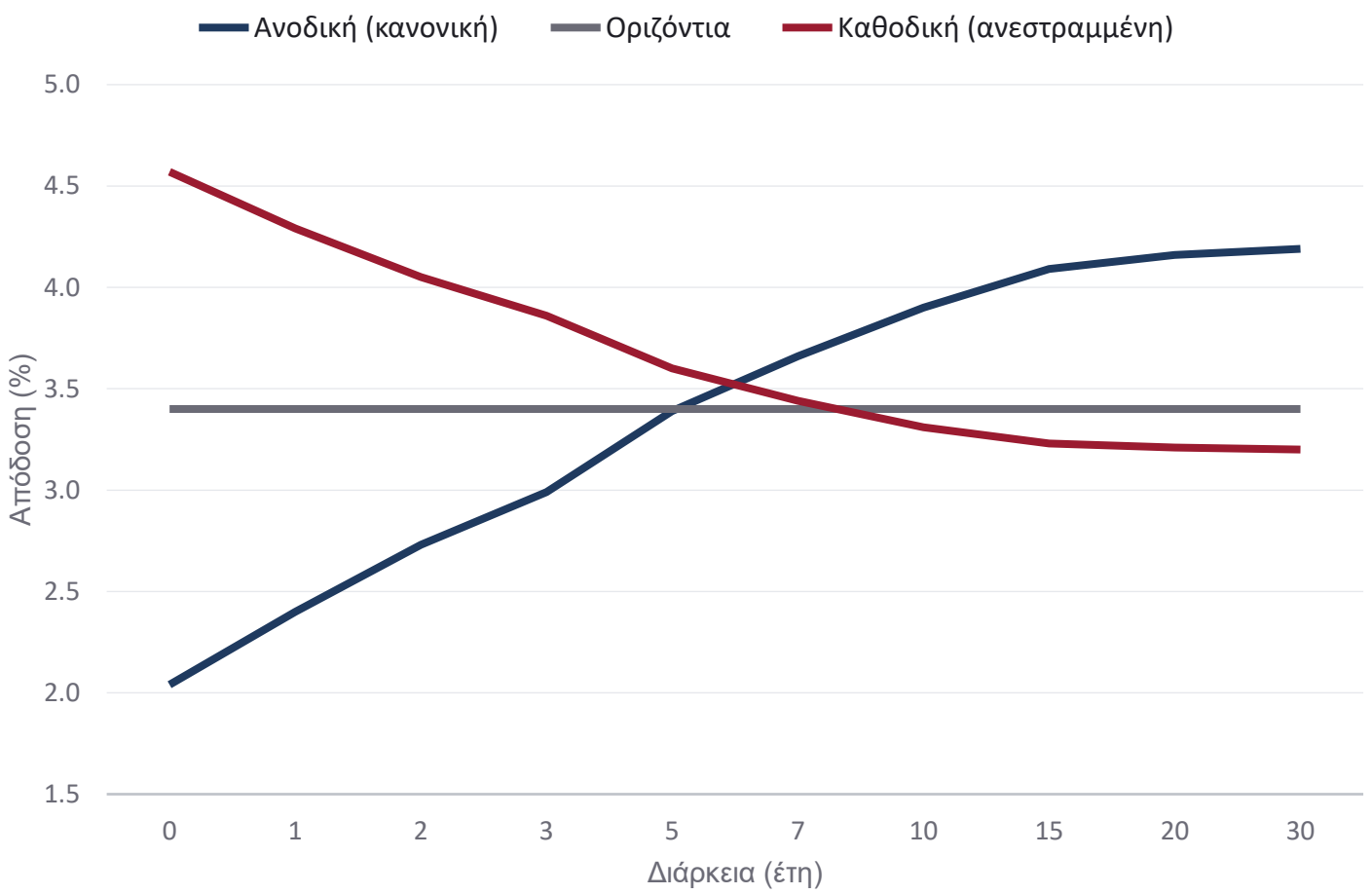
Αποτέλεσμα: **δανεισμός σε ένα έτος από τώρα, για ένα έτος, με επιτόκιο 10,01%** – κλειδωμένο σήμερα.

05

Θεωρίες της καμπύλης επιτοκίων

Γιατί η καμπύλη έχει το σχήμα που έχει;

Σχήματα της καμπύλης των επιτοκίων



Ανοδική καμπύλη

Τα επιτόκια αυξάνονται με τη διάρκεια.

Οριζόντια καμπύλη

Τα επιτόκια είναι ίδια για όλες τις διάρκειες.

Καθοδική καμπύλη

Τα επιτόκια μειώνονται με τη διάρκεια.

Σχηματικά παραδείγματα.

Θεωρίες της καμπύλης επιτοκίων

Ποιοι παράγοντες προσδιορίζουν το σχήμα της καμπύλης; Πότε η καμπύλη έχει θετική κλίση και πότε αρνητική;

1

Θεωρία των προσδοκιών

expectations theory

Ομόλογα διαφορετικών λήξεων = τέλεια υποκατάστατα

2

Θεωρία προτίμησης ρευστότητας

liquidity preference theory

Προσδοκίες + ασφάλιστρο ρευστότητας

3

Θεωρία κατακερματισμένων αγορών

segmentation theory

Κάθε τμήμα της καμπύλης έχει δική του προσφορά και ζήτηση

Θεωρία των καθαρών προσδοκιών (pure expectations theory)

Υποθέσεις: (1) τα ομόλογα διαφορετικών λήξεων είναι **τέλεια υποκατάστατα**, (2) οι επενδυτές είναι **ουδέτεροι ως προς τον κίνδυνο**.

- Σύμφωνα με τη θεωρία, η καμπύλη επιτοκίων **αντανακλά τις προσδοκίες των επενδυτών** για τη μελλοντική εξέλιξη των βραχυχρόνιων επιτοκίων.
- Όταν η καμπύλη έχει **ανοδική κλίση**, η αγορά πιστεύει ότι τα μελλοντικά επιτόκια θα **αυξηθούν**.
- Όταν η καμπύλη έχει **καθοδική κλίση**, η αγορά πιστεύει ότι τα μελλοντικά επιτόκια θα **μειωθούν**.

Καθαρές προσδοκίες: ωρίμανση ή μετακύλιση;

Έστω r(1) = 7% και r(2) = 8%, και ένας επενδυτής σκοπεύει να επενδύσει για 2 έτη.

Στρατηγική ωρίμανσης (maturity)

Επενδύει με το διετές επιτόκιο. Τελική αξία:

$(1 + 8\%)^2 =$ **1,1664**

Στρατηγική μετακύλισης (roll over)

Επενδύει δύο φορές με το ετήσιο επιτόκιο. Αν αναμένει το ετήσιο επιτόκιο σε ένα έτος να είναι 10%:

$(1 + 7\%)(1 + 10\%) =$ **1,177**

Στρατηγική μετακύλισης > στρατηγική ωρίμανσης → όλοι θα ήθελαν μονοετή ομόλογα.

Καθαρές προσδοκίες: πώς αποκαθίσταται η ισορροπία

- Το αναμενόμενο επιτόκιο **10%** δεν συμβιβάζεται με την ισορροπία, αφού τα ομόλογα διαφορετικών λήξεων είναι τέλεια υποκατάστατα: θα μειωθεί η ζήτηση για το διετές ομόλογο, με αποτέλεσμα να **αυξηθεί η απόδοσή του**.
- Έστω ότι το αναμενόμενο επιτόκιο είναι **6%**: με τη μετακύλιση η τελική αξία είναι $(1 + 7\%)(1 + 6\%) = 1{,}1342 < 1{,}1664$.
- Τώρα **στρατηγική μετακύλισης < στρατηγική ωρίμανσης**. Ούτε το 6% συμβιβάζεται με την ισορροπία: θα μειωθεί η ζήτηση για το μονοετές ομόλογο, με αποτέλεσμα να **αυξηθεί η απόδοσή του**.

Ισορροπία μόνο όταν οι δύο στρατηγικές δίνουν **το ίδιο** αναμενόμενο αποτέλεσμα.

Καθαρές προσδοκίες: η συνθήκη ισορροπίας

Σε ισορροπία οι δύο στρατηγικές πρέπει να είναι ισοδύναμες:

$$(1+r_1)\,(1+E[r_{1,2}]) = (1+r_2)^2$$

$$E[r_{1,2}] = \frac{(1+r_2)^2}{1+r_1} - 1 = f_{1,2}$$

- Η καμπύλη αντανακλά την **αναμενόμενη τροχιά των μελλοντικών βραχυπρόθεσμων επιτοκίων**· τα μακροχρόνια επιτόκια είναι ο **γεωμετρικός μέσος** των αναμενόμενων βραχυπρόθεσμων. Το προθεσμιακό επιτόκιο είναι ίσο με το αναμενόμενο.
- Οι επενδυτές μπορεί να αναμένουν μεταβολές στα επιτόκια, για παράδειγμα λόγω μελλοντικών μεταβολών στον πληθωρισμό ή στη νομισματική πολιτική.
- **Αδυναμία:** η θεωρία δεν εξηγεί γιατί η καμπύλη είναι **τις περισσότερες φορές ανοδική**. Σε μια αποτελεσματική αγορά οι αναμενόμενες μεταβολές θα έπρεπε να είναι θετικές και αρνητικές με περίπου την ίδια συχνότητα.

Θεωρία προτίμησης ρευστότητας

Υποθέσεις: (1) τα ομόλογα διαφορετικών λήξεων **δεν είναι τέλεια υποκατάστατα**, (2) οι επενδυτές **δεν είναι ουδέτεροι** ως προς τον κίνδυνο.

- Οι επενδυτές **προτιμούν τα βραχυχρόνια ομόλογα**, επειδή έχουν μεγαλύτερη ρευστότητα (μικρότερο κίνδυνο).
- Τα μακροχρόνια ομόλογα, αν ρευστοποιηθούν πριν από τη λήξη, υπόκεινται σε **μεγαλύτερο κίνδυνο τιμής**, γιατί είναι πιο ευαίσθητα στις μεταβολές των επιτοκίων.
- Η καμπύλη αντανακλά **προσδοκίες για τα μελλοντικά επιτόκια και ασφάλιστρα κινδύνου ρευστότητας** (σήμερα συνήθως: ασφάλιστρο προθεσμίας, term premium).

Προτίμηση ρευστότητας: το ασφάλιστρο ρευστότητας

- Έστω r(1) = 7% και r(2) = 8%. Το προθεσμιακό επιτόκιο είναι f(1,2) = $1{,}08^2/1{,}07 - 1$ = **9,01%**. Κατά τη θεωρία, το αναμενόμενο επιτόκιο είναι **μικρότερο** από το προθεσμιακό· έστω 8,6%.
- Με τη στρατηγική μετακύλισης: (1,07)(1,086) = 1,1620 < 1,1664.
- Η διαφορά μεταξύ προθεσμιακού και αναμενόμενου επιτοκίου είναι το **ασφάλιστρο ρευστότητας**: η επιπλέον απόδοση που εισπράττουν οι επενδυτές για να κρατούν μακροχρόνια ομόλογα.

$$f_{1,2} = E[r_{1,2}] + L_{1,2}$$

9,01% = 8,60% + 0,41%

Ανοδική καμπύλη με προσδοκίες μείωσης επιτοκίων

Κατά τη θεωρία ρευστότητας, μια καμπύλη με **ανοδική κλίση** μπορεί να ενσωματώνει ακόμη και προσδοκίες **μείωσης** των μελλοντικών επιτοκίων.

Περίπτωση	r(1)	r(2)	f(1,2)	Ασφάλιστρο L	E[r(1,2)]	Συμπέρασμα
Ήπια ανοδική	7,0%	7,1%	7,2%	0,41%	**6,79%**	Αναμένεται μείωση
Έντονα ανοδική	7,0%	7,3%	7,6%	0,41%	**7,19%**	Αναμένεται αύξηση

Στην πρώτη περίπτωση: $(1 + r_1)\,(1 + E[r_{1,2}]) < (1 + r_2)^2$

Η κλίση της καμπύλης **δεν** αρκεί από μόνη της για να συμπεράνουμε τις προσδοκίες: πρέπει πρώτα να αφαιρέσουμε το ασφάλιστρο.

Θεωρία κατακερματισμένων αγορών

Υποθέσεις: (1) τα ομόλογα διαφορετικών λήξεων **δεν είναι υποκατάστατα**, (2) τα τμήματα της καμπύλης **δεν συσχετίζονται** μεταξύ τους.

- Κατηγορίες επενδυτών έχουν προτίμηση για ομόλογα συγκεκριμένης λήξης (π.χ. τράπεζες → βραχυχρόνια, ασφαλιστικά ταμεία → μακροχρόνια). Έτσι κάθε τμήμα της καμπύλης υπόκειται στις **δικές του δυνάμεις προσφοράς και ζήτησης**.
- Κατά τη θεωρία, η καμπύλη **δεν ενσωματώνει προσδοκίες** για τη μελλοντική εξέλιξη των επιτοκίων.
- Μια ανοδική καμπύλη παρατηρείται όταν υπάρχει **αυξημένη ζήτηση για βραχυχρόνια ομόλογα** σε σχέση με τα μακροχρόνια.
- Σύγχρονη εκδοχή: **θεωρία προτιμώμενου πεδίου (preferred habitat)** – οι επενδυτές μετακινούνται σε άλλες λήξεις μόνο αν αποζημιωθούν.

Άσκηση: εύλογη αξία ομολογίας

Εκφώνηση

Η ομολογία ΕΤΕΜ εκδόθηκε στο παρελθόν και έχει διάρκεια ζωής ακόμη τρία έτη. Η ονομαστική της αξία είναι 1.000 € και το εκδοτικό της επιτόκιο 10%, με ετήσια τοκομερίδια. Τα επιτόκια σήμερα είναι χαμηλότερα: νέα αξιόγραφα με τα ίδια χαρακτηριστικά αποδίδουν 8%. Άρα το κατάλληλο προεξοφλητικό επιτόκιο είναι 8%. Να βρεθεί η εύλογη αξία της ομολογίας.

Απάντηση: εύλογη αξία ομολογίας

Η εύλογη αξία της ομολογίας ΕΤΕΜ:

$$IV = \frac{100}{1{,}08} + \frac{100}{1{,}08^2} + \frac{100}{1{,}08^3} + \frac{1.000}{1{,}08^3} = 1.051{,}54$$

Η εύλογη αξία είναι περίπου **1.051 €**: η αξία που θα πρέπει να έχει σήμερα η ομολογία στην αγορά. Είναι **υπέρ το άρτιο**, επειδή το κουπόνι (10%) υπερβαίνει το επιτόκιο αγοράς (8%).

Άσκηση: εξαμηνιαία κουπόνια

Εκφώνηση

Ομολογία της εταιρείας Κρι-Κρι έχει επιτόκιο έκδοσης 8,5%, διάρκεια 12 χρόνια και ονομαστική αξία 1.000 $. Αν το επιτόκιο αγοράς είναι 10%, ποια είναι η τιμή της, εάν τα κουπόνια καταβάλλονται δύο φορές το έτος;

Απάντηση: εξαμηνιαία κουπόνια

- Το επιτόκιο έκδοσης είναι σε ετήσια βάση. Ετήσιος τόκος = 1.000 × 0,085 = **85 $**, σε δύο δόσεις των **42,5 $** κάθε εξάμηνο.
- Εξαμηνιαίο επιτόκιο = 10% / 2 = **5%** · συνολική διάρκεια = **24 εξάμηνα**.

$$P = \sum_{t=1}^{24} \frac{42{,}5}{1{,}05^{t}} + \frac{1.000}{1{,}05^{24}} = 896{,}5$$

Αγορά σε τιμή < 896,5 $ δίνει θετική καθαρή παρούσα αξία, οπότε αξίζει η αγορά της ομολογίας.

Άσκηση: ομολογία χωρίς τοκομερίδια

Εκφώνηση

Η ομολογία χωρίς τοκομερίδια ΑΒΓ έχει διάρκεια ζωής 2 έτη, ονομαστική αξία 1.000 € και επιτόκιο αγοράς 10%. Ποια είναι η τιμή αγοράς της ομολογίας;

Απάντηση: Όλη η απόδοση καταβάλλεται στο τέλος της ζωής της ομολογίας (τέλος 2ου έτους):

$$P = \frac{1.000}{(1 + 0{,}10)^2} = 826{,}45$$

Άσκηση: θεωρία καθαρών προσδοκιών

Εκφώνηση

Τα επιτόκια για τίτλους ενός έτους αναμένεται να είναι 2% σήμερα, 4% σε ένα έτος και 6% σε δύο έτη. Με τη θεωρία των καθαρών προσδοκιών, υπολογίστε τα τρέχοντα επιτόκια διετούς και τριετούς διάρκειας.

Απάντηση:

$$(1+i_2)^2 = (1+i_1)(1+E[i_{1,\,t+1}]) = (1{,}02)(1{,}04) = 1{,}0608 \;\Rightarrow\; i_2 = 2{,}99\%$$

$$(1+i_3)^3 = (1{,}02)(1{,}04)(1{,}06) = 1{,}124448 \;\Rightarrow\; i_3 = 3{,}99\%$$

Η καμπύλη είναι ανοδική (2% → 2,99% → 3,99%) επειδή η αγορά αναμένει αύξηση των βραχυχρόνιων επιτοκίων.

Άσκηση: προθεσμιακό επιτόκιο

Εκφώνηση

Το ετήσιο διετές επιτόκιο είναι 13%, ενώ το επιτόκιο ενός έτους είναι 12%. Χρησιμοποιήστε αυτές τις πληροφορίες για να υπολογίσετε το προθεσμιακό επιτόκιο ενός έτους (για το δεύτερο έτος).

Απάντηση:

$$f_{1,2} = \frac{(1+i_2)^2}{1+i_1} - 1 = \frac{1{,}13^2}{1{,}12} - 1 = 14{,}01\%$$

Άσκηση (νέα): από την ΕΚΤ στο 3ετές επιτόκιο

Εκφώνηση

Η ΕΚΤ έχει σήμερα το επιτόκιο στο 2,50%. Η αγορά αναμένει το επιτόκιο ενός έτους να είναι 2,50% φέτος, 2,75% του χρόνου και 3,00% σε δύο χρόνια. Το ασφάλιστρο προθεσμίας για 3 έτη είναι 0,30%. (α) Ποιο είναι το 3ετές επιτόκιο κατά την καθαρή θεωρία προσδοκιών και ποιο με το ασφάλιστρο; (β) Αν ένα ελληνικό 3ετές αποδίδει 3,60%, πόσο είναι το περιθώριο κινδύνου; (γ) Τι θα συμβεί στο 3ετές αν η ΕΚΤ ανακοινώσει ότι δεν θα κάνει άλλες αυξήσεις;

Απάντηση:

$$i_3 \approx \frac{2{,}50 + 2{,}75 + 3{,}00}{3} + 0{,}30 = 3{,}05\%$$

- (α) Καθαρές προσδοκίες: 2,75% · με ασφάλιστρο: **3,05%**.
- (β) Περιθώριο = 3,60 − 3,05 = **0,55%** (55 μ.β.) πιστωτικού κινδύνου και ρευστότητας.
- (γ) Ο μέσος όρος προσδοκιών πέφτει στο 2,50% → 3ετές ≈ 2,80% (μείωση 25 μ.β.) αν δεν αλλάξει το ασφάλιστρο.

Ερμηνεύστε τα σχόλια αναλυτών της αγοράς ομολόγων

- **α. «Η ανοδική κλίση της καμπύλης επιτοκίων επιμένει, επειδή πολλοί επενδυτές είναι έτοιμοι να μεταφέρουν τα κεφάλαιά τους στη χρηματιστηριακή αγορά.»**
  - Οι επενδυτές διακρατούν βραχυπρόθεσμους κρατικούς τίτλους και αποφεύγουν τους μακροπρόθεσμους, επειδή μπορεί να χρειαστεί να τους ρευστοποιήσουν σύντομα. Προτιμούν ρευστούς τίτλους, λιγότερο εκτεθειμένους στον κίνδυνο επιτοκίου.
- **β. «Οι αποδόσεις των ομολόγων χαμηλής πιστοληπτικής διαβάθμισης αυξήθηκαν, καθώς οι φόβοι ύφεσης προκάλεσαν φυγή προς την ποιότητα.»**
  - Οι επενδυτές στράφηκαν σε ασφαλέστερα ομόλογα και πούλησαν τα χαμηλής διαβάθμισης. Οι τιμές τους πιέστηκαν προς τα κάτω και οι αποδόσεις τους προς τα πάνω: το ασφάλιστρο κινδύνου αυξήθηκε.
- **γ. «Η μετάβαση από ανοδική σε καθοδική καμπύλη επιτοκίων προειδοποιεί για πιθανή ύφεση.»**
  - Αν η μεταβολή οφείλεται σε αλλαγή των προσδοκιών, η αγορά αναμένει πλέον μείωση των επιτοκίων. Τέτοιες προσδοκίες εμφανίζονται όταν αναμένεται επιβράδυνση ή συρρίκνωση της οικονομίας.

Διαχείριση στις χρηματοπιστωτικές αγορές (1/2)

Ως αναλυτής σε οίκο πιστοληπτικής αξιολόγησης, καλείστε να ερμηνεύσετε μια πρόσφατη μετατόπιση της καμπύλης. Πριν από έξι μήνες η καμπύλη είχε ελαφρά καθοδική κλίση. Στο διάστημα αυτό οι μακροχρόνιες αποδόσεις μειώθηκαν, ενώ οι βραχυχρόνιες έμειναν σταθερές. Οι αναλυτές απέδωσαν τη μεταβολή σε αναθεώρηση των προσδοκιών για τα επιτόκια.

- **α. Με βάση τη μετατόπιση, οι επιχειρήσεις αύξησαν ή μείωσαν τη ζήτηση μακροχρόνιων κεφαλαίων τους τελευταίους έξι μήνες;**
  - Οι χαμηλότερες μακροχρόνιες αποδόσεις μπορεί να οφείλονται σε μειωμένη ζήτηση μακροχρόνιων κεφαλαίων: οι επιχειρήσεις ίσως μείωσαν τις εκδόσεις μακροχρόνιων τίτλων.
- **β. Τι δείχνει η μετατόπιση για τις μεταβαλλόμενες προσδοκίες της αγοράς για τα μελλοντικά επιτόκια;**
  - Πριν από έξι μήνες η καμπύλη ενσωμάτωνε προσδοκία για ελαφρά μείωση των επιτοκίων· σήμερα ενσωματώνει προσδοκία για μεγαλύτερη μείωση.

Διαχείριση στις χρηματοπιστωτικές αγορές (2/2)

- **γ. Ένας αναλυτής υποστήριξε ότι η αιτία της μετατόπισης είναι ότι πολλές μεγάλες επιχειρήσεις αναμένουν ύφεση. Γιατί μια αναμενόμενη ύφεση θα μετατόπιζε την καμπύλη με αυτόν τον τρόπο;**
  - Όταν αναμένεται επιδείνωση της οικονομίας, η ζήτηση δανειακών κεφαλαίων από τις επιχειρήσεις μειώνεται (περιορίζουν τα επενδυτικά τους σχέδια). Οι μακροχρόνιες αποδόσεις πέφτουν και η καμπύλη αποκτά πιο έντονη καθοδική κλίση: σήμα ότι οι επιχειρήσεις μειώνουν τον δανεισμό τους.
- **δ. Τι θα μπορούσε να σημαίνει αυτή η μετατόπιση για τις αξιολογήσεις των υφιστάμενων εταιρικών ομολόγων; Ποιες επιχειρήσεις είναι πιθανότερο να υποβαθμιστούν;**
  - Στον βαθμό που σηματοδοτεί ύφεση ή επιβράδυνση, σηματοδοτεί και επιδείνωση της πιστοληπτικής ικανότητας ορισμένων επιχειρήσεων, άρα υποβαθμίσεις. Πιο ευάλωτες είναι οι επιχειρήσεις που είναι πιο ευαίσθητες στον οικονομικό κύκλο.

Υποβάθμιση ομολόγων

Ερώτηση

Εξηγήστε πώς η υποβάθμιση των ομολόγων μιας επιχείρησης επηρεάζει (α) τις τιμές τους, (β) την απόδοση των επενδυτών που τα κατέχουν σήμερα και (γ) τη δυνητική απόδοση όσων τα αγοράσουν στο εγγύς μέλλον.

Απάντηση

Μετά την υποβάθμιση οι επενδυτές απαιτούν υψηλότερη απόδοση, επειδή ο κίνδυνος αθέτησης θεωρείται μεγαλύτερος. Η τιμή των ομολόγων πέφτει και οι σημερινοί κάτοχοι υφίστανται κεφαλαιακή ζημία. Οι νέοι επενδυτές αγοράζουν σε χαμηλότερη τιμή, που τους αποζημιώνει για τον αυξημένο κίνδυνο.

Συνέπειες μιας μετατόπισης της καμπύλης

Ερώτηση

Η καμπύλη επιτοκίων μετατοπίζεται ξαφνικά: η νέα καμπύλη είναι υψηλότερη και με πιο απότομη κλίση από ό,τι χθες. Αν μια επιχείρηση εκδώσει σήμερα νέα ομόλογα, θα τα πουλήσει σε υψηλότερη ή χαμηλότερη τιμή από ό,τι αν τα είχε εκδώσει χθες; Εξηγήστε.

Απάντηση

Υψηλότερη και πιο απότομη καμπύλη σημαίνει ότι οι μακροχρόνιες αποδόσεις αυξήθηκαν. Η επιχείρηση θα πρέπει να πουλήσει τα ομόλογα σε χαμηλότερη τιμή, ώστε να προσφέρει την υψηλότερη απόδοση που ζητούν σήμερα οι επενδυτές.

Επίδραση των οικονομικών συνθηκών

Ερώτηση

Μια ξαφνική είδηση κάνει τους διαχειριστές χαρτοφυλακίων ομολόγων να αναμένουν πολύ υψηλότερη οικονομική ανάπτυξη. Πώς επηρεάζονται οι τιμές των ομολόγων; Τι συμβαίνει αν η είδηση τους κάνει να αναμένουν ύφεση;

Απάντηση

Η υψηλότερη ανάπτυξη πιέζει τα επιτόκια προς τα πάνω και τις τιμές των ομολόγων προς τα κάτω· οι διαχειριστές πουλούν και οι τιμές πέφτουν αμέσως. Η ύφεση συνεπάγεται μικρότερη ζήτηση δανειακών κεφαλαίων, χαμηλότερα επιτόκια και υψηλότερες τιμές· οι διαχειριστές αγοράζουν και οι τιμές ανεβαίνουν αμέσως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Επίδραση των κρίσεων στην καμπύλη επιτοκίων

Ερώτηση

Σε ορισμένες κρίσεις οι επενδυτές μεταφέρουν κεφάλαια από τη χρηματιστηριακή αγορά σε τίτλους της αγοράς χρήματος για λόγους ασφάλειας, ακόμη κι αν δεν φοβούνται άνοδο των επιτοκίων. Πώς και γιατί επηρεάζεται η καμπύλη; Η μεταβολή εξηγείται από τη θεωρία των προσδοκιών, της προτίμησης ρευστότητας ή των κατακερματισμένων αγορών;

Απάντηση

Η εισροή στην αγορά χρήματος αυξάνει την προσφορά βραχυχρόνιων κεφαλαίων και μειώνει τα βραχυχρόνια επιτόκια· η καμπύλη γίνεται πιο απότομη. Η μεταβολή αντανακλά την προτίμηση των επενδυτών για ασφαλείς βραχυχρόνιους τίτλους: θεωρία κατακερματισμένων αγορών (προτίμηση για ρευστότητα).

Θεωρία κατακερματισμένων αγορών

Ερώτηση

Το Δημόσιο αποφασίζει να χρηματοδοτήσει το έλλειμμά του κυρίως με μακροχρόνιο δανεισμό. Πώς θα επηρεαστεί η καμπύλη επιτοκίων; Αν οι βραχυχρόνιες και οι μακροχρόνιες αγορές είναι κατακερματισμένες, η επίδραση θα είναι εντονότερη ή ηπιότερη; Εξηγήστε.

Απάντηση

Ο μεγάλος δανεισμός στις μακροχρόνιες λήξεις πιέζει τα μακροχρόνια επιτόκια προς τα πάνω, χωρίς ανάλογη επίδραση στα βραχυχρόνια. Αν οι αγορές είναι κατακερματισμένες, η επίδραση είναι εντονότερη. (Με σημερινούς όρους: μεγαλύτερη προσφορά διάρκειας αυξάνει το ασφάλιστρο προθεσμίας.)

Άσκηση: τιμή ομολόγου και κίνδυνος επιτοκίου

Εκφώνηση

Ομόλογο με ονομαστική αξία 1.000 €, ετήσιο κουπόνι 5% και λήξη σε 5 έτη.

(α) Ποια είναι η τιμή του αν η απόδοση στη λήξη (YTM) είναι 4%;

(β) Ποια είναι η τιμή αν η απόδοση αυξηθεί στο 6%; Ποια είναι η ποσοστιαία μεταβολή;

(γ) Γιατί η τιμή είναι πάνω από το άρτιο στο (α) και κάτω στο (β);

Απάντηση: τιμή ομολόγου και κίνδυνος επιτοκίου

(α) Προεξοφλούμε κάθε χρηματοροή με 4%:

Έτος	Χρηματοροή	Συντελεστής $1/1{,}04^t$	Παρούσα αξία
1	50	0,9615	48,08
2	50	0,9246	46,23
3	50	0,8890	44,45
4	50	0,8548	42,74
5	1.050	0,8219	863,02
Σύνολο			**1.044,52**

$$P = \sum_{t=1}^{5} \frac{50}{1{,}04^t} + \frac{1.000}{1{,}04^5} = 1.044{,}52$$

(β) Με απόδοση 6%:

$$P = \sum_{t=1}^{5} \frac{50}{1{,}06^t} + \frac{1.000}{1{,}06^5} = 957{,}88 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta P}{P} = -8{,}29\%$$

(γ) Όταν η απόδοση της αγοράς (4%) είναι **κάτω** από το κουπόνι (5%), ο επενδυτής πληρώνει **πριμ** για το υψηλότερο κουπόνι: τιμή > 1.000. Όταν η απόδοση (6%) είναι **πάνω** από το κουπόνι, το ομόλογο πωλείται **υπό το άρτιο**. Μια αύξηση της απόδοσης κατά 2 μονάδες μειώνει την τιμή κατά 8,3%: αυτός είναι ο **κίνδυνος επιτοκίου**.

Άσκηση: υπολογισμός της απόδοσης στη λήξη

Εκφώνηση

Ένα τριετές ομόλογο με ονομαστική αξία 100 και ετήσιο κουπόνι 6% διαπραγματεύεται στο 97.

(α) Είναι η απόδοση στη λήξη μεγαλύτερη ή μικρότερη από 6%; Γιατί;

(β) Υπολογίστε την απόδοση στη λήξη με δοκιμές και γραμμική παρεμβολή.

Απάντηση: υπολογισμός της απόδοσης στη λήξη

(α) Η τιμή (97) είναι **κάτω από το άρτιο**, άρα η απόδοση στη λήξη είναι **μεγαλύτερη από το κουπόνι** (6%).

(β) Δοκιμάζουμε τιμές για το y:

Δοκιμή y	Τιμή = 6/(1+y) + 6/(1+y)² + 106/(1+y)³	Σύγκριση με 97
6%	100,00	πολύ υψηλή → αυξάνουμε το y
7%	97,38	λίγο υψηλή → το y είναι λίγο πάνω από 7%
8%	94,85	χαμηλή → το y είναι κάτω από 8%

Γραμμική παρεμβολή μεταξύ 7% και 8%:

$$97 = \frac{6}{1+y} + \frac{6}{(1+y)^2} + \frac{106}{(1+y)^3} \quad \Rightarrow \quad y \approx 7\% + 1\% \cdot \frac{97{,}38 - 97}{97{,}38 - 94{,}85} = 7{,}15\%$$

Η ακριβής λύση (αριθμητικά) είναι **7,146%**. Η απόδοση στη λήξη είναι το **εσωτερικό επιτόκιο απόδοσης** των χρηματοροών του ομολόγου.

Άσκηση: διάρκεια και κυρτότητα

Εκφώνηση

Για το ομόλογο της πρώτης άσκησης (κουπόνι 5%, 5 έτη, απόδοση 4%, τιμή 1.044,52):

(α) Υπολογίστε τη διάρκεια Macaulay D και την τροποποιημένη διάρκεια D*.

(β) Εκτιμήστε την ποσοστιαία μεταβολή της τιμής αν η απόδοση αυξηθεί κατά 1 μονάδα (στο 5%), πρώτα μόνο με τη διάρκεια και μετά με διόρθωση κυρτότητας (C = 24,48).

(γ) Συγκρίνετε με την πραγματική μεταβολή.

Απάντηση: διάρκεια και κυρτότητα

t	PV(CF_t)	t · PV
1	48,08	48,08
2	46,23	92,46
3	44,45	133,35
4	42,74	170,96
5	863,02	4.315,10
Σύνολο	**1.044,52**	**4.759,95**

(α) D = 4.759,95 / 1.044,52:

$$D = \frac{1}{P}\sum_{t=1}^{5} t \cdot \frac{CF_t}{(1+y)^t} = 4{,}557, \qquad D^* = \frac{D}{1+y} = \frac{4{,}557}{1{,}04} = 4{,}382$$

(β) Με Δy = +0,01:

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D^*\,\Delta y + \frac{1}{2}\,C\,(\Delta y)^2 = -4{,}382\% + 0{,}122\% = -4{,}26\%$$

Μόνο με τη διάρκεια: −4,38%. Με κυρτότητα: −4,26%.

(γ) Στο 5% η τιμή γίνεται ακριβώς 1.000 (κουπόνι = απόδοση): μεταβολή **−4,26%**. Η διάρκεια **υπερεκτιμά** την πτώση, γιατί η σχέση τιμής–απόδοσης είναι **κυρτή**· η διόρθωση κυρτότητας δίνει σχεδόν την ακριβή τιμή.

Άσκηση: bootstrap και έλεγχος αρμπιτράζ

Εκφώνηση

Στην αγορά διαπραγματεύονται τα εξής ομόλογα (ονομαστική αξία 100, ετήσια κουπόνια):

Ομόλογο	Λήξη	Κουπόνι	Τιμή
Α	1 έτος	0%	98,04
Β	2 έτη	3%	100,97
Γ	3 έτη	4%	102,50

- (α) Βρείτε με bootstrap τα τρέχοντα επιτόκια r_1, r_2, r_3 και τους συντελεστές προεξόφλησης.
- (β) Ένα τριετές ομόλογο με κουπόνι 5% διαπραγματεύεται στο 104,00. Είναι σωστά τιμολογημένο;
- (γ) Αν όχι, περιγράψτε μια στρατηγική αρμπιτράζ.

Απάντηση: bootstrap και έλεγχος αρμπιτράζ

(α) Βήμα προς βήμα, χρησιμοποιώντας κάθε φορά τα επιτόκια που ήδη βρήκαμε:

$$r_1 = \frac{100}{98{,}04} - 1 = 2{,}00\%$$

$$(1+r_2)^2 = \frac{103}{100{,}97 - 3/1{,}02} = \frac{103}{98{,}029} \;\Rightarrow\; r_2 = 2{,}50\%$$

$$(1+r_3)^3 = \frac{104}{102{,}50 - 4/1{,}02 - 4/1{,}025^2} = \frac{104}{94{,}771} \;\Rightarrow\; r_3 = 3{,}15\%$$

Συντελεστές προεξόφλησης: $d_1 = 0{,}9804 \cdot d_2 = 0{,}9517 \cdot d_3 = 0{,}9113$. **(β)** Δίκαιη τιμή του ομολόγου με κουπόνι 5%:

$$P^* = 5 \cdot 0{,}9804 + 5 \cdot 0{,}9517 + 105 \cdot 0{,}9113 = 105{,}34 \;>\; 104{,}00$$

(γ) Το ομόλογο είναι **φθηνό** κατά 1,34. Αρμπιτράζ: **αγορά** του ομολόγου στο 104 και **πώληση** των χρηματοροών του (5, 5, 105) ως χαρτοφυλάκιο από τα A, B, Γ (ή ομόλογα μηδενικού τοκομεριδίου) στο 105,34. Οι μελλοντικές ροές αλληλοαναιρούνται και το κέρδος 1,34 εισπράττεται σήμερα.

Άσκηση: προθεσμιακά επιτόκια από την καμπύλη

Εκφώνηση

Η καμπύλη τρεχόντων επιτοκίων (ετήσιος ανατοκισμός) είναι: $r_1 = 2{,}5\%$, $r_2 = 3{,}0\%$, $r_3 = 3{,}4\%$, $r_4 = 3{,}7\%$.

(α) Υπολογίστε τα προθεσμιακά επιτόκια ενός έτους $f_{1,2}$, $f_{2,3}$ και $f_{3,4}$.

(β) Υπολογίστε το προθεσμιακό επιτόκιο δύο ετών που ξεκινά σε ένα έτος, $f_{1,3}$.

(γ) Τι δείχνουν τα προθεσμιακά επιτόκια για τις προσδοκίες της αγοράς κατά τη θεωρία των καθαρών προσδοκιών;

Απάντηση: προθεσμιακά επιτόκια από την καμπύλη

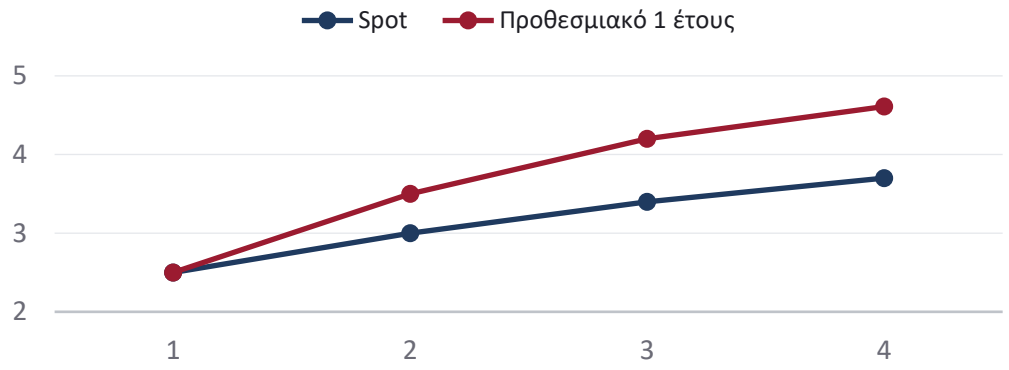
(α) Από τη σχέση $(1 + r_n)^n = (1 + r_{n-1})^{n-1}\,(1 + f_{n-1,n})$:

$$f_{1,2} = \frac{1{,}030^2}{1{,}025} - 1 = 3{,}50\%, \qquad f_{2,3} = \frac{1{,}034^3}{1{,}030^2} - 1 = 4{,}20\%, \qquad f_{3,4} = \frac{1{,}037^4}{1{,}034^3} - 1 = 4{,}61\%$$

(β) Για δανεισμό δύο ετών που ξεκινά στο τέλος του 1ου έτους (ετήσιο επιτόκιο):

$$f_{1,3} = \left[\frac{1{,}034^3}{1{,}025}\right]^{1/2} - 1 = 3{,}85\%$$

Έλεγχος: (1,035 · 1,042)^(1/2) − 1 = 3,85%, δηλαδή ο γεωμετρικός μέσος των $f_{1,2}$ και $f_{2,3}$.



(γ) Τα προθεσμιακά επιτόκια είναι **πάνω** από τα τρέχοντα και **αυξάνονται**: κατά τη θεωρία των καθαρών προσδοκιών η αγορά αναμένει ότι το επιτόκιο ενός έτους θα ανέβει από 2,5% σήμερα σε 3,5%, 4,2% και 4,6% τα επόμενα έτη. (Με ασφάλιστρο ρευστότητας, οι προσδοκίες είναι λίγο χαμηλότερες.)

Άσκηση: αρμπιτράζ με προθεσμιακό επιτόκιο

Εκφώνηση

Τα τρέχοντα επιτόκια είναι $r_1 = 3\%$ και $r_2 = 3{,}5\%$. Μια τράπεζα προσφέρει συμβόλαιο προθεσμιακού επιτοκίου (FRA) με το οποίο μπορείτε να **δανείσετε** 1.000.000 € σε ένα έτος, για ένα έτος, με επιτόκιο **4,5%**.

(α) Ποιο είναι το προθεσμιακό επιτόκιο που υπονοεί η καμπύλη;

(β) Υπάρχει ευκαιρία αρμπιτράζ; Περιγράψτε τη στρατηγική και υπολογίστε το κέρδος.

Απάντηση: αρμπιτράζ με προθεσμιακό επιτόκιο

(α) Το προθεσμιακό επιτόκιο της καμπύλης:

$$f_{1,2} = \frac{1{,}035^2}{1{,}03} - 1 = 4{,}00\% \; < \; 4{,}50\%$$

(β) Ναι: **δανειζόμαστε συνθετικά** στο προθεσμιακό επιτόκιο 4,00% και **δανείζουμε** μέσω του FRA στο 4,50%.

Χρόνος	Ενέργεια	Ταμειακή ροή (€)
t = 0	Δανειζόμαστε 970.873,79 (= 1.000.000/1,03) για 2 έτη με 3,5% και τα επενδύουμε για 1 έτος με 3%	0
t = 1	Εισπράττουμε 1.000.000 από την επένδυση και τα δανείζουμε μέσω FRA για 1 έτος με 4,5%	0
t = 2	Εισπράττουμε 1.000.000 × 1,045 = 1.045.000 από το FRA	+1.045.000,00
t = 2	Αποπληρώνουμε το διετές δάνειο: 970.873,79 × 1,035² = 1.040.024,27	−1.040.024,27
Σύνολο	Καθαρό κέρδος χωρίς κίνδυνο και χωρίς αρχικό κεφάλαιο	**+4.975,73**

Το κέρδος ισούται με 1.000.000 × (4,50% − 4,00%) ≈ 5.000 €. Όσο το FRA διαφέρει από το προθεσμιακό επιτόκιο της καμπύλης, υπάρχει αρμπιτράζ.

Άσκηση: καμπύλη, προσδοκίες και ασφάλιστρο

Εκφώνηση

Το επιτόκιο ενός έτους είναι 3,0% και το επιτόκιο δύο ετών 3,6%.

(α) Ποιο είναι το προθεσμιακό επιτόκιο $f_{1,2}$;

(β) Ποιο επιτόκιο ενός έτους αναμένει η αγορά για το επόμενο έτος κατά τη θεωρία των καθαρών προσδοκιών;

(γ) Αν το ασφάλιστρο ρευστότητας είναι 0,20%, ποιο είναι το αναμενόμενο επιτόκιο;

(δ) Αν το ασφάλιστρο ήταν 1,30%, τι θα σήμαινε η ίδια ανοδική καμπύλη για τις προσδοκίες;

Απάντηση: καμπύλη, προσδοκίες και ασφάλιστρο

(α), (γ)

$$f_{1,2} = \frac{1{,}036^2}{1{,}03} - 1 = 4{,}20\%, \qquad E[r_{1,2}] = f_{1,2} - L_{1,2} = 4{,}20\% - 0{,}20\% = 4{,}00\%$$

Θεωρία / υπόθεση	Αναμενόμενο r_1 σε 1 έτος	Τι αναμένει η αγορά
(β) Καθαρές προσδοκίες (L = 0)	E = f = 4,20%	Αύξηση κατά 1,20 μονάδες
(γ) Προτίμηση ρευστότητας, L = 0,20%	E = 4,20% − 0,20% = 4,00%	Αύξηση κατά 1,00 μονάδα
(δ) Προτίμηση ρευστότητας, L = 1,30%	E = 4,20% − 1,30% = 2,90%	Μικρή μείωση (από 3,0% σε 2,9%)

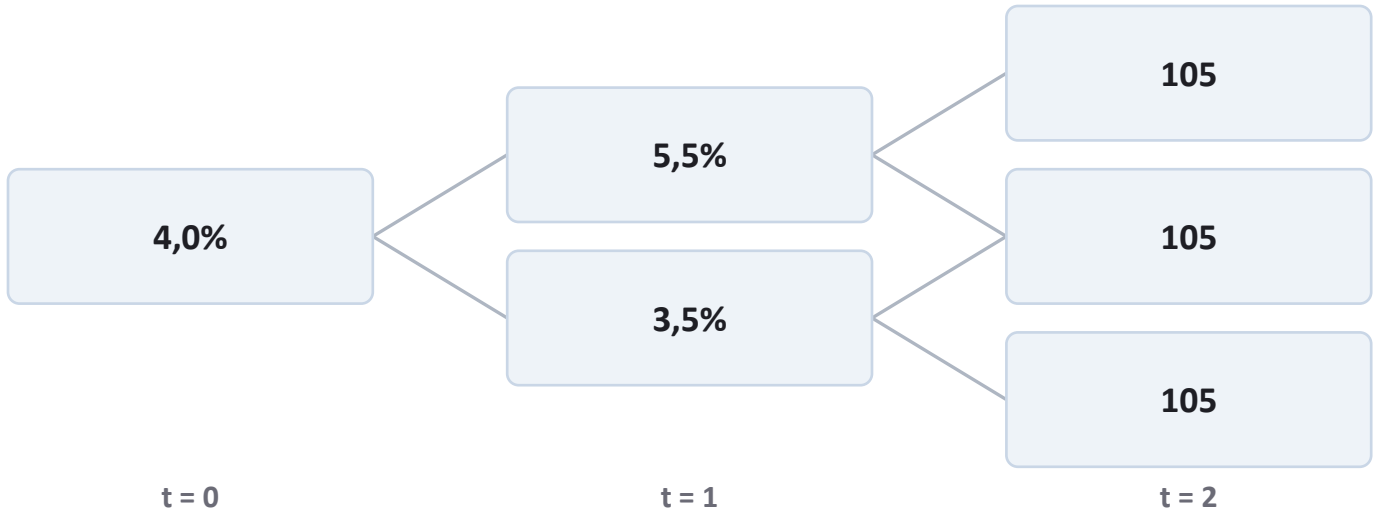
Συμπέρασμα: η ίδια ανοδική καμπύλη μπορεί να ενσωματώνει προσδοκίες **ανόδου ή και μείωσης** των επιτοκίων, ανάλογα με το μέγεθος του ασφαλίστρου. Η κλίση από μόνη της δεν αρκεί για να συμπεράνουμε τις προσδοκίες.

Άσκηση: ομόλογο με δικαίωμα ανάκλησης (callable)

Εκφώνηση

Διετές ομόλογο με ετήσιο κουπόνι 5% και ονομαστική αξία 100. Ο εκδότης μπορεί να το ανακαλέσει στο 100 στο τέλος του 1ου έτους (μετά το κουπόνι). Βραχυχρόνιο επιτόκιο σήμερα 4%· σε ένα έτος 5,5% ή 3,5% με πιθανότητες ουδέτερου κινδύνου ½.

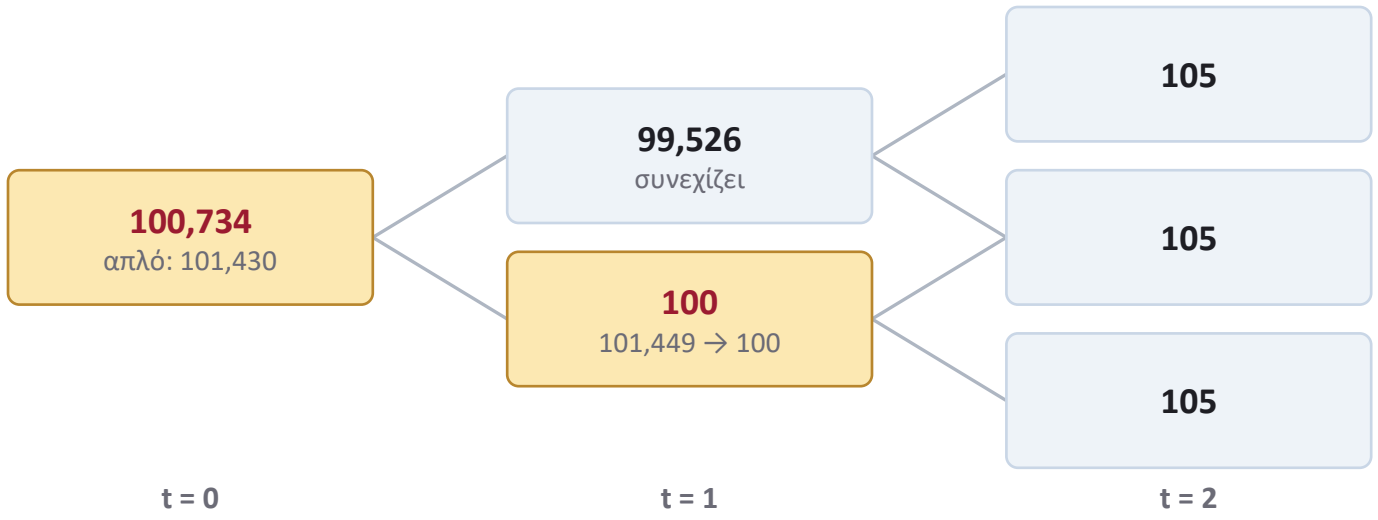
(α) Τιμολογήστε το ομόλογο χωρίς δικαίωμα. (β) Τιμολογήστε το callable. (γ) Ποια είναι η αξία του δικαιώματος ανάκλησης;



Δέντρο βραχυχρόνιων επιτοκίων· στη λήξη πληρώνεται 100 + 5 = 105

Απάντηση: ομόλογο με δικαίωμα ανάκλησης (callable)

Κόμβος	Απλό ομόλογο	Callable (min με 100)
t=1, πάνω (5,5%)	105 / 1,055 = 99,526	99,526 < 100 → δεν ανακαλεί: 99,526
t=1, κάτω (3,5%)	105 / 1,035 = 101,449	**101,449 > 100 → ανακαλεί: 100**
t=0 (4%)	**[½(99,526+5) + ½(101,449+5)] / 1,04 = 101,430**	**[½(99,526+5) + ½(100+5)] / 1,04 = 100,734**



(γ) Αξία δικαιώματος

101,430 − 100,734 = **0,696**

Ο εκδότης ανακαλεί όταν τα επιτόκια **πέφτουν** (κάτω κόμβος), οπότε ο επενδυτής χάνει την άνοδο της τιμής.

Άσκηση: ομόλογο με δικαίωμα πώλησης (puttable)

Εκφώνηση

Με το ίδιο δέντρο επιτοκίων και το ίδιο διετές ομόλογο (κουπόνι 5%), υποθέστε ότι ο **επενδυτής** έχει δικαίωμα να πουλήσει το ομόλογο πίσω στον εκδότη στο 100 στο τέλος του 1ου έτους.

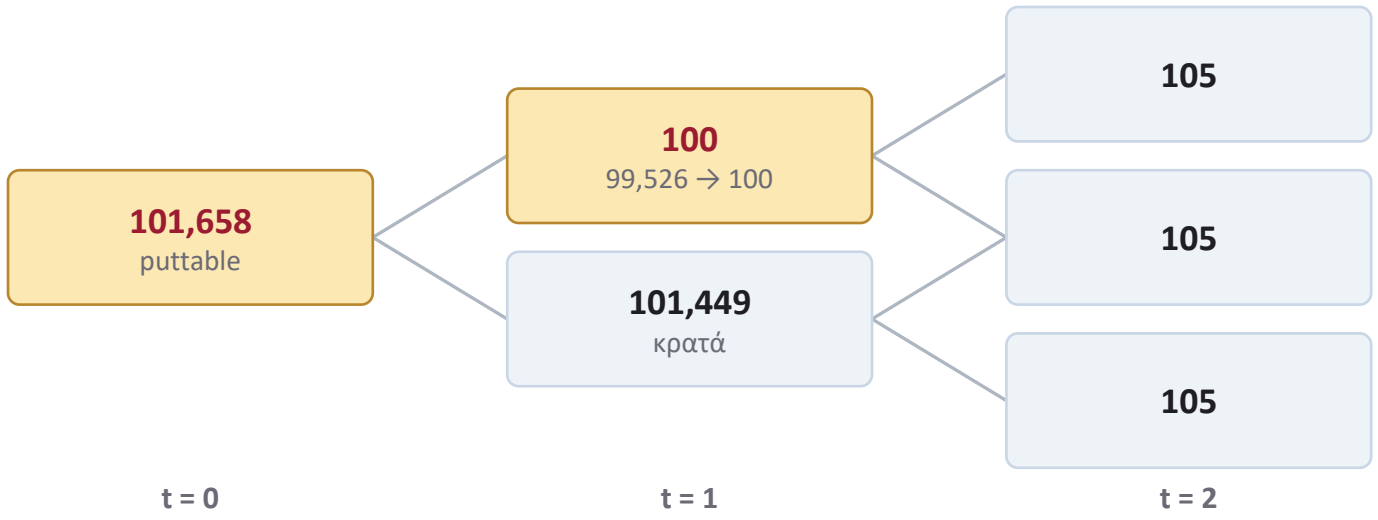
(α) Σε ποιον κόμβο ασκείται το δικαίωμα; (β) Τιμολογήστε το puttable. (γ) Ποια είναι η αξία του δικαιώματος πώλησης; (δ) Συγκρίνετε με το callable.

$$V_{i,\,j} = \max\left\{K_p,\ \frac{0{,}5\,(V_{i+1,\,j} + C) + 0{,}5\,(V_{i+1,\,j+1} + C)}{1 + r_{i,\,j}}\right\}$$

Υπόδειξη: σε κάθε κόμβο άσκησης ο επενδυτής παίρνει το **μεγαλύτερο** από την αξία συνέχισης και την τιμή πώλησης K = 100.

Απάντηση: ομόλογο με δικαίωμα πώλησης (puttable)

Κόμβος	Αξία συνέχισης	Puttable (max με 100)
t=1, πάνω (5,5%)	99,526	**99,526 < 100 → πουλάει: 100**
t=1, κάτω (3,5%)	101,449	101,449 > 100 → κρατά: 101,449
t=0 (4%)	–	**[½(100+5) + ½(101,449+5)] / 1,04 = 101,658**



(γ), (δ)

Αξία δικαιώματος πώλησης: 101,658 − 101,430 = **0,228**

Το put ανήκει στον **επενδυτή** και ασκείται όταν τα επιτόκια **ανεβαίνουν**: η τιμή του puttable > του απλού > του callable.

Άσκηση: απόδοση στη λήξη και απόδοση στην ανάκληση

Εκφώνηση

Ομόλογο 10 ετών με ετήσιο κουπόνι 6% και ονομαστική αξία 100 διαπραγματεύεται στο 108. Ο εκδότης μπορεί να το ανακαλέσει σε 3 έτη στο 102.

(α) Υπολογίστε την απόδοση στη λήξη (YTM).

(β) Υπολογίστε την απόδοση στην ανάκληση (yield to call, YTC).

(γ) Ποια απόδοση πρέπει να λάβει υπόψη ο επενδυτής και γιατί;

Απάντηση: απόδοση στη λήξη και απόδοση στην ανάκληση

(α) Χρηματοροές μέχρι τη λήξη (10 κουπόνια των 6 και 100 στη λήξη):

$$108 = \sum_{t=1}^{10} \frac{6}{(1+y)^t} + \frac{100}{(1+y)^{10}} \quad \Rightarrow \quad YTM = 4{,}97\%$$

(β) Χρηματοροές μέχρι την ανάκληση (3 κουπόνια και τιμή ανάκλησης 102):

$$108 = \sum_{t=1}^{3} \frac{6}{(1+y_c)^t} + \frac{102}{(1+y_c)^3} \quad \Rightarrow \quad YTC = 3{,}77\%$$

(γ) Το ομόλογο διαπραγματεύεται **πάνω** από την τιμή ανάκλησης, επειδή τα επιτόκια της αγοράς (~5%) είναι κάτω από το κουπόνι (6%): ο εκδότης έχει κίνητρο να το ανακαλέσει και να αναχρηματοδοτηθεί φθηνότερα. Ο επενδυτής πρέπει να υπολογίζει τη **χειρότερη απόδοση (yield to worst)**, δηλαδή **3,77%** και όχι 4,97%.

A

Παράρτημα Α: Τιμολόγηση ομολόγου με δικαίωμα ανάκλησης

Ένα απλό διωνυμικό δέντρο επιτοκίων και αναδρομική τιμολόγηση (backward induction)

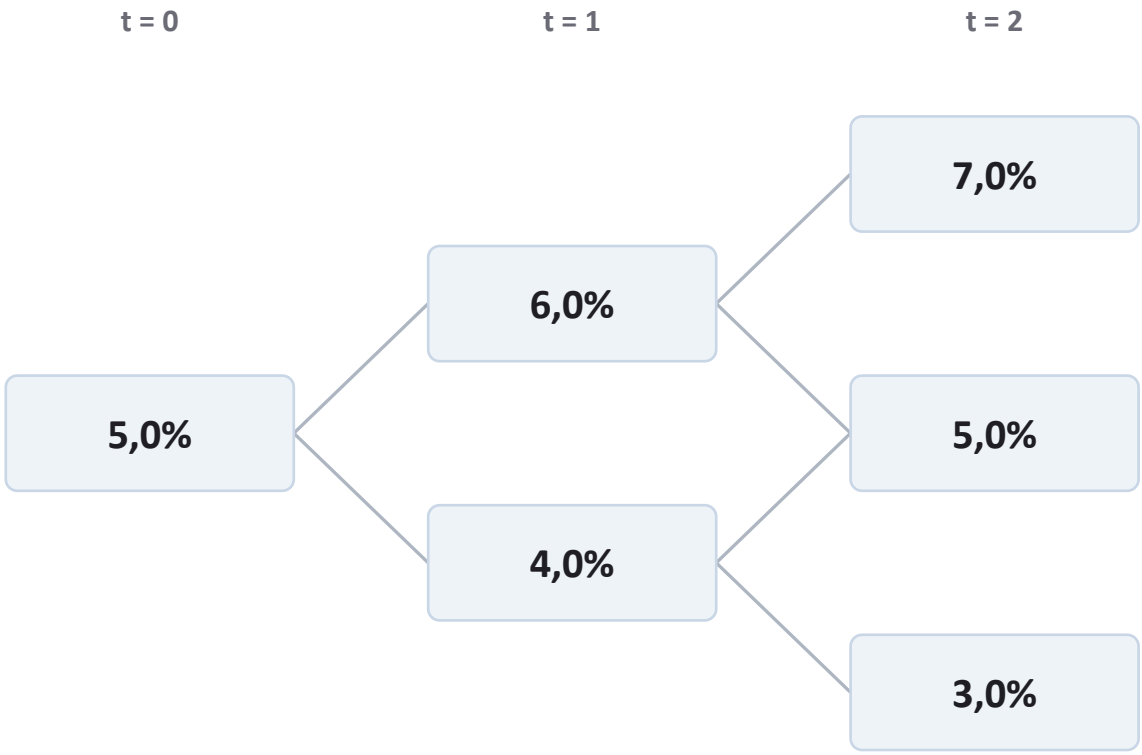
Το ομόλογο και το δέντρο επιτοκίων

Ομόλογο με δικαίωμα ανάκλησης (callable)

- Τριετές, κουπόνι **6%** ετήσιο, ονομαστική αξία 100.
- Ο εκδότης μπορεί να το **ανακαλέσει** (εξοφλήσει πρόωρα) στο **100** στα έτη 1 και 2, αμέσως μετά την πληρωμή κουπονιού.
- Ο εκδότης ανακαλεί όταν τα επιτόκια **πέσουν**: αναχρηματοδοτείται φθηνότερα.

Το δέντρο

- Ετήσιο βραχυχρόνιο επιτόκιο, ανεβαίνει ή πέφτει κατά 1 μονάδα κάθε έτος.
- Πιθανότητες ουδέτερου κινδύνου **½ – ½** (το δέντρο έχει βαθμονομηθεί υπό Q).
- Τιμή σε κάθε κόμβο = αναμενόμενη (υπό Q) αξία την επόμενη περίοδο, προεξοφλημένη με το επιτόκιο του κόμβου.



Βραχυχρόνιο επιτόκιο r(i, j) ανά κόμβο

Ο αλγόριθμος της αναδρομικής τιμολόγησης

1 **Ξεκινάμε από τη λήξη (t = 3)**

Σε κάθε τελικό κόμβο ο επενδυτής εισπράττει ονομαστική αξία + τελευταίο κουπόνι: 100 + 6 = **106**. Η αξία δεν εξαρτάται από το επιτόκιο.

2 **Πηγαίνουμε μία περίοδο πίσω**

Σε κάθε κόμβο (i, j) υπολογίζουμε τι θα εισπράξει ο κάτοχος την επόμενη περίοδο σε καθέναν από τους δύο επόμενους κόμβους: **αξία ομολόγου εκεί + κουπόνι 6**.

3 **Παίρνουμε την αναμενόμενη τιμή υπό Q**

Με πιθανότητες ½ – ½: **½·(V_πάνω + 6) + ½·(V_κάτω + 6)**.

4 **Προεξοφλούμε με το επιτόκιο του κόμβου**

Διαιρούμε με **1 + r(i, j)**, δηλαδή με το βραχυχρόνιο επιτόκιο που ισχύει στον συγκεκριμένο κόμβο (όχι με ένα ενιαίο επιτόκιο).

5 **Ελέγχουμε το δικαίωμα ανάκλησης**

Μόνο για το callable: στα t = 1, 2 ο εκδότης συγκρίνει την **αξία συνέχισης** με την **τιμή ανάκλησης 100** και επιλέγει το **μικρότερο**: αν η αξία συνέχισης > 100, ανακαλεί.

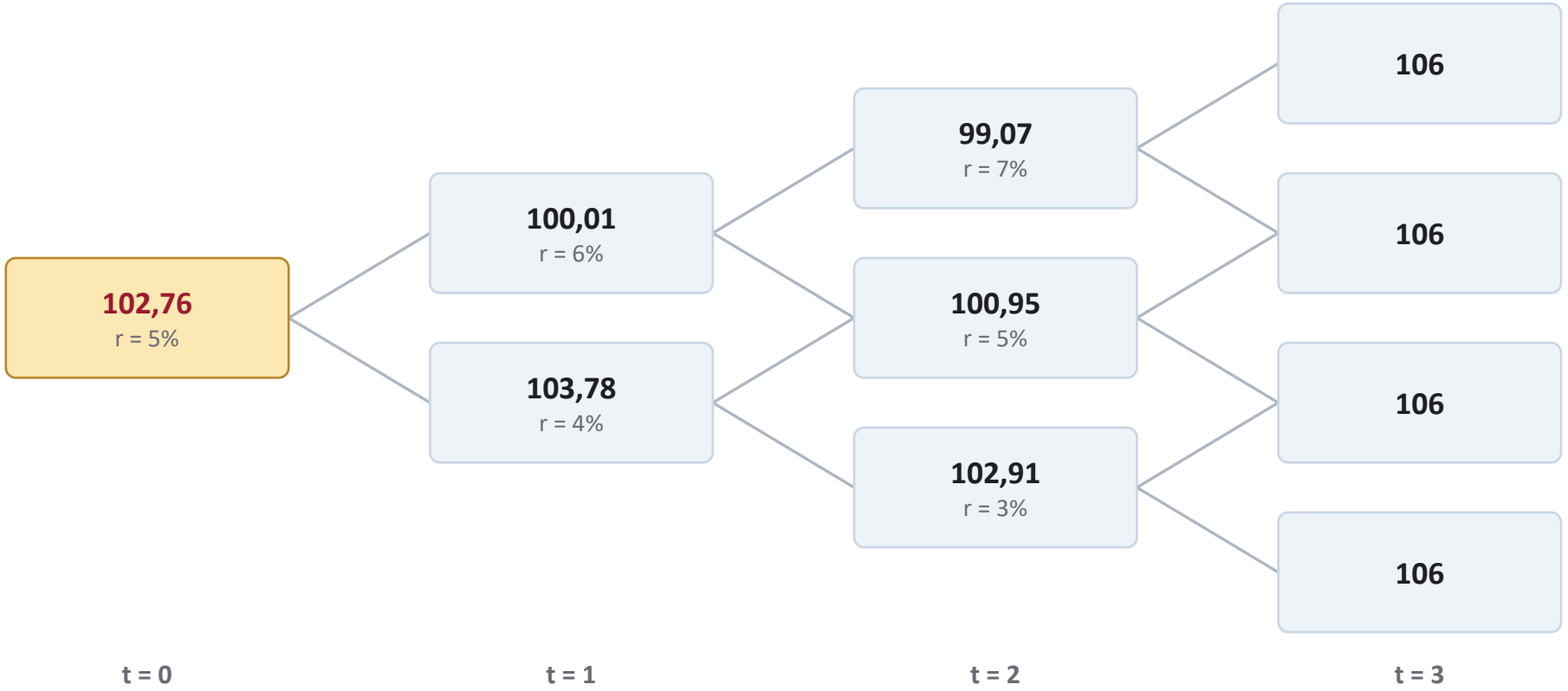
6 **Επαναλαμβάνουμε μέχρι το t = 0**

Η τιμή στον αρχικό κόμβο είναι η σημερινή τιμή του ομολόγου.

Βήμα 1: το απλό ομόλογο (χωρίς δικαίωμα) με αναδρομή

$$V_{i,j} = \frac{0{,}5\,(V_{i+1,j} + C) + 0{,}5\,(V_{i+1,j+1} + C)}{1 + r_{i,j}}$$

Οι τιμές στα t = 0, 1, 2 είναι **χωρίς το κουπόνι** του κόμβου (ex-coupon). Στη λήξη (t = 3) πληρώνεται 100 + 6 = 106.



Παράδειγμα

Κόμβος (1, πάνω):

[½(99,07 + 6) + ½(100,95 + 6)] / 1,06

= **100,01**

Αναλυτικοί υπολογισμοί: απλό ομόλογο (χωρίς δικαίωμα)

Κόμβος	r	Τι εισπράττει την επόμενη περίοδο (πάνω / κάτω)	Αναμενόμενη τιμή υπό Q	Προεξόφληση	Τιμή
t=2, πάνω-πάνω	7%	106 / 106	½·106 + ½·106 = 106,000	106,000 / 1,07	**99,065**
t=2, μέση	5%	106 / 106	106,000	106,000 / 1,05	**100,952**
t=2, κάτω-κάτω	3%	106 / 106	106,000	106,000 / 1,03	**102,913**
t=1, πάνω	6%	99,065 + 6 = 105,065 / 100,952 + 6 = 106,952	½·105,065 + ½·106,952 = 106,009	106,009 / 1,06	**100,008**
t=1, κάτω	4%	100,952 + 6 = 106,952 / 102,913 + 6 = 108,913	½·106,952 + ½·108,913 = 107,933	107,933 / 1,04	**103,781**
t=0	5%	100,008 + 6 = 106,008 / 103,781 + 6 = 109,781	½·106,008 + ½·109,781 = 107,894	107,894 / 1,05	**102,757**

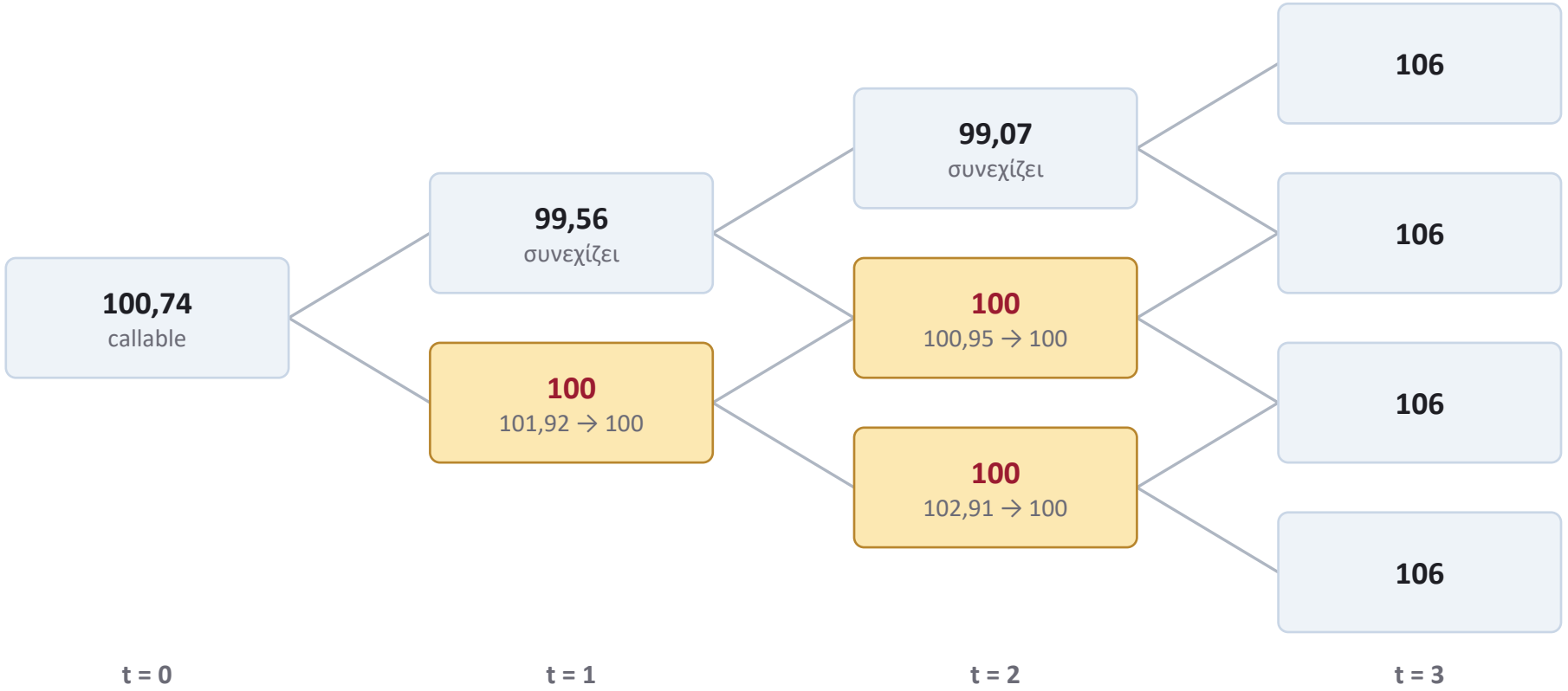
Στο t = 2 οι δύο επόμενοι κόμβοι δίνουν και οι δύο 106, άρα η αβεβαιότητα αφορά μόνο το **επιτόκιο προεξόφλησης**. Όσο χαμηλότερο το r του κόμβου, τόσο υψηλότερη η τιμή: γι' αυτό οι κάτω κόμβοι έχουν τιμές πάνω από 100.

Τιμές χωρίς το κουπόνι του κόμβου (ex-coupon), τρία δεκαδικά. Πιθανότητες ουδέτερου κινδύνου ½.

Βήμα 2: το ομόλογο με δικαίωμα ανάκλησης

$$V_{i,j} = \min\left\{K,\ \frac{0{,}5\,(V_{i+1,j} + C) + 0{,}5\,(V_{i+1,j+1} + C)}{1 + r_{i,j}}\right\}$$

Σε κάθε κόμβο ανάκλησης ο εκδότης πληρώνει **min(αξία συνέχισης, 100)**. Κίτρινο = ανάκληση.



Αποτέλεσμα

Απλό: **102,76**

Callable: **100,74**

Αξία δικαιώματος ανάκλησης: **2,01**

Αναλυτικοί υπολογισμοί: ομόλογο με δικαίωμα ανάκλησης

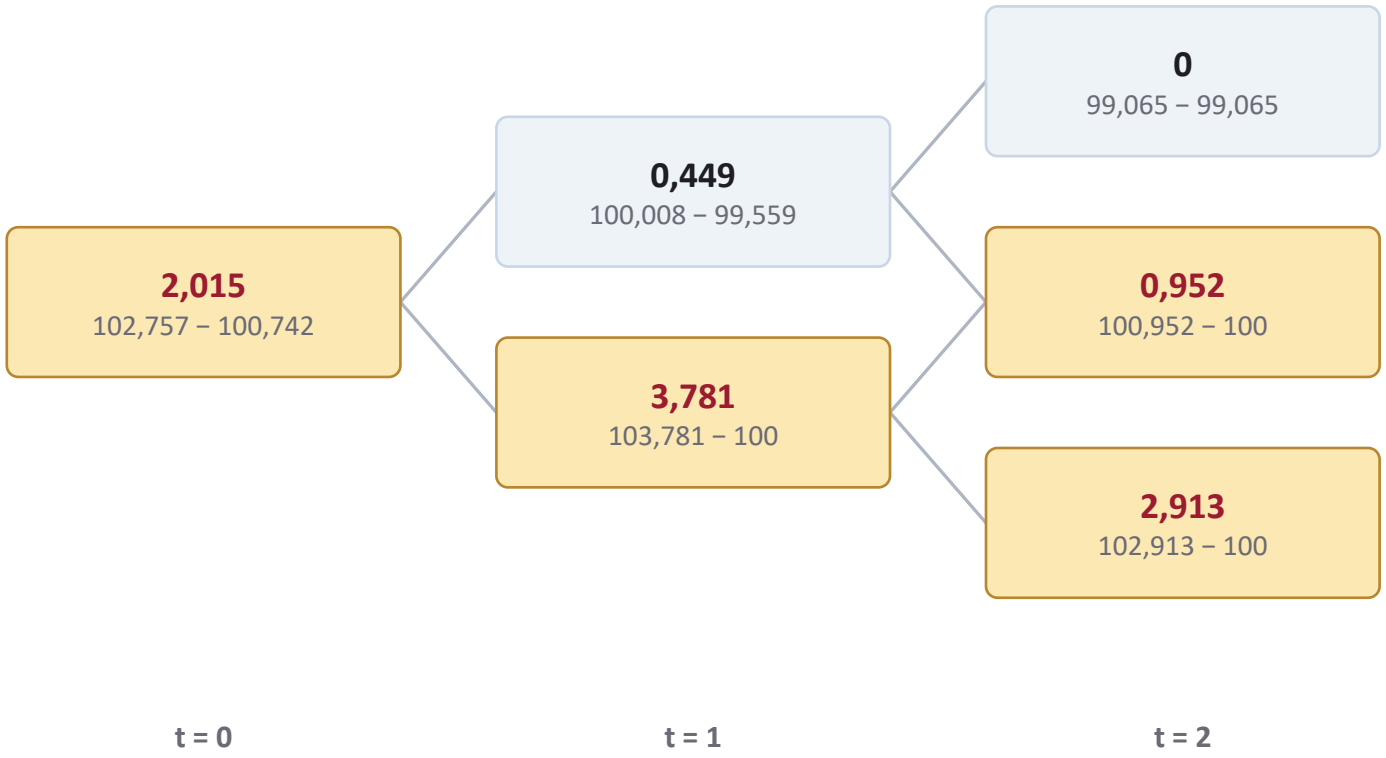
Κόμβος	r	Αξία συνέχισης	Σύγκριση με 100	Απόφαση εκδότη	Τιμή κόμβου
t=2, πάνω-πάνω	7%	106 / 1,07 = 99,065	99,065 < 100	Δεν ανακαλεί	**99,065**
t=2, μέση	5%	106 / 1,05 = 100,952	100,952 > 100	**Ανακαλεί στο 100**	**100,000**
t=2, κάτω-κάτω	3%	106 / 1,03 = 102,913	102,913 > 100	**Ανακαλεί στο 100**	**100,000**
t=1, πάνω	6%	[½·(99,065 + 6) + ½·(100 + 6)] / 1,06 = 105,533 / 1,06 = 99,559	99,559 < 100	Δεν ανακαλεί	**99,559**
t=1, κάτω	4%	[½·(100 + 6) + ½·(100 + 6)] / 1,04 = 106 / 1,04 = 101,923	101,923 > 100	**Ανακαλεί στο 100**	**100,000**
t=0	5%	[½·(99,559 + 6) + ½·(100 + 6)] / 1,05 = 105,779 / 1,05	δεν ανακαλείται στο t = 0	–	**100,742**

Προσοχή στη σειρά: οι τιμές του t = 1 υπολογίζονται με τις **ήδη περικομμένες** τιμές του t = 2 (100 αντί για 100,952 και 102,913). Έτσι η επίδραση της ανάκλησης «ταξιδεύει» προς τα πίσω στο δέντρο. Κίτρινο = κόμβοι όπου ασκείται η ανάκληση.

Τιμή ανάκλησης K = 100, ασκείται στα t = 1, 2 αμέσως μετά την πληρωμή του κουπονιού.

Η αξία του δικαιώματος ανάκλησης σε κάθε κόμβο

Αξία δικαιώματος = τιμή απλού ομολόγου − τιμή callable, σε κάθε κόμβο:



Παρατηρήσεις

- Το δικαίωμα αξίζει περισσότερο στους **κάτω κόμβους** (χαμηλά επιτόκια), όπου ο εκδότης κερδίζει από την πρόωρη εξόφληση.
- Στον πάνω κόμβο του t = 1 το δικαίωμα δεν ασκείται αμέσως, αλλά έχει αξία 0,449, επειδή μπορεί να ασκηθεί στο t = 2 αν πέσουν τα επιτόκια.
- **Έλεγχος:** ½·(0,449 + 3,781) / 1,05 = 2,014 ≈ 2,015 (στρογγυλοποίηση). Το δικαίωμα τιμολογείται με τον ίδιο κανόνα αναδρομής.

Ερμηνεία: το δικαίωμα ανάκλησης ανήκει στον εκδότη

$$P_{callable} = P_{straight} - \text{Call} \quad \Rightarrow \quad \text{Call} = 102{,}76 - 100{,}74 = 2{,}01$$

Ποιος κερδίζει

Ο εκδότης κατέχει ένα **δικαίωμα αγοράς (call)** επί του ομολόγου. Ο επενδυτής το έχει «πουλήσει», άρα πληρώνει λιγότερα: 100,74 αντί 102,76.

Πότε ασκείται

Όταν τα επιτόκια **πέφτουν** (κάτω κόμβοι): η αξία του ομολόγου θα ξεπερνούσε το 100, οπότε ο εκδότης το εξοφλεί και αναχρηματοδοτείται φθηνότερα.

Αρνητική κυρτότητα

Η τιμή του callable **δεν ανεβαίνει πολύ πάνω από το 100** όταν πέφτουν τα επιτόκια: ο επενδυτής χάνει το μεγαλύτερο μέρος του κέρδους από την πτώση.

Γενίκευση: το ίδιο δέντρο τιμολογεί ομόλογα με δικαίωμα πώλησης (puttable: max αντί για min), δικαιώματα επί ομολόγων και caps. Στην πράξη το δέντρο βαθμονομείται ώστε να αναπαράγει την τρέχουσα καμπύλη (π.χ. Ho–Lee, Black–Derman–Toy, Hull–White).