

Λογικομαθηματικές σχέσεις και αριθμητικές έννοιες στην προσχολική εκπαίδευση (504)

Μάθημα 7^ο

Τμήμα Επιστημών Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία, ΕΚΠΑ

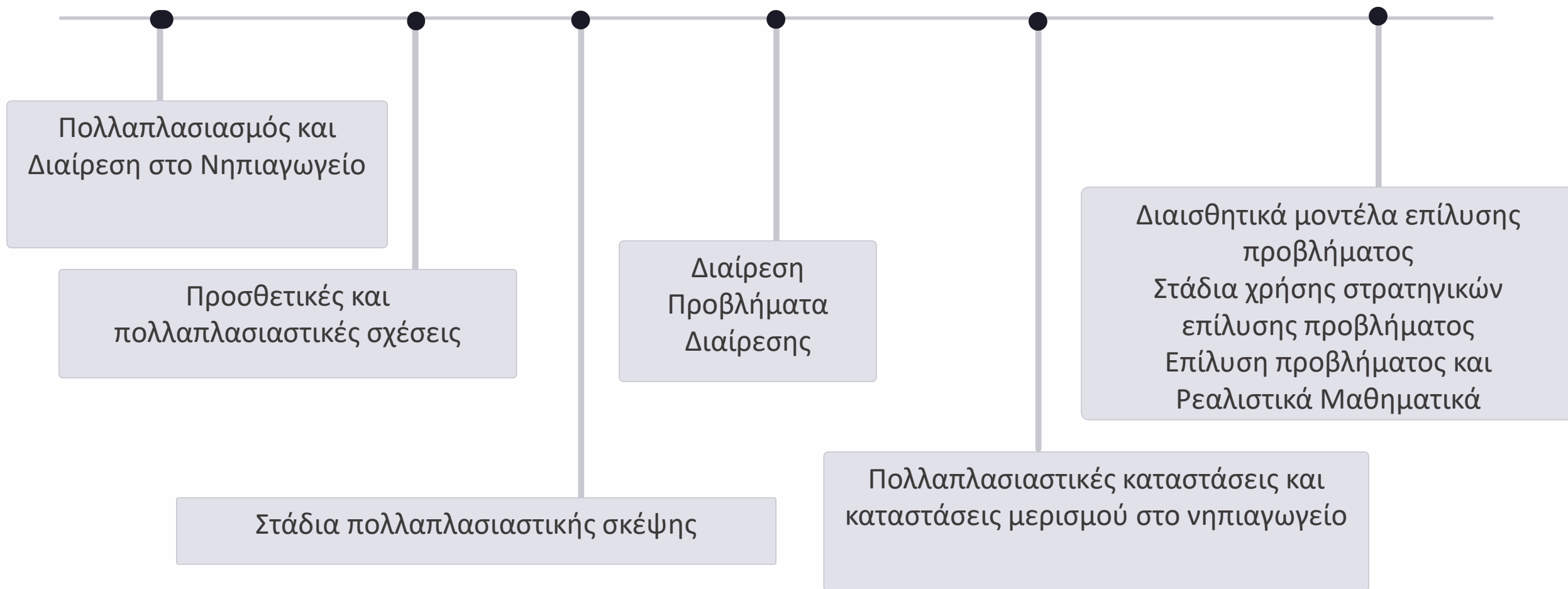
Εξάμηνο: γ'

Διδάσκουσα: Χριστίνα Γκρέκα

Αθήνα, 2025



Σήμερα...



Πολλαπλασιασμός και διαίρεση

Πολλαπλασιασμός

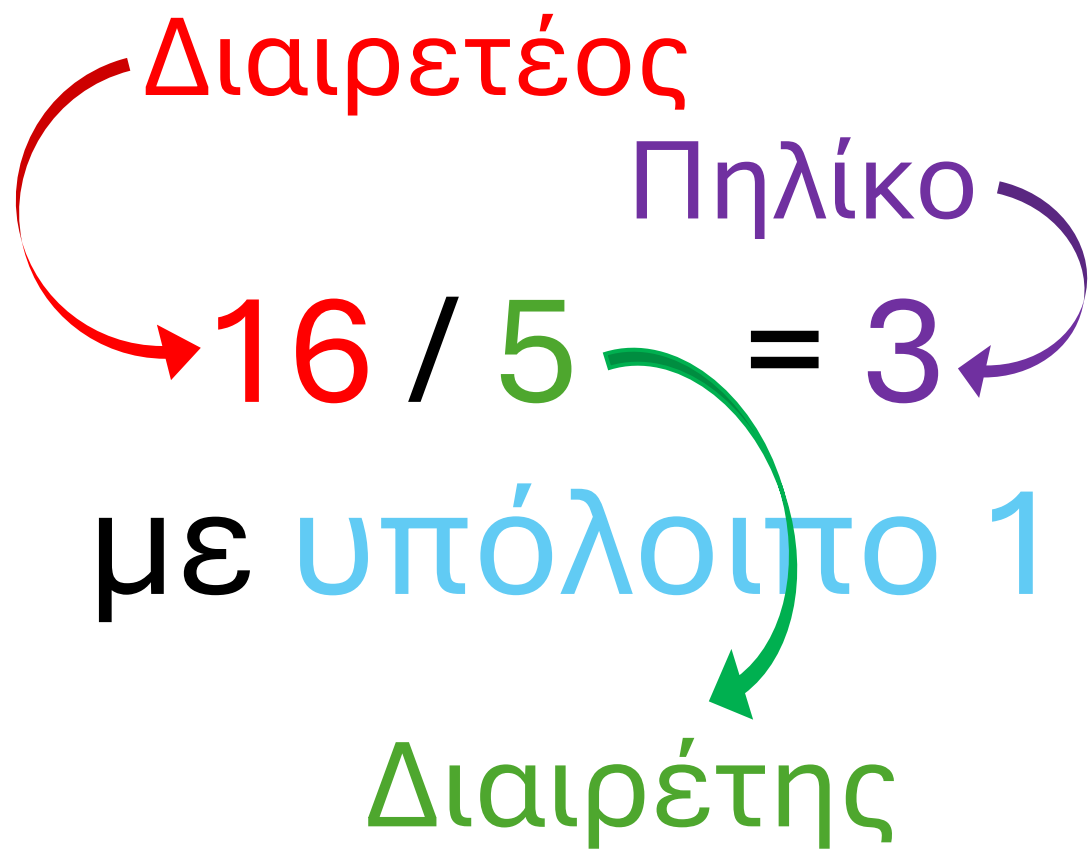
$$\underbrace{3 \times 5}_{\text{παράγοντες}} = 15$$

↓
γινόμενο

Το γινόμενο είναι **πολλαπλάσιο** των παραγόντων

Οι παράγοντες είναι **διαιρέτες** του γινομένου

Διαίρεση



Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού

- **Αντιμεταθετική**
 - $a \times b = b \times a$
- **Προσεταιριστική ιδιότητα**
 - $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- **Επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση**
 - $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
- **Ουδέτερο στοιχείο**
 - $a \times 1 = a$ και $1 \times a = a$
- **Απορροφητικό στοιχείο (μηδέν)**
 - $a \times 0 = 0$
- **Ιδιότητα του αντίθετου αριθμού**
 - $(+a) \times (-b) = -(a \times b)$ και $(-a) \times (-b) = +(a \times b)$

Ιδιότητες της διαίρεσης

- **Μη αντιμεταθετική**
 - $a \div b \neq b \div a$
- **Μη προσεταιριστική**
 - $(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$
- **Αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού**
 - $a \div b = c \iff c \times b = a$
- **Διαίρεση με το 1 (ουδέτερο στοιχείο στη διαίρεση)**
 - $a \div 1 = a$
- **Διαίρεση ενός αριθμού με τον εαυτό του**
 - $a \div a = 1$
- **Δεν επιτρέπεται διαίρεση με το 0**
 - $a \div 0$ δεν έχει νόημα
- **Διαίρεση του 0**
 - $0 \div a = 0$
- **Ιδιότητα μεγεθών σε πολλαπλάσια**
 - $\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b}$

Στο νηπιαγωγείο

- Τα παιδιά καλούνται να αναλύσουν **προσθετικά** διακριτές ποσότητες χρησιμοποιώντας αναπαραστατικό υλικό
 - Πχ. βρίσκουν διαφορετικούς τρόπους για να χωρίσουν 6 κύβους, μπίλιες ή άλλα αντικείμενα σε δυο ομάδες
- Από αυτές τις «**προσθετικές καταστάσεις**» μεταβαίνουν στην ανάπτυξη **πολλαπλασιαστικής σκέψης**, μέσω ενεργειών όπως:
 - **ο ισομερισμός,**
 - Δεν μοιράζω απλά, αλλά μοιράζω σε ίσα μέρη
 - **η αντιστοιχία ένα-πολλά και**
 - Η επανάληψη της μονάδας (που είναι μονάδα μονάδων)
 - **η κατασκευή και επανάληψη σύνθετης μονάδας («πολλά ως ένα»)**
 - Από το σύνολο προκύπτουν άλλα (ίσα) σύνολα
 - Αν τα σύνολα προστεθούν, προκύπτει το αρχικό σύνολο

Από τις προσθετικές στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις

- Συνδέονται με τις ενέργειες της **ανάλυσης και σύνθεσης** και αναδεικνύονται σε καταστάσεις προβλημάτων προσθετικής ή πολλαπλασιαστικής δομής
 - Προσθετική ανάλυση/σύνθεση → οποιαδήποτε ανάλυση/σύνθεση της ποσότητας σε/από μέρη, όχι απαραίτητα ίσα
 - Πολλαπλασιαστική ανάλυση/σύνθεση → είναι ειδική περίπτωση της προσθετικής

The diagram shows the equation $25 + 13 = 20 + 3 + 10 + 3$ using colored circles. On the left, two blue circles contain the numbers 25 and 13, followed by a pink plus sign. In the middle is a pink equals sign. On the right, there are four circles: a purple circle with 20, a green circle with 3, a purple circle with 10, and a green circle with 3, connected by pink plus signs.

Number talk

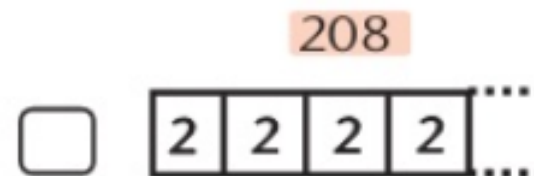
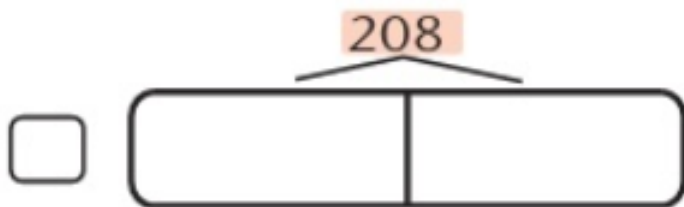
(ανάλυση και σύνθεση)

<https://www.insidemathematics.org/classroom-videos/public-lessons/4th-grade-number-operations-multiplication-division/problem-3-4th-grade-number-ops-part-a>

α) Στο σχολικό πρωτάθλημα σκακιού δήλωσαν συμμετοχή 208 παιδιά. Τα ζευγάρια της α' φάσης καθορίστηκαν με κλήρωση. Πόσα ζευγάρια σχηματίστηκαν;



β)  Παρατηρούμε τα παρακάτω σχέδια. Επιλέγουμε με ✓ ποιο από τα δύο ταιριάζει στο παραπάνω **πρόβλημα**.



2) Σε κάποια φάση του παιχνιδιού η Στέλλα είχε 2.999 πόντους, δηλαδή **περίπου** πόντους. Απάντησε σε μία δύσκολη ερώτηση που τριπλασιάζει τους πόντους του παίκτη. Πόσους **περίπου** πόντους έχει τώρα η Στέλλα; Εκτιμώ:



Για να υπολογίσω ακριβώς τους πόντους της Στέλλας, ξεκινώ βρίσκοντας το τριπλάσιο του 3.000.

$$3.000 + 3.000 + 3.000$$

+1

+1

+1

Έχω υπολογίσει 1 πόντο παραπάνω για κάθε 3.000 πόντους. Δηλαδή, θα αφαιρέσω 3 πόντους στο τέλος.

• Συμπληρώνουμε : $2.999 \times 3 = (3.000 - 1) \times 3 =$
 $= (3.000 \times 3) - (1 \times 3) =$
 $= \dots\dots\dots - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

Μικροπείραμα

Μικροπείραμα

Συμπέρασμα

Όταν κάνουμε πράξεις, μπορούμε να **εκτιμήσουμε** γρήγορα το αποτέλεσμα **αντικαθιστώντας** τους αριθμούς με κοντινούς "στρογγυλούς" αριθμούς. Όσο **πιο κοντά** είναι οι "στρογγυλοί" στους αρχικούς αριθμούς τόσο **μεγαλύτερη ακρίβεια** εξασφαλίζουμε στις εκτιμήσεις μας.

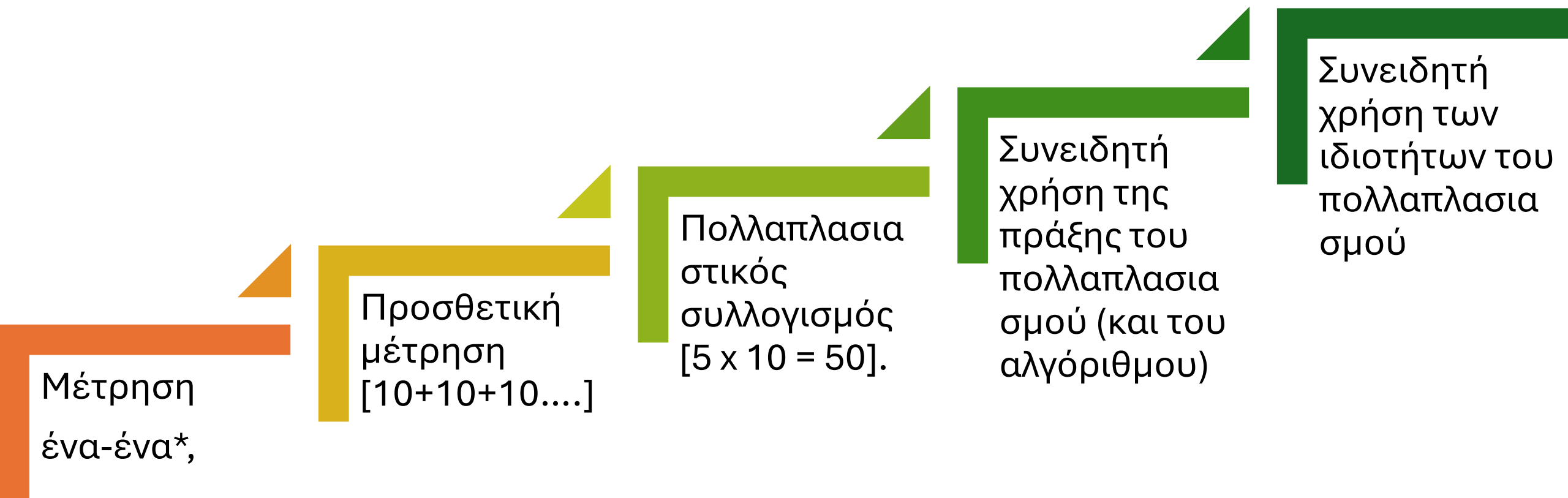
Number talk

(στάδια πολλαπλασιαστικής σκέψης)

<https://www.insidemathematics.org/classroom-videos/public-lessons/4th-grade-number-operations-multiplication-division/problem-1-4th-grade-number-ops-part-a>

Πέντε στάδια πολλαπλασιαστικής σκέψης

(Jacob & Willis, 2003)



Πολλαπλασιαστικές καταστάσεις και καταστάσεις μερισμού στο νηπιαγωγείο

1. Απλή μορφή:

- δοκιμάζουν να εντοπίσουν **πόσες ομάδες** θα δημιουργηθούν αν ομαδοποιήσουν αντικείμενα ή εικονιστικό υλικό σε **δυάδες, τριάδες, τετράδες και πεντάδες**

Οι δύο αριθμοί έχουν διαφορετική σημασία:

Πχ. 3 φορές τα 2 μολύβια;

- 3 → **τελεστής κλίμακας**, ενεργεί πάνω στην ποσότητα, μετασχηματίζοντας τη

Το 3 δεν μετράει κάποιο μέγεθος
(αναφέρεται στις φορές)

Πολλαπλασιαστικές καταστάσεις και καταστάσεις μερισμού στο νηπιαγωγείο

2. Μορφή βασισμένη στην αναλογία

- γνωρίζοντας τον αριθμό των ομάδων και το πλήθος των αντικειμένων που περιέχουν, δοκιμάζουν να βρουν **πόσα είναι όλα μαζί**

Πχ. Κάθε παιδί έχει 2 μολύβια, πόσα μολύβια έχουν και τα τρία παιδιά;

Το 3 αντιστοιχεί σε κάποια ποσότητα



Συμμεταβολή ποσοτήτων

Προβλήματα **συμμεταβολής** ποσοτήτων είναι και τα προβλήματα υπολογισμού επιφανειών

Number talk

(the groups are equal)

<https://www.insidemathematics.org/classroom-videos/public-lessons/4th-grade-number-operations-multiplication-division/problem-1-4th-grade-number-ops-part-b>

Πολλαπλασιαστικές καταστάσεις και καταστάσεις μερισμού στο νηπιαγωγείο

3. Αντιστοιχία

- καλούνται να βρουν τρόπους να μοιράσουν κάποιο διακριτό χειριστικό ή αναπαραστατικό υλικό στα δύο ή στα τρία κοκ και να βρουν **πόσα έχει ο καθένας**

Πχ. Έχουμε 10 μολύβια και 5 παιδιά, πόσα μολύβια θα πάρει το κάθε παιδί;

*Αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό

- Τα προβλήματα που αναφέρονται σε επαναληπτικές προσθέσεις ίσων ποσοτήτων δεν επιτρέπουν αντιμεταθέσεις
 - Ασυμμετρικά προβλήματα ίσων συνόλων
- Τα προβλήματα συνδυασμού μεγεθών ή ποσοτήτων επιτρέπουν αντιθετικούς χειρισμούς
 - Συμμετρικά προβλήματα

Λεκτικές εκφράσεις για τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις

- Εξοικείωση των παιδιών **με λεκτικά εργαλεία** σχετικά με το πολλαπλασιασμό: (Οι εκπαιδευτικοί)

«δυάδες» και «τριάδες»



Παράδειγμα “μισό» και «διπλάσιο”



Δυσκολίες στον πολλαπλασιασμό

- Η **μηχανιστική απομνημόνευση** της προπαίδειας
 - μη κατανόηση της έννοιας του πολλαπλασιασμού και του τι αντιπροσωπεύει (Λεμονίδης, 2003)
 - αποκλειστικής χρήσης της διαδικαστικής γνώσης
- **απώλεια ενδιαφέροντος** για τα μαθηματικά (Roslan, 2004)
 - έμφαση στην ενεργό συμμετοχή των μαθητών/τριών
- Το **μηδέν** αποτελεί πηγή δυσκολιών
 - μεταφράζεται ως το «τίποτα», επομένως, στον πολλαπλασιασμό ενός αριθμού με το μηδέν πολλοί και πολλές θα δώσουν ως απάντηση τον ίδιο τον αριθμό, δηλαδή δεν θα μεταβληθεί η αξία του με τη συγκεκριμένη πράξη (Sadi (2007)

Number talk

<https://www.insidemathematics.org/classroom-videos/public-lessons/4th-grade-number-operations-multiplication-division/problem-2-4th-grade-number-ops-part-a>

Number talk

(η σχέση της διαίρεσης με τον πολλαπλασιασμό)

<https://www.insidemathematics.org/classroom-videos/public-lessons/4th-grade-number-operations-multiplication-division/problem-2-4th-grade-number-ops-part-b>

Αν αυξήσεις έναν αριθμό κατά 20% και μετά τον
μειώσεις κατά 20%, παραμένει ο ίδιος;
Γιατί ή γιατί όχι;

Διαίρεση

- Απαιτεί **την αντίληψη του όλου**, του αριθμού των μερών και της ποσότητας που αντιστοιχεί στο καθένα
- «μοιράζω ένα-ένα» → δεν οδηγεί στο διαιρώ, δε διευκολύνει τα παραπάνω
 - Τα παιδιά 4 ετών είναι δε θέση να μοιράζουν δίκαια αντικείμενα σε περισσότερους από δύο αποδέκτες
- Η κατανόηση της διαίρεσης απαιτεί την κατανόηση της σχέσης της με τον πολλαπλασιασμό
 - πρέπει να διδάσκονται μαζί, η διαίρεση ως αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού

Προβλήματα διαίρεσης

- **Διαίρεση μερισμού**

- *Πόσα παίρνει ο καθένας;*
Μοιράζω μια ποσότητα σε **ίσες ομάδες**, αλλά **ξέρω πόσα άτομα** μοιράζονται το σύνολο.
 - Η Μαρία έχει **12 μήλα** και θέλει να τα μοιράσει σε **3 φίλους**.
Πόσα μήλα θα πάρει ο κάθε φίλος;

- **Διαίρεση μέτρησης**

- *Πόσες φορές χωράει;*
Ξέρω το **μέγεθος της κάθε ομάδας** και θέλω να μάθω **πόσες τέτοιες ομάδες** χωρούν στο σύνολο.
- Η Άννα έχει **12 μπισκότα** και θέλει να τα βάλει σε σακουλάκια, βάζοντας **4 μπισκότα σε κάθε σακουλάκι**.
Πόσα σακουλάκια θα χρειαστεί;

Προβλήματα διαίρεσης

- Δύο στρατηγικές για τα προβλήματα διαίρεσης
 - **Στρατηγική της επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης**
 - Ο Άλκης έχει 6 μολύβια, σε πόσα παιδιά μπορεί να δώσει από 2 μολύβια;
 - **Στρατηγική της διανομής**
 - Ο Άλκης έχει 6 μήλα και θέλει να τα μοιράσει σε 2 παιδιά. Πόσα μήλα θα πάρει το κάθε παιδί;
- Τα παιδιά ξεκινούν μοιράζοντας «ένα- ένα» ώστε να προκύψουν ίσα μερίδια
- Δεν κατανοούν ωστόσο πως η από τη διαδικασία αυτή προκύπτουν ομάδες ίδιου πλήθους
- Συνήθως για να το «ανακαλύψουν» μετρούν ξανά «πόσα έχουν δώσει στο κάθε παιδί/μέρος»

Επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης

- Η παρουσία **αντικειμένων** είναι υποστηρικτική (Kouba, 1989)
- Συχνά τα παιδιά 4-5 ετών βρίσκουν ευκολότερα τα προβλήματα διαίρεσης αντί αυτών του πολλαπλασιασμού
 - Κατανοούν την ομαδοποίηση αντικειμένων αλλά έχουν δυσκολίες στον πολλαπλασιαστικό συλλογισμό
- Συνδυάζουν την **άμεση ομαδοποίηση με την καταμέτρηση**, βασισμένα στις στρατηγικές που βασίζονται **στην πρόσθεση και την αφαίρεση** (Anghileri, 1989)

Διαισθητικά μοντέλα για την επίλυση προβλήματος

«διαισθητικά μοντέλα»

- Εσωτερικές νοητικές δομές που ανταποκρίνονται σε κατηγορίες στρατηγικών υπολογισμού.
- Δεν ταυτίζονται με τα «μοντέλα της κατάστασης» (semantic structures).
- Βασίζονται σε αυτό που το παιδί κάνει νοερά για να επιλύσει ένα πρόβλημα.
- Σχηματίζονται πριν από τη διδασκαλία και επηρεάζουν αργότερα την κατανόηση πιο σύνθετων προβλημάτων.

Διαισθητικά μοντέλα για τα προβλήματα του πολλαπλασιασμού

- **Άμεση καταμέτρηση (Direct counting)**
 - Υλικά ή εικόνα → μετράει ένα-ένα χωρίς αξιοποίηση ίσων ομάδων.
- **Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση (Repeated addition)**
 - Ρυθμική καταμέτρηση, skip counting, επαναλαμβανόμενες προσθέσεις.
- **Πολλαπλασιαστική πράξη (Multiplicative operation)**
 - Χρήση γνωστών ή παραγόμενων γινομένων.
 - Δεν δημιουργεί όλη τη σειρά των πολλαπλασίων — χρησιμοποιεί την πράξη ως ενιαία λειτουργία.

Διαισθητικά μοντέλα για τα προβλήματα της διαίρεσης

- **Άμεση καταμέτρηση (Direct counting)**

- Διαμοιρασμός, «μοίρασμα» ή μέτρηση ομάδων χωρίς χρήση πολλαπλασίων.

- **Επαναλαμβανόμενη αφαίρεση (Repeated subtraction)**

- Αφαιρεί σταθερά την ποσότητα της ομάδας μέχρι να μη μείνει τίποτα.

- **Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση (Repeated addition / building up)**

- Δημιουργεί αυξανόμενα πολλαπλάσια μέχρι να φτάσει στο ζητούμενο.

- **Πολλαπλασιαστική πράξη (Multiplicative operation)**

- Εύρεση γινομένου που «ταιριάζει» στον διαιρετέο· χρήση γνωστών/παραγόμενων γινομένων

Οι κασετίνες

Στόχοι

- Ανάδειξη και ενίσχυση των άτυπων στρατηγικών των παιδιών.
- Μετάβαση από **άμεση καταμέτρηση** → **επαναλαμβανόμενη πρόσθεση**.
- Εστίαση στον εντοπισμό **ίσων ομάδων** (equal groups).

Υλικά

- Μικρά κουτιά ή παλιές κασετίνες
 - Μολύβια
- Κάρτες με αριθμούς (π.χ. 2, 3, 4, 5)



Οι κασετίνες

Δραστηριότητα

- **1^η φάση (καταμέτρηση):** Δίνεις στα παιδιά: 3 κασετίνες, 6 μολύβια. «Θέλουμε να μοιράσουμε τα αντικείμενα στις κασετίνες με δίκαιο τρόπο»
 - Αφήνουμε τα παιδιά να αναπτύξουν και να εκφράσουν διαισθητικά μοντέλα
 - Ερωτήσεις καθοδήγησης:
 - Πόσα μολύβια έβαλες σε κάθε κασετίνα;
 - Πόσα μολύβια χρειάστηκες;
- **2^η φάση (επαναλαμβανόμενη πρόσθεση):** «Έχουμε τέσσερις κασετίνες και σε κάθε μία βάζουμε 3 μολύβια, πόσα μολύβια χρειαζόμαστε»
 - Ενθαρρύνω τα παιδιά να τοποθετήσουν σε κάθε ομάδα την αντίστοιχη κάρτα με αριθμό
 - Στόχος: scir counting , το παιδί αρχίζει να σκέφτεται σε ομάδες «3 και άλλα 3 κάνουν 6... και άλλα 3 κάνουν 9...», όχι να καταμετρά μεμονωμένα αντικείμενα
- **3^η φάση (πολλαπλασιαστικός συλλογισμός):** «Έχουμε 5 κασετίνες και σε κάθε μία βάζουμε 2 μολύβια. Πόσα μολύβια χρειάζομαι;
 - Ενθαρρύνω το παιδί να μην μετρήσει
 - Δεν απαιτείται να πουν « 5×2 », αρκεί η νοητική σύλληψη της λειτουργίας, αρκεί να πουν 5 δυάδες

Διδακτικές προτάσεις για την πρώτη αρίθμηση και τη μάθηση για τις αριθμητικές πράξεις

- Κατασκευαστικές αριθμητικές δραστηριότητες με **συγκεκριμένο για τους μαθητές σκοπό**
- Δραστηριότητες που είναι **συνδεδεμένες με την πραγματική ζωή**
- Χρήση υποστηρικτικού **χειραπτικού και αναπαραστασιακού** υλικού που λειτουργούν ως ενδιάμεσοι παράγοντες για να υποστηρίξουν την ανάπτυξη της έννοιας των μονάδων και να δημιουργήσουν «**αριθμοποιήσεις**»
- Στοχεύουν σε υψηλού επιπέδου **αφαιρετική διαδικασία και γενίκευση**
- Δημιουργούν **συνδέσεις ανάμεσα σε διαφορετικές μαθηματικές ενότητες** και εφαρμογές

Ο πολλαπλασιασμός και η Διαίρεση στα ρεαλιστικά μαθηματικά

- Χρήση ρεαλιστικών καταστάσεων
- Λιγότερη έμφαση στους αλγόριθμους και περισσότερη στην άτυπη κατανόηση
- Ανάπτυξη του αλγόριθμου σε αρμονία με τον φυσικό τρόπο σκέψης των παιδιών σε τέσσερις φάσεις
 1. Προαλγοριθμική: τα παιδιά καλούνται να λύσουν προβλήματα με τον δικό τους τρόπο
 2. Αναγνώριση της σχέσης μεταξύ της αξίας θέσης και της επαναλαμβανομένης πρόσθεσης με βάση τον πολλαπλασιασμό του 10
 3. Πέρασμα από τον πολλαπλασιασμό του 10 στον πολλαπλασιασμό άλλων αριθμών
 4. Γενικευση της πολλαπλασιαστικής διαδικασίας
 5. Χρήση αλγόριθμων

Επίλυση προβλήματος στο νηπιαγωγείο με βάση τα Ρεαλιστικά μαθηματικά

Πολλαπλασιασμός

1. Γραμμικό επίπεδο
 1. Έχουμε 3 παιδιά, το κάθε παιδί έχει 2 πόδια, πόσα πόδια έχουν όλα τα παιδιά;
2. Ομαδικό επίπεδο
 1. Έχουμε τρία βάζα και σε κάθε βάζο βάζουμε 3 λουλούδια. Πόσα λουλούδια χρειαστήκαμε;
3. Συνδυαστικό επίπεδο (όπου εμπεριέχονται τα δύο παραπάνω)
 1. Έχουμε ένα τραπεζομάντιλο με δύο σειρές από τετράγωνα. Πόσα τετράγωνα είναι όλα μαζί;

Διαίρεση

1. Ακριβής πράξη
2. Όχι ακριβής πράξη
 1. Έχουμε 51 καρέκλες και θέλουμε να τις μοιράσουμε σε δύο δωμάτια. Πόσες καρέκλες θα βάλουμε σε κάθε δωμάτιο, ώστε τα δύο δωμάτια να έχουν ίσο αριθμό από καρέκλες;

Σύνοψη

- Πολλαπλασιασμός και Διαίρεση
- Προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης