

Ασκησιολόγιο για το 1^ο θέμα εξέτασης

Μάθημα «Λογικομαθηματικές σχέσεις και Αριθμητικές Έννοιες στην Προσχολική Εκπαίδευση»

Χειμερινό εξάμηνο, ακαδ. έτος 2025-2026

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται πλήθος n από τετράγωνες κάρτες, ίδιου μεγέθους. Οι κάρτες χρησιμοποιούνται για να καλύψουν μία τετραγωνική επιφάνεια, χωρίς να περισσέψει καμία.

(α) Να εκφράσετε με λόγια και με σύμβολα τη σχέση ανάμεσα στον αριθμό των καρτών (n) και στο μήκος της πλευράς του τετραγώνου που προκύπτει (a).

(β) Να εξετάσετε για ποιες τιμές του n είναι δυνατή η επικάλυψη μιας τετραγωνικής επιφάνειας.

(γ) Να εξηγήσετε γιατί για ορισμένες τιμές του n η επικάλυψη της επιφάνειας σε σχήμα τετραγώνου δεν είναι δυνατή.

Λύση

(α) Ένα τετράγωνο έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Άρα, για να σχηματιστεί ένα τετράγωνο οι κάρτες πρέπει να τοποθετηθούν σε **ίσο αριθμό σειρών και στηλών**. Έστω ότι λέμε αυτόν τον αριθμό a . Τότε:

- κάθε σειρά έχει a κάρτες,
- κάθε στήλη έχει a κάρτες.

Άρα, ο συνολικός αριθμός των καρτών που καλύπτουν την τετραγωνική επιφάνεια είναι: $n = a \cdot a = a^2$.

(β) Η επικάλυψη είναι δυνατή όταν ο αριθμός των καρτών στις σειρές είναι ίσος με τον αριθμό των καρτών στις στήλες. Με άλλα λόγια, το n πρέπει να μπορεί να γραφτεί ως **γινόμενο δύο ίσων φυσικών αριθμών**.

Ή αλλιώς: Η επικάλυψη είναι δυνατή μόνο όταν το n είναι τέλειο τετράγωνο. Παραδείγματα:

- Με 9 κάρτες μπορούμε να φτιάξουμε 3 σειρές με 3 κάρτες σε καθεμία.
- Με 16 κάρτες μπορούμε να φτιάξουμε 4 σειρές με 4 κάρτες σε καθεμία.

(γ) Αν ο αριθμός των καρτών είναι, για παράδειγμα, 6 μπορούμε να τις τοποθετήσουμε σε 2 σειρές των 3 καρτών ή σε 3 σειρές των 2 καρτών, όμως οι σειρές και οι στήλες **δεν έχουν τον ίδιο αριθμό**. Έτσι το σχήμα που προκύπτει είναι

ορθογώνιο και όχι τετράγωνο. Άρα, όταν ο αριθμός των καρτών **δεν επιτρέπει ίσο αριθμό σειρών και στηλών**, δεν μπορεί να σχηματιστεί τετράγωνη επιφάνεια.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνονται n καλαμάκια ίδιου μήκους ℓ . Τα καλαμάκια χρησιμοποιούνται για να σχηματίσουν κλειστά γεωμετρικά σχήματα.

(α) Να εκφράσετε με λόγια και με σύμβολα τη σχέση που συνδέει τον αριθμό των καλαμακιών n με την περίμετρο P του σχήματος.

(β) Να εξετάσετε για ποιες τιμές του n το σχήμα μπορεί να είναι:

- τετράγωνο,
- ορθογώνιο.

Λύση

(α) Κάθε καλαμάκι έχει μήκος ℓ . Όταν τα καλαμάκια τοποθετούνται στη σειρά και σχηματίζουν ένα κλειστό σχήμα, το άθροισμα των μηκών όλων των καλαμακιών ισούται με την περίμετρο του σχήματος. Αν χρησιμοποιούνται n καλαμάκια, τότε η περίμετρος του σχήματος είναι: $P = n \cdot \ell$.

(β) Για να σχηματιστεί τετράγωνο, το σχήμα πρέπει να έχει τέσσερις ίσες πλευρές. Επομένως, ο συνολικός αριθμός των καλαμακιών πρέπει να μοιράζεται ισομερώς στις τέσσερις πλευρές. Άρα, το σχήμα μπορεί να είναι τετράγωνο όταν ο αριθμός των καλαμακιών n είναι πολλαπλάσιο του 4. Παράδειγμα: Αν $n = 12$, τότε χρησιμοποιούνται 3 καλαμάκια σε κάθε πλευρά και σχηματίζεται τετράγωνο.

Για να σχηματιστεί ορθογώνιο, οι απέναντι πλευρές είναι ίσες ανά δύο, αλλά δεν είναι απαραίτητο όλες οι πλευρές να έχουν το ίδιο μήκος. Έστω ότι το μήκος του ορθογωνίου αποτελείται από a καλαμάκια και το πλάτος από b καλαμάκια, με $a \neq b$. Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι: $P = 2(a + b)\ell$.

Επομένως, ο αριθμός των καλαμακιών πρέπει να είναι:

$$n = 2(a + b),$$

Παράδειγμα:

Αν $n = 14$, τότε: $14 = 2 \cdot 7 \Rightarrow a + b = 7$.

Η ανάλυση $7 = 3 + 4$ δίνει ορθογώνιο με δύο πλευρές μήκους 3 καλαμάκια και δύο πλευρές μήκους 4 καλαμάκια.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνονται α τουβλάκια που χρησιμοποιούνται για να καλυφθεί πλήρως μία επιφάνεια.

(α) Να εξετάσετε πότε η επιφάνεια μπορεί να είναι τετράγωνη.

(β) Να εξηγήσετε πώς η μεταβολή του αριθμού α επηρεάζει τη γεωμετρική μορφή.

Λύση

(α) Η επιφάνεια είναι τετράγωνη όταν ο αριθμός των γραμμών (γ) είναι ίσος με τον αριθμό των στηλών (σ). Δηλαδή: $\gamma = \sigma$

Τότε ο αριθμός των τουβλακίων γράφεται ως: $a = \sigma \cdot \sigma = \sigma^2$ ή $a = \gamma \cdot \gamma = \gamma^2$

Άρα, η επιφάνεια μπορεί να είναι τετράγωνη μόνο όταν ο αριθμός a μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο δύο **ίσων** φυσικών αριθμών (ή ως τετράγωνο ενός φυσικού αριθμού).

Παραδείγματα:

- $a = 9$: 3 γραμμές και 3 στήλες $\rightarrow$ τετράγωνη επιφάνεια
- $a = 12$: 3 γραμμές και 4 στήλες $\rightarrow$ ορθογώνια επιφάνεια

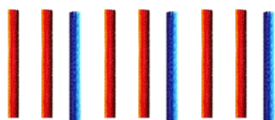
(β) Η γεωμετρική μορφή της επιφάνειας εξαρτάται από τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να αναλυθεί ο αριθμός a σε γινόμενο δύο φυσικών αριθμών. Ή αλλιώς η μορφή εξαρτάται από την ανάλυση του a σε γινόμενο φυσικών αριθμών.

Παράδειγμα:

- $a = 16$:
 - $1 \cdot 16 \rightarrow$ μακρόστενο ορθογώνιο
 - $2 \cdot 8 \rightarrow$ ορθογώνιο
 - $4 \cdot 4 \rightarrow$ τετράγωνο

ΑΣΚΗΣΗ 4

Ένα μοτίβο κατασκευάζεται με pipe cleaners ως εξής:



(α) Αν το μοτίβο επαναληφθεί 12 φορές:

- πόσα κόκκινα pipe cleaners (r) θα χρησιμοποιηθούν;
- πόσα μπλε pipe cleaners (b) θα χρησιμοποιηθούν;

Να αιτιολογήσετε με λόγια και σύμβολα την απάντησή σας.

(β) Θέλουμε να κατασκευάσουμε το ίδιο μοτίβο χρησιμοποιώντας 24 κόκκινα pipe cleaners.

- I. Πόσες επαναλήψεις του μοτίβου (n) μπορούν να κατασκευαστούν;
- II. Πόσα μπλε pipe cleaners (b) θα χρειαστούν;

(γ) Αν το μοτίβο επαναλαμβάνεται n φορές, να εκφράσετε:

- I. το πλήθος των κόκκινων pipe cleaners (r),
- II. και το πλήθος των μπλε pipe cleaners (b).

Λύση

(α)

- I. Κόκκινα pipe cleaners (r): Σε κάθε επανάληψη χρησιμοποιούνται 2 κόκκινα. Αφού το μοτίβο επαναλαμβάνεται 12 φορές, τα κόκκινα είναι 12 ομάδες των 2.

Με σύμβολα: $r = 12 \cdot 2 = 24$

Άρα θα χρησιμοποιηθούν 24 κόκκινα pipe cleaners.

- II. Μπλε pipe cleaners (b): Σε κάθε επανάληψη χρησιμοποιείται 1 μπλε. Άρα ο αριθμός των μπλε είναι ίσος με τον αριθμό των επαναλήψεων.

Με σύμβολα: $b = 12 \cdot 1 = 12$

Άρα θα χρησιμοποιηθούν 12 μπλε pipe cleaners.

(β)

- I. Κάθε επανάληψη χρειάζεται 2 κόκκινα. Με 24 κόκκινα μπορούμε να σχηματίσουμε ομάδες των 2. Ο αριθμός των επαναλήψεων προκύπτει αν χωρίσουμε τα κόκκινα ανά 2.

Με σύμβολα: $n = 24 : 2 = 12$

Άρα μπορούν να κατασκευαστούν 12 επαναλήψεις του μοτίβου.

- II. Κάθε επανάληψη απαιτεί 1 μπλε pipe cleaner.

Με σύμβολα: $b = 12 \cdot 1 = 12$

Άρα θα χρειαστούν 12 μπλε pipe cleaners.

(γ) Το μοτίβο επαναλαμβάνεται n φορές

- I. Πλήθος κόκκινων pipe cleaners (r): Σε κάθε επανάληψη χρησιμοποιούνται 2 κόκκινα. $r = 2 \cdot n$

- II. Πλήθος μπλε pipe cleaners (b): Σε κάθε επανάληψη χρησιμοποιείται 1 μπλε.
 $b = 1 \cdot n$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Μια διαδρομή έχει σταθερό μήκος L . Η ίδια διαδρομή μετريέται με δύο διαφορετικές μονάδες:

- καλαμάκια μήκους u
- καλαμάκια μήκους $\frac{u}{2}$

(α) Αν η διαδρομή έχει μήκος $L = 12u$, να προσδιορίσετε πόσα καλαμάκια μήκους $\frac{u}{2}$ απαιτούνται (N_1) για την κάλυψη της;

(β) Αν μια διαδρομή έχει μήκος (L) 12 καλαμάκια μήκους $\frac{u}{2}$, να υπολογίσετε πόσα καλαμάκια μήκους u θα απαιτούνταν (N_2) για την κάλυψη της;

Λύση

(α) Κάθε καλαμάκι έχει μήκος $\frac{u}{2}$. Ο αριθμός των καλαμακιών είναι: $12u : \frac{u}{2} = 12u \cdot \frac{2}{u} = 24$. Άρα απαιτούνται 24 καλαμάκια μήκους $u/2$.

(β) Δίνεται ότι η διαδρομή καλύπτεται από 12 καλαμάκια μήκους $\frac{u}{2}$. Το συνολικό μήκος της διαδρομής είναι: $L = 12 \cdot \frac{u}{2} = 6u$
Άρα απαιτούνται 6 καλαμάκια μήκους u .

ΑΣΚΗΣΗ 6

Δίνονται δύο είδη τουβλακιών LEGO:

- τουβλάκια μήκους μ
- τουβλάκια μήκους $\frac{\mu}{4}$

Θέλουμε να κατασκευάσουμε τετράγωνο με περίμετρο 4μ, στο οποίο:

- οι οριζόντιες πλευρές αποτελούνται από τουβλάκια μήκους μ ,
- οι κατακόρυφες πλευρές αποτελούνται από τουβλάκια μήκους $\frac{\mu}{4}$.

(α) Να περιγράψετε με λόγια πώς κατανέμονται τα δύο είδη τουβλακιών στις πλευρές του τετραγώνου αναφέροντας το πλήθος των τουβλακιών μήκους μ και το πλήθος των τουβλακιών μήκους $\frac{\mu}{4}$.

β) Να εκφράσετε την αλγεβρική σχέση που δίνει την περίμετρο του τετραγώνου:

Λύση

Ένα τετράγωνο έχει 4 πλευρές: 2 οριζόντιες και 2 κατακόρυφες.

Οριζόντιες πλευρές:

- Κάθε οριζόντια πλευρά έχει μήκος μ .
- Αποτελείται από 1 τουβλάκι μήκους μ .
- Υπάρχουν 2 τέτοιες πλευρές.

Άρα:

- 2 τουβλάκια μήκους μ .

Κατακόρυφες πλευρές

- Κάθε κατακόρυφη πλευρά έχει επίσης μήκος μ .
- Κάθε τουβλάκι έχει μήκος $\frac{\mu}{4}$.
- Για να σχηματιστεί πλευρά μήκους μ , χρειάζονται 4 τέτοια τουβλάκια.
- Υπάρχουν 2 κατακόρυφες πλευρές.

Άρα:

- $4 + 4 = 8$ τουβλάκια μήκους $\frac{\mu}{4}$.

Συνολικά:

- 2 τουβλάκια μήκους μ ,
- 8 τουβλάκια μήκους $\frac{\mu}{4}$.

(β) Η περίμετρος ισούται με το άθροισμα των μηκών όλων των πλευρών, δηλαδή με το άθροισμα των μηκών όλων των τουβλακιών που χρησιμοποιούνται.

Με σύμβολα: $P = 2 \cdot \mu + 8 \cdot \frac{\mu}{4} \rightarrow P = 2\mu + 2\mu \rightarrow P = 4\mu$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Δίνονται καλαμάκια δύο διαφορετικών μηκών:

- καλαμάκια μήκους θ ,
- καλαμάκια μήκους $\theta/2$.

Θέλουμε να κατασκευάσουμε τετράγωνο, στα οποία:

- οι κατακόρυφες πλευρές αποτελούνται από καλαμάκια μήκους θ ,
- οι οριζόντιες πλευρές αποτελούνται από καλαμάκια μήκους $\theta/2$.

Να κατασκευάσετε τετράγωνο με περίμετρο 8θ .

- (α) Πόσα καλαμάκια μήκους θ απαιτούνται;
(β) Πόσα καλαμάκια μήκους $\theta/2$ απαιτούνται;

Λύση

Σε ένα τετράγωνο όλες οι πλευρές έχουν το ίδιο μήκος. Αν η περίμετρος του τετραγώνου είναι 8θ , τότε το μήκος κάθε πλευράς είναι: $\frac{8\theta}{4} = 2\theta$.

(α) Κατακόρυφες πλευρές (καλαμάκια μήκους θ): Κάθε κατακόρυφη πλευρά έχει μήκος 2θ . Κάθε καλαμάκι έχει μήκος θ , επομένως σε κάθε κατακόρυφη πλευρά απαιτούνται: $2\theta : \theta = 2$ καλαμάκια.

Υπάρχουν 2 κατακόρυφες πλευρές, άρα συνολικά απαιτούνται: $2 \cdot 2 = 4$ καλαμάκια μήκους θ .

(β) Οριζόντιες πλευρές (καλαμάκια μήκους $\theta/2$): Κάθε οριζόντια πλευρά έχει μήκος 2θ . Κάθε καλαμάκι έχει μήκος $\theta/2$, επομένως σε κάθε οριζόντια πλευρά απαιτούνται: $2\theta : \frac{\theta}{2} = 4$ καλαμάκια. Υπάρχουν 2 οριζόντιες πλευρές, άρα συνολικά απαιτούνται: $2 \cdot 4 = 8$ καλαμάκια μήκους $\theta/2$.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Χρησιμοποιώντας καλαμάκια κατασκευάζουμε ένα μοτίβο από ισόπλευρα τρίγωνα ως εξής:

- στο 1ο βήμα κατασκευάζεται 1 τρίγωνο,
- στο 2ο βήμα κατασκευάζονται 2 τρίγωνα που μοιράζονται μία πλευρά,
- στο 3ο βήμα κατασκευάζονται 3 τρίγωνα με τον ίδιο τρόπο.

(α) Να περιγράψετε με λόγια το μοτίβο.

(β) Να εκφράσετε με σύμβολα τον αριθμό των καλαμακιών που απαιτούνται στο n -οστό βήμα.

Λύση

(α) Σε κάθε νέο βήμα προστίθεται ένα ισόπλευρο τρίγωνο που μοιράζεται μία πλευρά με το προηγούμενο. Έτσι, σε κάθε βήμα απαιτούνται 2 νέα καλαμάκια.

(β) Στο 1ο βήμα χρησιμοποιούνται 3 καλαμάκια.
Κάθε επόμενο βήμα προσθέτει 2 καλαμάκια.

Άρα:

- στο 2ο βήμα: $3 + 2$,
- στο 3ο βήμα: $3 + 2 + 2$,
- ...

- στο n -οστό βήμα: 3 καλαμάκια για το πρώτο τρίγωνο και 2 καλαμάκια για καθένα από τα επόμενα $n - 1$ τρίγωνα.

Αν N_n είναι ο αριθμός των καλαμακιών στο n -οστό βήμα, τότε:

$$N_n = 3 + 2(n - 1) = 2n + 1.$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Χρησιμοποιώντας καλαμάκια, δημιουργούμε ένα μοτίβο από τετράγωνα, ως εξής:

- στο 1ο βήμα: κατασκευάζεται 1 τετράγωνο,
- στο 2ο βήμα: κατασκευάζονται 2 τετράγωνα που μοιράζονται μία πλευρά,
- στο 3ο βήμα: κατασκευάζονται 3 τετράγωνα με τον ίδιο τρόπο,

(α) Να υπολογίσετε πόσα καλαμάκια απαιτούνται:

- στο 1ο βήμα,
- στο 2ο βήμα,
- στο 3ο βήμα.

β) Αν στο n -οστό βήμα κατασκευάζονται n τετράγωνα με τον ίδιο τρόπο, να εκφράσετε με λόγια και με σύμβολα τον αριθμό των καλαμακιών που απαιτούνται στο n -οστό βήμα.

Λύση

(α)

1ο βήμα → Το πρώτο τετράγωνο έχει 4 καλαμάκια. $N_1 = 4$

2ο βήμα

- Το δεύτερο τετράγωνο μοιράζεται μία πλευρά με το πρώτο, άρα χρειάζεται 3 επιπλέον καλαμάκια. $N_2 = 4 + 3 = 7$

3ο βήμα

- Κάθε νέο τετράγωνο μοιράζεται μία πλευρά με το προηγούμενο, άρα προσθέτει 3 νέα καλαμάκια. $N_3 = 7 + 3 = 10$

(β)

Με λόγια: Το πρώτο τετράγωνο απαιτεί 4 καλαμάκια. Κάθε επόμενο τετράγωνο μοιράζεται μία πλευρά, επομένως δεν χρειάζεται νέο καλαμάκι για αυτή την πλευρά, και προσθέτει μόνο **3 νέα καλαμάκια**. Άρα το πλήθος των καλαμακιών αυξάνεται κάθε φορά κατά 3.

Με σύμβολα: Αν N_n είναι ο αριθμός καλαμακιών στο n -οστό βήμα, τότε: $N_n = 4 + 3(n - 1) = 3n + 1$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Ένας χορευτής βρίσκεται στο κέντρο της σκηνής και αρχικά κοιτάζει προς το κοινό. Κάθε 3 λεπτά στρέφεται δεξιόστροφα κατά 30° .

Να προσδιορίσετε:

- (α) σε ποια κατεύθυνση θα κοιτάζει μετά από 18 λεπτά,
- (β) μετά από πόσα λεπτά ο χορευτής θα κοιτάξει για πρώτη φορά ξανά προς το κοινό.

Λύση

(α) Σε 18 λεπτά ο χορευτής πραγματοποιεί: $18 : 3 = 6$ στροφές. Κάθε στροφή είναι 30° , επομένως η συνολική γωνία στροφής είναι: $6 \cdot 30^\circ = 180^\circ$. Άρα, μετά από 18 λεπτά ο χορευτής θα κοιτάζει στην αντίθετη κατεύθυνση από το κοινό.

(β) Για να κοιτάξει ξανά προς το κοινό, πρέπει να ολοκληρώσει μία πλήρη περιστροφή, δηλαδή: 360° . Ο αριθμός των στροφών που απαιτούνται είναι: $360^\circ : 30^\circ = 12$. Κάθε στροφή διαρκεί 3 λεπτά, άρα ο συνολικός χρόνος είναι: $12 \cdot 3 = 36$ λεπτά. Ο χορευτής θα κοιτάξει ξανά προς το κοινό για πρώτη φορά μετά από 36 λεπτά.

ΑΣΚΗΣΗ 11

Δύο καράβια, Α και Β, εκτελούν τακτικά δρομολόγια μεταξύ ενός νησιού και ενός λιμανιού.

- Το καράβι Α αναχωρεί από το λιμάνι κάθε 12 ώρες.
- Το καράβι Β αναχωρεί από το ίδιο λιμάνι κάθε 18 ώρες.

Στην αρχή της εβδομάδας (ώρα 0) και τα δύο καράβια βρίσκονται ταυτόχρονα στο λιμάνι.

Να βρείτε:

- (α) μετά από πόσες ώρες τα δύο καράβια θα βρεθούν ξανά ταυτόχρονα στο λιμάνι,
- (β) πόσες αναχωρήσεις θα έχει πραγματοποιήσει κάθε καράβι μέχρι εκείνη τη στιγμή,
- (γ) αν το καράβι Α αναχωρεί κάθε a ώρες και το καράβι Β κάθε b ώρες, να εκφράσετε αλγεβρικά μετά από πόσες ώρες θα βρεθούν ξανά ταυτόχρονα στο λιμάνι.

Λύση

(α) Χρόνοι αναχώρησης

- Καράβι Α: κάθε 12 ώρες
- Καράβι Β: κάθε 18 ώρες

Θέλουμε τον μικρότερο χρόνο T που είναι πολλαπλάσιο και του 12 και του 18.

Υπολογισμός ΕΚΠ: $12 = 2^2 \cdot 3 \rightarrow 18 = 2 \cdot 3^2$

Άρα: $\text{ΕΚΠ}(12,18) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$ ώρες

Μετά από 36 ώρες τα δύο καράβια θα βρίσκονται ξανά ταυτόχρονα στο λιμάνι.

(β)

- Καράβι Α: $36:12 = 3$ αναχωρήσεις
- Καράβι Β: $36:18 = 2$ αναχωρήσεις

(γ) Με λόγια

Ο χρόνος (T) μετά τον οποίο τα δύο καράβια θα βρεθούν ξανά ταυτόχρονα στο λιμάνι είναι ο ελάχιστος κοινός χρόνος που είναι πολλαπλάσιο και του a και του b .

Με σύμβολα: $T = \text{ΕΚΠ}(a,b)$