Καθώς τα μαθηματικά —με την πρόοδο και τις απαιτήσεις του ραγδαία αναπτυσσόμενου τεχνολογικού μας πολιτισμού— γίνονται όλο και πιο απαραίτητα στη ζωή του σύγχρονου ανθρώπου, εύλογο είναι να υποθέσει κανείς πως τα άτομα που παρουσιάζουν (μικρές ή μεγάλες) δυσκολίες στην κατανόηση και την πρόσληψη των μαθηματικών εννοιών ενδέχεται να αποκλειστούν από κάποιες —κι ίσως, όπως πάρα πολλοί υποστηρίζουν, από τις σπουδαιότερες και πιο αποδοτικές— θέσεις στον αυριανό χώρο εργασίας.

Έτσι, τα τελευταία χρόνια, και ιδίως μέσα στα πλαίσια της γνωστικής ψυχολογίας, έχουν γίνει ιδιαίτερα σοβαρές, διεισδυτικές και υπεύθυνες έρευνες ώστε, πρώτον, να εντοπιστούν και, δεύτερον, να καταπολεμηθούν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν πολλοί μαθητές στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, με τελικό ζητούμενο να αρθεί ένα μεγάλο μέρος των —όποιας μορφής— εμποδίων —και, καμιά φορά, και των αδιεξόδων— που τους αποτρέπουν από τη λύση των μαθηματικών προβλημάτων.

Στον παρόντα τόμο είναι συγκεντρωμένος ένας ικανός αριθμός από τις πιο αντιπροσωπευτικές έρευνες, που και συμπληρώνουν το υπάρχον βιβλιογραφικό κενό στη χώρα μας και, επιπροσθέτως, συντελούν, πιστεύουμε, στη δημιουργία ενός διαλόγου για την αντιμετώπιση του σύνθετου αυτού προβλήματος.

ΚΩΔ. ΑΡΙΘΜΟΣ 571 006

ISBN 960-01-0550-2

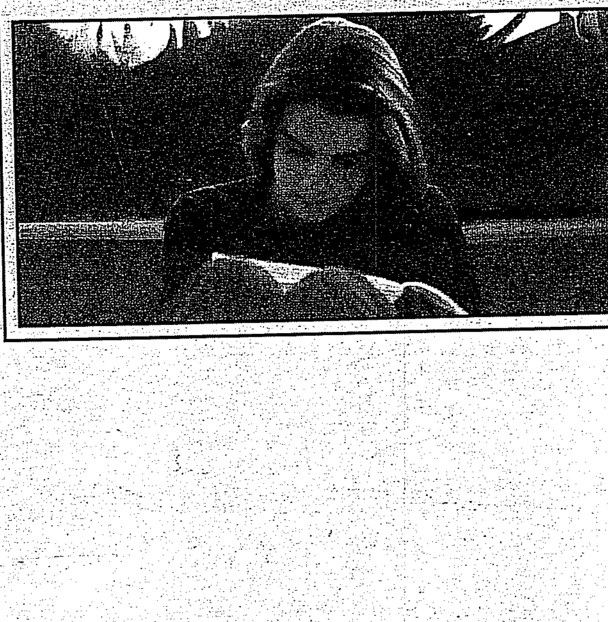
GUTENBERG ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ 7 ΣΤΕΛΛΑ ΒΟΣΝΙΑΔΟΥ (ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ) Η ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ-ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΣΤΕΛΛΑ ΒΟΣΝΙΑΔΟΥ

GUTENBERG ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ



T.N. CARRAHER, D.W. CARRAHER, A.D. SCHLIEMANN

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΟΥΣ ΔΡΟΜΟΥΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΣΧΟΛΕΙΑ

ΕΧΟΥΜΕ ΛΟΓΟΥΣ ΝΑ ΠΙΣΤΕΥΟΥΜΕ ΟΤΙ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΥΠΑΡΧΕΙ διαφορά ανάμεσα στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων με τη χρήση αλγορίθμων που μαθαίνονται στο σχολείο και την επίλυσή τους σε οικείο περιβάλλον έξω από το σχολείο. Οι Reed & Lave (1981) έχουν δείξει ότι τα άτομα που δεν έχουν πάει σχολείο συχνά επιλύουν τέτοια προβλήματα με διαφορετικούς τρόπους από τα άτομα που έχουν πάει. Αυτό σίγουρα δείχνει ότι υπάρχουν άτυποι τρόποι εκτέλεσης μαθηματικών υπολογισμών, που έχουν ελάχιστη σχέση με τις διαδικασίες που διδάσκονται στο σχολείο.

Η μελέτη των Reed & Lave με ενήλικους από τη Λιβερία έδειξε διαφορές ανάμεσα σε άτομα που είχαν πάει και άτομα που δεν είχαν πάει στο σχολείο. Ωστόσο, οι ίδιες διαφορές ανάμεσα στις άτυπες και τις σχολικές διαδικασίες μπορεί να υπάρχουν και στο ίδιο άτομο. Με άλλα λόγια, μπορεί κάποιος να λύνει προβλήματα μερικές φορές με τον τυπικό και μερικές με τον άτυπο τρόπο. Αυτό φαίνεται ιδιαίτερα πιθανό για την περίπτωση των παιδιών που συχνά είναι υποχρεωμένα να κάνουν μαθηματικούς υπολογισμούς σε άτυπες συνθήκες έξω από το σχολείο, ενώ η γνώση των αλγορίθμων που έχουν μάθει στο σχολείο είναι ατελής και η χρήση τους από μέρους των παιδιών αναποτελεσματική.

Γνωρίζουμε ήδη ότι τα παιδιά συχνά καταλήγουν σε παράλογα αποτελέσματα –για παράδειγμα, βρίσκουν υπόλοιπο που είναι μεγαλύτερο από τον αφαιρετέο– όταν προσπαθούν να εφαρμόσουν διαδικασίες υπολογισμού που μαθαίνουν στο σχολείο (Carraher & Schliemann, υπό έκδοση). Υπάρχουν επίσης ενδείξεις ότι οι άτυπες διαδικασίες που μαθαίνονται έξω από το σχολείο είναι συχνά εξαιρετικά αποτελεσματικές. Οι Gay & Cole (1976), για παράδειγμα, έδειξαν ότι αγράμματοι έμποροι Κπελ υπολογίζουν ποσότητες ρυζιού πολύ καλύτερα από μορφωμένους Αμερικανούς. Έτσι, μπορεί τα παιδιά να έχουν δυσκολίες με τις διαδικασίες που μαθαίνουν στο σχολείο, αλλά να μπορούν να λύσουν με άλλους πιο αποτελεσματικούς τρόπους τα μαθηματικά προβλήματα για τα οποία έχουν επινοηθεί αυτές οι διαδικασίες. Ένας τρόπος για να ελέγξουμε αυτή την ιδέα είναι να εξετάσουμε παιδιά που είναι υποχρεωμένα να κάνουν συχνούς και εξαιρετικά περίπλοκους υπολογισμούς έξω από το σχολείο. Τα παιδιά που πουλούν πράγματα στις υπαίθριες αγορές στη Βραζιλία αποτελούν μια τέτοια ομάδα (Carraher κ.ά., 1982).

ΤΟ ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η μελέτη έγινε στο Ρεσίφε, μια πόλη με 1,5 εκατομμύριο κατοίκους περίπου, στη βορειοανατολική ακτή της Βραζιλίας. Το Ρεσίφε, όπως και αρκετές άλλες μεγάλες βραζιλιάνικες πόλεις, δέχεται έναν μεγάλο αριθμό μεταναστών εργατών από τις αγροτικές περιοχές, οι οποίοι πρέπει να προσαρμοστούν σ' ένα νέο τρόπο ζωής, εκείνον της μητροπολιτικής περιοχής. Σε μια ανθρωπολογική μελέτη μεταναστών εργατών στο Σάο-Πάολο της Βραζιλίας, ο Berlinck (1977) εντόπισε τέσσερις πιεστικές ανάγκες σ' αυτή τη διαδικασία προσαρμογής: ανεύρεση στέγης, απόκτηση άδειας εργασίας, εξεύρεση εργασίας και εξασφάλιση των προς το ζην (ενώ στις αγροτικές περιοχές η οικογένεια συχνά εξασφαλίζει την τροφή της μέσα από τη δική της δουλειά). Στη διάρκεια της αρχικής φάσης προσαρμογής, η επιβίωση εξαρτάται κυρίως από πόρους που οι μετανάστες έχουν φέρει μαζί τους ή που τους συγκεντρώνουν με την επαιτεία. Ένα μεγάλο μέρος των μεταναστών γίνονται αργότερα ανειδίκευτοι χειρώνακτες εργάτες, είτε έχοντας μια τακτική δουλειά είτε δουλεύοντας στον λεγόμενο άτυπο τομέα της οικονομίας (Cavalcanti, 1978). Ο άτυπος τομέας είναι ένα ανεπίσημο μέρος της οικονομίας, που συνίσταται κυρίως σε σχετικά ανειδίκευτες εργασίες που δε ρυθμίζονται από κυβερνητικά όργανα και που, επομένως, παράγουν εισόδημα μη υποκείμενο σε φορολογία, ενώ ταυτόχρονα δεν προσφέρει επαγγελματική ασφάλιση ή εργασιακά δικαιώματα όπως η υγειονομική περίθαλψη. Έτσι το εισόδημα που παράγεται με αυτό τον τρόπο είναι περιοδικό και μεταβλητό. Οι διαστάσεις μιας επιχείρησης στον ανεπίσημο τομέα καθορίζονται από την εργασιακή ικανότητα της οικογένειας. Το χαμηλό επίπεδο μόρφωσης και τυπικών επαγγελματικών προσόντων είναι δύο χαρακτηριστικά τού μάλλον μεγάλου πληθυσμού, που στηρίζεται στον άτυπο οικονομικό τομέα. Στο Ρεσίφε, το 30% του εργατικού δυναμικού περίπου απασχολείται στον άτυπο τομέα σαν κύρια δραστηριότητα, και το 18% σαν δευτερεύουσα δραστηριότητα (Cavalcanti, 1978). Μπορούμε εύκολα να κατανοήσουμε τη σπουδαιότητα αυτών των εισοδηματικών πηγών για οικογένειες των κατώτερων κοινωνικοοικονομικών στρωμάτων της Βραζιλίας, αν λάβουμε υπόψη ότι το εισόδημα της οικογένειας ενός ανειδίκευτου εργάτη αυξάνεται κατά 56% χάρη στην απασχόληση της γυναίκας και των παιδιών του στον άτυπο τομέα στο Σάο-Πάολο (Berlinck, 1977). Στη Φορταλέζα, το εισόδημα που προέρχεται από τον άτυπο τομέα αντιπροσωπεύει τουλάχιστον το 60% του εισοδήματος μιας οικογένειας της κατώτερης τάξης* (Cavalcanti & Duarte, 1980a).

Τα άτομα που συμμετέχουν στην άτυπη οικονομία εξασκούν διάφορα επαγγέλματα – οικιακή εργασία, μικροπωλητές, επιδιορθώσεις υποδημάτων, καθώς και άλλα είδη μικροεπιδιορθώσεων, που γίνονται χωρίς να υπάρχει σταθερή εμπορική έδρα. Η απασχόληση που εξετάζεται στην παρούσα μελέτη –εκείνη των μικροπωλητών– αντιπροσωπεύει την κύρια απασχόληση του 10% του οικονομικά ενεργού πληθυσμού του Σαλβαδόρ (Cavalcanti & Duarte, 1980b) και της Φορταλέζα (Cavalcanti & Duarte, 1980a). Αν και δεν συγκεντρώθηκαν συγκεκριμένα στοιχεία για τους μικροπωλητές του Ρεσίφε, τα δεδομένα του Σαλβαδόρ και της Φορταλέζα μπορούν να χρησιμεύσουν σαν κοντινές προσεγγίσεις, αφού αυτές οι πόλεις, όπως και το Ρεσίφε, είναι πρωτεύουσες πολιτειών της ίδιας γεωγραφικής περιοχής.

Στη Βραζιλία, τα παιδιά των μικροπωλητών βοηθούν συχνά τους γονείς τους στην εργασία τους. Από ηλικία 8 ή 9 χρονών περίπου, τα παιδιά διενεργούν συχνά μερικές από τις συναλλαγές όταν οι γονείς τους είναι απασχολημένοι με άλλον πελάτη ή λείπουν για κάποια δουλειά. Μάλιστα, τα παιδιά της προεφηβικής και εφηβικής ηλικίας μπορεί να ιδρύσουν και δικές τους «επιχειρήσεις», πουλώντας σνακς, όπως ψημένα φιστίκια, ποπκόρν, γάλα καρύδας ή καλαμπόκια. Στη Φορταλέζα και το Σαλβαδόρ, πόλεις για τις οποίες υπάρχουν δεδομένα, το 2,2% και το 1,4% αντίστοιχα του πληθυσμού που απασχολούνταν στον άτυπο τομέα ως μικροπωλητές είχαν ηλικία μέχρι 14 ετών, ενώ το 8,2% και το 7,5%, αντίστοιχα, είχαν ηλικία 15-19 ετών (Cavalcanti & Duarte, 1980a,b).

Αυτά τα παιδιά και οι έφηβοι, στη διάρκεια της δουλειάς τους, είναι υποχρεωμένα να επιλύουν ένα μεγάλο αριθμό μαθηματικών προβλημάτων, συνήθως χωρίς να χρησιμοποιούν χαρτί και μολύβι. Τα προβλήματα μπορεί να περιέχουν πολλαπλασιασμό (μία καρύδα στοιχίζει x, οι τέσσερις καρύδες $4x$), πρόσθεση (4 καρύδες και 12 λεμόνια στοιχίζουν $x+y$), και αφαίρεση (500 κρουζέιρος μείον η τιμή πώλησης είναι τα ρέστα που πρέπει να επιστραφούν στον πελάτη). Η διαίρεση χρησιμοποιείται πολύ πιο σπάνια, αλλά εμφανίζεται σε μερικές περιπτώσεις που η τιμή καθορίζεται με βάση μια μονάδα μέτρησης (όπως το 1 κιλό) και ο πελάτης θέλει ένα μέρος αυτής της μονάδας· για παράδειγμα, όταν το συγκεκριμένο αντικείμενο που επέλεξε ζυγίζει 1,2 κιλά. Η χρήση πινάκων

* Στην παρούσα μελέτη, ο όρος «τάξη» χρησιμοποιείται με μια χαλαρή σημασία, χωρίς να διαφοροποιείται καθαρά από την έκφραση «κοινωνικοοικονομικό στρώμα».

που δίνει το κόστος για διάφορους αριθμούς πωλούμενων αντικειμένων (ένα αβγό-12 κρουζέιρος, δύο αβγά-24, κλπ.) παρατηρείται κατά καιρούς, αλλά δεν παρατηρήθηκε ανάμεσα στα παιδιά που πήραν μέρος στη μελέτη. Επίσης, τα παιδιά αυτά δε χρησιμοποιούσαν χαρτί και μολύβι – που χρησιμοποιούν καμιά φορά οι ενήλικοι μικροπωλητές όταν προσθέτουν μια μεγάλη σειρά εμπορευμάτων.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Υποκείμενα

Τα παιδιά αυτής της μελέτης ήταν τέσσερα αγόρια και ένα κορίτσι ηλικίας 9-15 ετών, με μέσο όρο ηλικίας 11,2, και στο σχολείο είχαν παρακολουθήσει από την Α΄ μέχρι την Η΄ τάξη. Ένα από τα παιδιά είχε πάει μόνο ένα χρόνο σχολείο, δύο είχαν πάει τρία χρόνια, ένα είχε πάει τέσσερα χρόνια κι ένα οχτώ χρόνια. Όλα ανήκαν σε πολύ φτωχές οικογένειες. Τέσσερα από τα υποκείμενα πήγαιναν σχολείο όταν έγινε η μελέτη και ένα είχε σταματήσει το σχολείο επί δύο χρόνια. Τέσσερα από αυτά τα υποκείμενα είχαν δεχθεί τυπική διδασκαλία στις μαθηματικές πράξεις και τα προβλήματα. Το υποκείμενο που πήγε στην Α΄ τάξη και σταμάτησε το σχολείο ήταν απίθανο να έχει μάθει πολλαπλασιασμό και διαίρεση, γιατί αυτές οι πράξεις συνήθως διδάσκονται στη Β΄ ή την Γ΄ τάξη στα δημόσια σχολεία του Ρεσίφε.

Διαδικασία

Τα παιδιά βρέθηκαν από τους συνεντευκτές σε γωνίες δρόμων ή σε αγορές όπου εργάζονταν μόνα τους ή με τις οικογένειές τους. Οι συνεντευκτές επέλεξαν υποκείμενα που φαίνονταν να βρίσκονται μέσα στο επιθυμητό εύρος ηλικίας –παιδιά του Δημοτικού ή νεαροί έφηβοι–, και συγκέντρωσαν τις πληροφορίες για την ηλικία και το επίπεδο της εκπαίδευσής τους παράλληλα με τις πληροφορίες για τις τιμές των εμπορευμάτων που πουλούσαν. Οι ερωτήσεις γίνονταν στην πορεία μιας φυσιολογικής εμπορικής συναλλαγής, όπου ο ερευνητής παρουσιαζόταν ως πελάτης. Μερικές φορές έγιναν και αγορές. Σε άλλες περιπτώσεις, ο «πελάτης» ζήτησε από το υποκείμενο να εκτελέσει υπολογισμούς για πιθανές αγορές. Στο τέλος του άτυπου τεστ ζητήθηκε από τα παιδιά να πάρουν μέρος σ' ένα τυπικό τεστ, το οποίο δόθηκε σε άλλη χρονική στιγμή (ο χρόνος που μεσολάβησε από το άτυπο τεστ ήταν το πολύ μια βδομάδα) και από τον ίδιο συνεντευκτή. Τα υποκείμενα απάντησαν συνολικά σε 99 ερωτήσεις στο τυπικό τεστ και 63 ερωτήσεις στο άτυπο τεστ. Επειδή οι ερωτήσεις του τυπικού τεστ βασίζονταν σε ερωτήσεις του άτυπου τεστ, η σειρά των τεστ ήταν σταθερή για όλα τα υποκείμενα.

(1) *Το άτυπο τεστ*. Το άτυπο τεστ έγινε στα πορτογαλικά, μέσα στο φυσικό περιβάλλον εργασίας του υποκειμένου, δηλαδή σε γωνίες δρόμων ή σε υπαίθριες αγορές. Οι συνεντευκτές έθεταν στο υποκείμενο διαδοχικές ερωτήσεις για πιθανές ή πραγματικές αγορές και έπαιρναν προφορικές απαιτήσεις. Οι απαντήσεις, είτε μαγνητοφωνήθηκαν είτε γράφτηκαν, μαζί με σχόλια, από έναν παρατηρητή. Αφού έπαιρναν μια απάντηση για μια αγορά, οι συνεντευκτές έκαναν ερωτήσεις στο υποκείμενο σχετικά με τη μέθοδο που ακολούθησε για να λύσει το πρόβλημα.

Η μέθοδος μπορεί να περιγραφεί ως ένας συνδυασμός ανάμεσα στην κλινική μέθοδο του Piaget και τη συμμέτοχο παρατήρηση. Ο συνεντευκτής δεν ήταν απλώς ένας συνεντευκτής, ήταν επίσης και πελάτης – ένας πελάτης που έκανε ερωτήσεις και ζητούσε από έναν πωλητή να του πει πώς εκτέλεσε τον υπολογισμό.

Δίνουμε εδώ ένα παράδειγμα από το άτυπο τεστ του Μ., ενός πωλητή ινδικών καρύδων, ηλικίας 12 ετών, μαθητή της Γ΄ Δημοτικού, όπου ο συνεντευκτής αναφέρεται ως «πελάτης»:

Πελάτης: *Πόσο κάνει μία καρύδα;*
Μ.: *35.*
Πελάτης: *Θα ήθελα δέκα. Πόσο κάνουν;*
Μ.(Παύση): *Οι τρεις κάνουν 105· με τρεις ακόμη, γίνεται 210*

(παύση). *Χρειάζομαι τέσσερις ακόμη. Δηλαδή...** (παύση). *315... Νομίζω ότι κάνουν 350.*

Το πρόβλημα μπορεί να παρασταθεί με αρκετούς τρόπους από μαθηματική άποψη: 35×10 είναι μια καλή αναπαράσταση της *ερώτησης* που έθεσε ο συνεντευκτής. Η απάντηση του υποκειμένου αναπαρίσταται καλύτερα από την παράσταση 105+105+105+35, πράγμα που σημαίνει ότι η πράξη 35×10 έγινε από το υποκείμενο με τη μορφή (3×35)+(3×35)+(3×35)+35. Στην παραπάνω κατάσταση, μπορούμε να πούμε ότι το υποκείμενο απάντησε και στις ακόλουθες υποερωτήσεις:

(α΄) 35×10
(β΄) 35×3 (που μπορεί να ήταν ήδη γνωστό)
(γ΄) 105+105
(δ΄) 210+105
(ε΄) 315+35
(στ΄) 3+3+3+1.

Όταν αναπαριστά κανείς με τυπική μαθηματική μορφή τα προβλήματα που λύθηκαν από το υποκείμενο, προσπαθεί ουσιαστικά να απεικονίσει το επίπεδο της μαθηματικής ικανότητας του υποκειμένου. Ο Μ. απέδειξε ότι μπορεί να βρει πόσο κάνει 35×10, παρόλο που χρησιμοποίησε μια διαδικασία που δε χρησιμοποιούν στην Γ΄ τάξη, αφού στη Βραζιλία τα παιδιά διδάσκονται στην Γ΄ τάξη να πολλαπλασιάζουν οποιονδήποτε αριθμό με το δέκα τοποθετώντας απλώς ένα μηδενικό στα δεξιά του αριθμού. Έτσι, θεωρήσαμε ότι το αντικείμενο απάντησε στην ερώτηση του τεστ (35×10) και ταυτόχρονα απάντησε επιτυχώς σε μια ολόκληρη σειρά από υποερωτήσεις (β΄ έως στ΄). Ωστόσο, στη διαδικαία της βαθμολόγησης θεωρήθηκε ότι στο υποκείμενο δόθηκε μόνο *μία* ερώτηση (35×10), στην οποία και απάντησε επιτυχώς.

* Τα αποσιωπητικά (...) χρησιμοποιούνται εδώ για να δείξουν έναν ανιόντα τονισμό της φωνής, που δείχνει τη διακο: ή αι όχι την ολοκλήρωση μιας δήλωσης.

(2) *Το τυπικό τεστ.* Αφού έγινε η συνέντευξη με τα υποκείμενα στη φυσική κατάσταση, τους ζητήθηκε να πάρουν μέρος στο τυπικό μέρος της μελέτης, και προγραμματίστηκε μια δεύτερη συνέντευξη στο ίδιο μέρος ή στο σπίτι του υποκειμένου.

Οι ερωτήσεις του τυπικού τεστ προετοιμάστηκαν για κάθε υποκείμενο με βάση τα προβλήματα που έλυσε κατά το άτυπο τεστ. Κάθε πρόβλημα που λύθηκε στο άτυπο τεστ αποδόθηκε κατά μαθηματικό τρόπο σύμφωνα με τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος που χρησιμοποίησε το υποκείμενο.

Απ' όλα τα μαθηματικά προβλήματα που *επιλύθηκαν επιτυχώς* από κάθε υποκείμενο (ανεξάρτητα από τον αν αποτελούσαν ερώτηση του τεστ ή όχι), επιλέχθηκε ένα δείγμα για να συμπεριληφθεί στο τυπικό τεστ του υποκειμένου. Αυτό το δείγμα δόθηκε στο τυπικό τεστ, είτε με τη μορφή μαθηματικής άσκησης που υπαγορεύθηκε στο υποκείμενο (π.χ. 105+105), είτε με τη μορφή προβλήματος (π.χ., η Μαίρη αγόρασε *x* μπανάνες· κάθε μπανάνα κοστίζει *y*· πόσα πλήρωσε όλα μαζί;). Και στις δύο περιπτώσεις, *κάθε υποκείμενο επέλυσε προβλήματα που περιείχαν τους ίδιους αριθμούς που είχαν χρησιμοποιηθεί στο άτυπο τεστ του ίδιου υποκειμένου.* Έτσι οι ποσότητες που χρησιμοποιήθηκαν άλλαζαν από το ένα υποκείμενο στο άλλο.

Στο τυπικό τεστ εισήχθησαν δύο παραλλαγές, σύμφωνα με τις μεθοδολογικές προτάσεις που υπάρχουν στο έργο των Reed & Lave (1981). Πρώτο, μερικές από τις ερωτήσεις που δόθηκαν στο τυπικό τεστ ήταν το αντίστροφο των προβλημάτων που λύθηκαν στο άτυπο τεστ (π.χ., το 500−385 μπορεί να εμφανίστηκε ως 385+115 στο τυπικό τεστ). Δεύτερο, μερικές από τις ερωτήσεις του άτυπου τεστ χρησιμοποίησαν μια δεκαδική τιμή που διέφερε από εκείνη που χρησιμοποιήθηκε στο τυπικό τεστ (π.χ., στο τυπικό τεστ τα 40 κρουζέιρος μπορεί να εμφανίστηκαν ως 40 σεντάβος, ή το 35 μπορεί να εμφανίστηκε ως 3.500 – η κύρια βραζιλιάνικη νομισματική μονάδα είναι το κρουζέιρο· κάθε κρουζέιρο έχει εκατό σεντάβος).

Για να κάνουμε την κατάσταση του τυπικού τεστ να μοιάζει περισσότερο με κείνη του σχολικού περιβάλλοντος, δώσαμε στα υποκείμενα χαρτί και μολύβι και τα ενθαρρύναμε να το χρησιμοποιήσουν. Όταν, παρόλ' αυτά, τα υποκείμενα έλυναν τα προβλήματα χωρίς να γράφουν, τους ζητήθηκε να καταγράφουν τις απαντήσεις τους. Μόνο ένα υποκείμενο αρνήθηκε να το κάνει αυτό, υποστηρίζοντας ότι δεν ξέρει να γράφει. Θα πρέπει να επισημανθεί, ωστόσο, ότι η σχολική κατάσταση αντιπροσωπευόταν όχι μόνο από την παρουσία γραφικής ύλης, αλλά και από την ίδια τη χρήση τυπικών μαθηματικών ασκήσεων, που δεν αναφέρονταν σε καταστάσεις, και λεκτικών προβλημάτων, που αφορούσαν φανταστικές καταστάσεις.

Στο τυπικό τεστ δόθηκαν συνολικά στα παιδιά 38 ασκήσεις και 61 λεκτικά προβλήματα. Τα προβλήματα αφορούσαν μάλλον συγκεκριμένες καταστάσεις και η επίλυσή τους χρειαζόταν μόνο μία μαθηματική πράξη.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων του άτυπου τεστ απαιτούσε έναν αρχικό ορισμό τού τι θα θεωρούμε ερώτηση του τεστ στη συγκεκριμένη κατάσταση. Ενώ στο τυπικό τεστ οι ερωτήσεις είχαν οριστεί εκ των προτέρων, στο άτυπο τεστ οι ερωτήσεις παράγονταν μέσα στο φυσικό περιβάλλον και καθορίστηκαν *εκ των υστέρων*. Για να αποφύγουμε μια μεροληπτική αύξηση στον αριθμό των προβλημάτων που επιλύθηκαν κατά το άτυπο τεστ, ο ορισμός της ερώτησης βασίστηκε στα *ερωτήματα* που τέθηκαν από τον πελάτη/εξεταστή. Αυτή η εκτίμηση του αριθμού των επιλυθέντων προβλημάτων είναι μάλλον συντηρητική, αφού τα υποκείμενα συχνά επέλυαν μια σειρά από ενδιάμεσα βήματα για να απαντήσουν στην ερώτηση που τους είχε τεθεί. Έτσι, και στα δύο τεστ εφαρμόστηκε το ίδιο κριτήριο για να προσδιοριστεί ποιες είναι οι ερωτήσεις, παρόλο που στη μία περίπτωση οι ερωτήσεις καθορίστηκαν πριν το τεστ και στην άλλη μετά το τεστ. Και στις δύο καταστάσεις λήφθηκε υπόψη η προφορική απάντηση του υποκειμένου, παρόλο που κατά το τυπικό τεστ υπήρχαν διαθέσιμες και γραπτές απαντήσεις.

Τα προβλήματα που αναφέρονταν σε κάποια κατάσταση επιλύθηκαν πολύ πιο εύκολα από τις ασκήσεις. Ο Πίνακας 1 δείχνει ότι το 98,2% των 63 προβλημάτων που δόθηκαν στο άτυπο τεστ επιλύθηκε σωστά. Στο τυπικό τεστ, το ποσοστό των σωστών απαντήσεων στα προβλήματα (τα οποία παρέχουν στο υποκείμενο την περιγραφή μιας κατάστασης) ήταν 73,7%, σε αντίθεση με το ποσοστό των σωστών απαντήσεων στις ασκήσεις (όπου δεν υπήρχε περιγραφή κατάστασης αλλά μόνο μαθηματικές πράξεις), που ήταν 36,8%.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΟΓΑ ΜΕ ΤΗ ΜΟΡΦΗ ΤΟΥ ΤΕΣΤ

	Άτυπο Τεστ		*Μάθηματικές Πράξεις*		*Λεκτικά Προβλήματα*	
Υποκεί-μενο	*Βαθμός**	*Αριθμός Ερωτήσεων*	*Βαθμός*	*Αριθμός Ερωτήσεων*	*Βαθμός*	*Αριθμός Ερωτήσεων*
Μ.	10	18	2,5	8	10	11
Π.	8,9	19	3,7	8	6,9	16
Πι.	10	12	5,0	6	10	11
Μ.Ντ.	10	7	1,0	10	3,3	12
Σ.	10	7	8,3	6	7,3	11
Σύνολα		63		38		61

* Ο βαθμός κάθε υποκειμένου είναι το ποσοστό των σωστών απαντήσεων διαιρεμένο με το 10.

Η συχνότητα των σωστών απαντήσεων για κάθε υποκείμενο μετατράπηκε σε βαθμούς από το 1 μέχρι το 10, οι οποίοι αντικατοπτρίζουν το ποσοστό των σωστών απαντήσεων. Με μια βαθμολογική ανάλυση διασποράς δύο παραγόντων των βαθμών κατά Friedman, συγκρίθηκαν οι βαθμοί κάθε υποκειμένου στις τρεις διαφορετικές μορφές του τεστ. Οι βαθμοί διαφέρουν σημαντικά ανάμεσα στις καταστάσεις ($x^2r=6{,}4$, $P=0{,}039$). Υπολογίστηκαν επίσης τα κριτήρια *U* των Mann-Whitney με σύγκριση των τριών διαφορετικών μορφών του τεστ. Τα υποκείμενα απέδωσαν σημαντικά καλύτερα στο άτυπο τεστ απ' ό,τι στο τυπικό, που περιείχε μαθηματικές πράξεις χωρίς αναφορά σε καταστάσεις (U=0, P<0,05). Η διαφορά ανάμεσα στο άτυπο τεστ και τα λεκτικά προβλήματα δεν ήταν σημαντική (U=6, P>0,05).

Θα μπορούσε να υποστηριχτεί ότι τα σφάλματα που παρατηρήθηκαν στο τυπικό τεστ είχαν σχέση με τις αλλαγές που έγιναν στα προβλήματα του άτυπου τεστ, ώστε να παραχθούν οι ερωτήσεις του τυπικού τεστ. Για να αξιολογήσουμε αυτή την υπόθεση, διαχωρίσαμε τις ερωτήσεις που είχαν αλλαχτεί, είτε με αντιστροφή της πράξης είτε με μεταβολή της υποδιαστολής, από τις ερωτήσεις που παρέμειναν πανομοιότυπες με τις αντίστοιχες του άτυπου τεστ. Το ποσοστό των σωστών απαντήσεων σ' αυτές τις δύο ομάδες ερωτήσεων δεν παρουσίαζε σημαντική διαφορά. Το ποσοστό των σωστών απαντήσεων στις αλλαγμένες ερωτήσεις ήταν ελαφρά μεγαλύτερο από εκείνο των ερωτήσεων που ήταν πανομοιότυπες με τις ερωτήσεις του άτυπου τεστ. Έτσι, οι μεταβολές που έγιναν στις ερωτήσεις του άτυπου τεστ για να σχηματιστούν οι ερωτήσεις του τυπικού δεν μπορούν να εξηγήσουν τη διαφορά απόδοσης ανάμεσα σ' αυτές τις καταστάσεις.

Μια δεύτερη δυνατή ερμηνεία αυτών των αποτελεσμάτων είναι ότι τα παιδιά που εξετάστηκαν στη μελέτη είχαν έναν «συγκεκριμένο» τρόπο σκέψης, κι έτσι οι συγκεκριμένες καταστάσεις θα τα βοηθούσαν στην ανακάλυψη της λύσης. Στη φυσική κατάσταση, έλυσαν προβλήματα που αφορούσαν την πώληση λεμονιών, καρύδων, κλπ., έχοντας μπροστά τους τα αντικείμενα για τα οποία έκαναν υπολογισμούς. Όμως η παρουσία των συγκεκριμένων αντικειμένων μπορεί να θεωρηθεί διευκολυντικός παράγοντας αν το αντικείμενο επιτρέπει με κάποιο τρόπο στον επιλύοντα να περάσει με την αφαίρεση από τη συγκεκριμένη περίπτωση σε μια πιο γενική κατάσταση. Οι καρύδες δεν διαθέτουν καμιά ενδογενή ιδιότητα που να κάνει σχετικά πιο εύκολη την ανακάλυψη ότι τρεις καρύδες (με 35 κρουζέιρος η μία) στοιχίζουν 105 κρουζέιρος. Η παρουσία του αντικειμένου δεν απλοποιεί την αριθμητική του προβλήματος.

Επιπλέον, ο υπολογισμός στη φυσική κατάσταση του άτυπου τεστ γινόταν σε όλες τις περιπτώσεις νοερά, χωρίς να χρησιμοποιούνται εξωτερικά μνημονικά βοηθήματα για τα μερικά αποτελέσματα ή τα ενδιάμεσα βήματα. Δεν μπορεί κανείς να ισχυριστεί ότι ο νοερός υπολογισμός είναι μια ικανότητα χαρακτηριστική των ατόμων με «συγκεκριμένη» σκέψη.

Τα αποτελέσματα της μελέτης φαίνονται να έρχονται σε αντίθεση με τη σιωπηρή παραδοχή των διδακτικών των μαθηματικών, σύμφωνα με την οποία τα παιδιά πρέπει πρώτα να μαθαίνουν τις μαθηματικές πράξεις και αργότερα να τις εφαρμόζουν σε λεκτικά προβλήματα και σε προβλήματα της καθημερινής ζωής. Αυτά τα προβλήματα μπορεί να τους δώσουν την «καθημερινή ανθρώπινη λογική» (Donaldson, 1978) που θα καθοδηγήσει τα παιδιά να βρουν μια σωστή λύση διαισθητικά, χωρίς να χρειάζεται ένα πρόσθετο βήμα, συγκεκριμένα η μετάφραση των λεκτικών προβλημάτων σε αλγεβρικές παραστάσεις. Αυτή η ερμηνεία είναι συνεπής με δεδομένα που συγκεντρώθηκαν από άλλους ερευνητές στον τομέα της λογικής, όπως από τους Wason & Shapiro (1971), Johnson-Laird κ.ά. (1972), και Lunzer κ.ά. (1972).

Πώς είναι δυνατόν τα παιδιά να μπορούν να λύσουν ένα υπολογιστικό πρόβλημα στη φυσική κατάσταση, αλλά να μην μπορούν να λύσουν το ίδιο πρόβλημα όταν τους δοθεί χωρίς αναφορά σε κάποια κατάσταση; Στην παρούσα περίπτωση, μια ποιοτική ανάλυση των πρωτοκόλλων έδειξε ότι οι διαδικασίες επίλυσης των προβλημάτων που χρησιμοποιήθηκαν μπορεί να ήταν διαφορετικές στις δύο καταστάσεις. Στις φυσικές καταστάσεις τα παιδιά έτειναν να σκέφτονται χρησιμοποιώντας, θα λέγαμε, μια «βολική ομάδα», ενώ στο τυπικό τεστ παρατηρήθηκαν πιο συχνά, αν και όχι αποκλειστικά, διαδικασίες που είχαν διδαχτεί στο σχολείο. Παρακάτω δίνουμε πέντε παραδείγματα, που δείχνουν την ικανότητα των παιδιών να χειρίζονται ποσότητες και την έλλειψη ευχέρειας στο χειρισμό συμβόλων. Τα παραδείγματα επιλέχτηκαν έτσι ώστε να εξηγούν καθαρά τις διαδικασίες που χρησιμοποιήθηκαν και στις δύο καταστάσεις. Σε καθένα από τα πέντε παραδείγματα που ακολουθούν, η απόδοση στο άτυπο τεστ έρχεται σε έντονη αντίθεση με την απόδοση του ίδιου παιδιού όταν του δινόταν η ίδια ερώτηση στο τυπικό τεστ.

(1) ΠΡΩΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Μ., 12 ετών)

Άτυπο τεστ

Πελάτης: *Θα πάρω τέσσερις καρύδες. Πόσο κάνουν;*

Παιδί: *Οι τρεις είναι 105, συν 30, μας κάνει 135... μία καρύδα κάνει 35... δηλαδή... 140!*

Τυπικό τεστ

Το παιδί αναλύει την άσκηση 35×4 εξηγώντας μεγαλόφωνα:

4 φορές το 5 μας κάνει 20, δύο τα κρατούμενα· 2 και 3 κάνει 5, επί 4, 20.

Γραπτή απάντηση: 200

(2) ΔΕΥΤΕΡΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Μ.Ντ., 9 ετών)

Άτυπο τεστ

Πελάτης: *Εντάξει, θα πάρω τρεις καρύδες* (στην τιμή των 40 κρουζέιρος η μία). *Πόσο κάνουν;*

Παιδί (χωρίς χειρονομίες, υπολογίζει μεγαλόφωνα): *40, 80, 120.*

Τυπικό τεστ

Το παιδί λύνει την άσκηση 40×3 και βρίσκει 70. Μετά εξηγεί τη διαδικασία: *Κάτω το μηδέν. 4 και 3, 7.*

(3) ΤΡΙΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Μ.Ντ., 9 ετών)

Άτυπο τεστ

Πελάτης: *Θα πάρω 12 λεμόνια* (το ένα λεμόνι κάνει 5 κρουζέιρος).

Παιδί: *10, 20, 30, 40, 50, 60* (ενώ ξεχωρίζει δύο λεμόνια κάθε φορά).

Τυπικό τεστ

Το παιδί μόλις έχει λύσει την άσκηση 40×3. Για να λύσει την άσκηση 12×5 προχωρεί κατεβάζοντας πρώτα το 2, μετά το 5 και το 1, βρίσκοντας 152. Όταν τελειώνει, εξηγεί τη διαδικασία στον (έκπληκτο) εξεταστή.

(4) ΤΕΤΑΡΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Σ., 11 ετών)

Άτυπο τεστ

Πελάτης: *Πόσο θα έκαναν τα έξι κιλά;* (καρπούζι, με 50 κρουζέιρος το κιλό).

Παιδί (χωρίς καμία αισθητή καθυστέρηση): *300.*

Πελάτης: *Για να δω. Πώς το βρήκες αυτό τόσο γρήγορα;*

Παιδί: *Μετρώντας ένα-ένα. Δύο κιλά, 100, 200, 300.*

Τυπικό τεστ

Ερώτηση: *Ένας ψαράς έπιασε 50 ψάρια. Ένας άλλος έπιασε πέντε φορές περισσότερα ψάρια από τον πρώτο ψαρά. Πόσα ψάρια έπιασε ο τυχερός ψαράς;*

Παιδί (γράφει 50×6 και 360 σαν αποτέλεσμα, μετά απαντά): *36.*

Ο εξεταστής επαναλαμβάνει το πρόβλημα και το παιδί κάνει πάλι τον υπολογισμό, γράφοντας 860 για αποτέλεσμα. Η προφορική του απάντηση είναι 86.

Εξεταστής: *Πώς το υπολόγισες αυτό;*

Παιδί: *Το έκανα ως εξής. Έξι φορές το έξι κάνει 36. Μετά το έβαλα εκεί.*

Εξεταστής: *Πού το έβαλες;* (Το παιδί δεν είχε γράψει τα κρατούμενα).

Παιδί (δείχνει το ψηφίο 5 του 50): *Αυτό μας κάνει 86* [προφανώς προσθέτοντας 3 και 5 και βάζοντας αυτό το άθροισμα στο αποτέλεσμα].

Εξεταστής: *Πόσα έπιασε ο πρώτος ψαράς;*

Παιδί: *50.*

Ακολουθεί ένα τελευταίο παράδειγμα, με προτεινόμενες ερμηνείες μέσα σε αγκύλες.

(5) ΠΕΜΠΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Άτυπο τεστ

Πελάτης: *Θα πάρω δύο καρύδες* (με 40 κρουζέιρος η μία. Πληρώνει με χαρτονόμισμα των 500 κρουζέιρος). *Πόσα ρέστα θα πάρω;*

Παιδί (πριν απλώσει το χέρι για τα ρέστα του πελάτη): *80, 90, 100, 420.*

Τυπικό τεστ

Ερώτηση: *420+80.*

Το παιδί γράφει 420 συν 80 και λέει ότι το αποτέλεσμα είναι 130. [Το παιδί δεν εξήγησε τη διαδικασία που ακολούθησε, φαίνεται όμως ότι εφάρμοσε ένα βήμα της μεθόδου του πολλαπλασιασμού σε ένα πρόβλημα πρόσθεσης, προσθέτοντας διαδοχικά το 8 στο 2 και μετά στο 4, και κρατώντας κρατούμενο 1· δηλαδή, 8+2=10, ένα το κρατούμενο, 1+4+8=13. Τα μηδενικά του 420 και του 80 δε γράφτηκαν. Από τις μαγνητοφωνήσεις βρέθηκαν οι χρόνοι απάντησης και όλη η διαδικασία χρειάστηκε 53 δευτερόλεπτα].

Εξεταστής: *Πώς το έκανες αυτό εδώ, 420 συν 80;*

Παιδί: *Συν;*

Εξεταστής: *Συν 80.*

Παιδί: *100, 200.*

Εξεταστής (μετά από παύση 5 δευτερολέπτων, διακόπτει την απάντηση του παιδιού, θεωρώντας την τελική): *Χμ, εντάξει.*

Παιδί: *Περίμενε μια στιγμή. Είναι λάθος. 500.* [Προφανώς το παιδί είχε προσθέσει 80 και 20 βρίσκοντας 100, και μετά άρχισε να προσθέτει τις εκατοντάδες. Ο πειραματιστής θεώρησε το 200 ως τελική απάντηση μετά από μια σύντομη παύση, αλλά το παιδί ολοκλήρωσε τον υπολογισμό και έδωσε τη σωστή απάντηση όταν έλυσε το πρόβλημα πρόσθεσης με μια προσέγγιση χειρισμού ποσοτήτων].

Στο άτυπο τεστ, τα παιδιά στηρίζονται σε νοερούς υπολογισμούς που συνδέονται στενά με τις ποσότητες που χειρίζονται. Η προτιμούμενη στρατηγική για τα προβλήματα πολλαπλασιασμού συνίσταται μάλλον στη σύνδεση διαδοχικών προσθέσεων. Στο πρώτο παράδειγμα, καθώς η πρόσθεση γίνεται πιο δύσκολη, το υποκείμενο ανέλυσε μια ποσότητα σε δεκάδες και μονάδες: για να προσθέσει το 35 στο 105, ο Μ. πρόσθεσε πρώτα το 30 και μετά πρόσθεσε και το 5 στο αποτέλεσμα.

Στο τυπικό τεστ, όπου χρησιμοποιήθηκε χαρτί και μολύβι για όλα τα παραπάνω παραδείγματα, τα παιδιά προσπαθούν να ακολουθήσουν, χωρίς επιτυχία, σχολικές μεθόδους. Γίνονται πολλά λάθη επειδή τα παιδιά συγχέουν τις διαδικασίες της πρόσθεσης μ' εκείνες του πολλαπλασιασμού, κάτι που φαίνεται καθαρά στα παραδείγματα (1) και (5). Επιπλέον, σε όλες τις περιπτώσεις, δεν υπάρχει καμιά ένδειξη ότι τα παιδιά, μόλις γράψουν τους αριθμούς, προσπαθούν να συσχετίσουν τα αποτελέσματα που βρήκαν με το συγκεκριμένο πρόβλημα για να εκτιμήσουν την ορθότητα της απάντησής τους.

Για να συνοψίσουμε με λίγα λόγια, ο συνδυασμός της κλινικής μεθόδου των ερωτήσεων με τη συμμέτοχη παρατήρηση που χρησιμοποιήθηκε σε τούτη τη μελέτη φάνηκε ιδιαίτερα χρήσιμος για τη διερεύνηση της μαθηματικής σκέψης και της σκέψης της καθημερινής ζωής. Τα αποτελέσματα στηρίζουν τη θέση που υποστήριξε ο Luria (1976) και η Donaldson (1978), ότι η σκέψη που στηρίζεται στην καθημερινή ανθρώπινη λογική μπορεί να βρίσκεται —στο ίδιο άτομο— σε ανώτερο επίπεδο από τη σκέψη που δεν έχει συγκεκριμένο αντικείμενο αναφοράς. Παράλληλα, θέτουν υπό αμφισβήτηση την εκπαιδευτική πρακτική της διδασκαλίας αριθμητικών πράξεων σε καθαρά μαθηματική μορφή, πριν από την εφαρμογή τους σε προβλήματα.

Τα αποτελέσματά μας συμφωνούν επίσης με τα δεδομένα που ανακοινώθηκαν από τους Lave κ.ά. (1984), οι οποίοι έδειξαν ότι η επίλυση προβλημάτων στο σουπερμάρκετ είναι σημαντικά ανώτερη από την επίλυση προβλημάτων με χαρτί και μολύβι. Φαίνεται ότι η επίλυση καθημερινών προβλημάτων μπορεί να πραγματοποιείται με διαδικασίες διαφορετικές από εκείνες που διδάσκονται στα σχολεία. Στην παρούσα μελέτη, η επίλυση καθημερινών προβλημάτων τείνει να επιτυγχάνεται με στρατηγικές που απαιτούν το νοερό χειρισμό ποσοτήτων, ενώ στην κατάσταση τύπου σχολείου το βάρος των υπολογισμών πέφτει στο χειρισμό συμβόλων, πράγμα που έκανε τις πράξεις να είναι, κατά μια πολύ γνήσια έννοια του όρου, «διαχωρισμένες από την πραγματικότητα» (βλ. Reed & Lave, 1981, σ. 442). Μάλιστα, σε πολλές περιπτώσεις οι προσπάθειες εφαρμογής των σχολικών μεθόδων φαίνονται να δυσχεραίνουν την επίλυση των προβλημάτων (βλ. επίσης Carraher & Schliemann, υπό έκδοση).

Μήπως πρέπει να συμπεράνουμε ότι τα σχολεία θα έπρεπε να επιτρέπουν απλώς στους μαθητές να αναπτύσσουν τις δικές τους υπολογιστικές μεθόδους, χωρίς να προσπαθούν να τους επιβάλουν τα συμβατικά συστήματα; Δεν πιστεύουμε ότι τα αποτελέσματα μας οδηγούν σε αυτό το συμπέρασμα. Ο νοερός υπολογισμός έχει περιορισμούς που μπορούν να ξεπεραστούν μέσα από τον γραπτό υπολογισμό. Ένας απ' αυτούς είναι ο ενδογενής περιορισμός που επιβάλλεται στον πολλαπλασιασμό όταν πραγματοποιείται με διαδοχικές συνδυασμένες προσθέσεις, μια μέθοδος που γίνεται τρομερά αναποτελεσματική όταν οι αριθμοί είναι μεγάλοι.

Τα μαθηματικά που διδάσκονται στα σχολεία έχουν τη δυνατότητα να λειτουργήσουν σαν ένας «ενισχυτής των σκεπτικών διεργασιών», κατά την έννοια με την οποία έχει αναφερθεί ο Bruner (1972), τόσο στα μαθηματικά όσο και στη λογική. Έτσι, δεν αμφισβητούμε το γεγονός ότι οι διαδικασίες των σχολικών μαθηματικών μπορούν να προσφέρουν πλουσιότερες και ισχυρότερες εναλλακτικές λύσεις στις μαθηματικές διαδικασίες που αναδύονται σε μη σχολικές συνθήκες. Το βασικό ερώτημα επικεντρώνεται στην ορθή παιδαγωγική αφετηρία, δηλαδή από πού πρέπει ν' αρχίσουμε. Υποστηρίζουμε ότι οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να αμφισβητήσουν τη μέθοδο σύμφωνα με την οποία χειρίζονται τα μαθηματικά συστήματα σαν τυπικά θέματα από την αρχή, και θα πρέπει να αναζητήσουν τρόπους εισαγωγής και εφαρμογής αυτών των συστημάτων σε συγκεκριμένες καταστάσεις που επιτρέπουν την υποστήριξή τους από την ανθρώπινη καθημερινή λογική.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Berlinck, M.T. (1977). *Marginalidade Social e Relacoes de Classe em Sao Paulo*. Petropolis, RJ, Brazil: Vozes.

Bruner, J. (1972). *Relevance of Education*. London: Penguin.

Carraher, T., Carraher, D., & Schliemann, A. (1982). Na vida dez, na escola, zero: Os contextos culturais da aprendizagem da matematica. *Cadernos de Pesquisa, 42*, σσ. 79-86. (Sao Paulo, Brazil, special UNESCO issue for Latin America).

Carraher, T., & Schliemann, A. (υπό έκδοση). Computation routines prescribed by schools: Help or hindrance? *Journal for Research in Mathematics Education*.

Cavalcanti, C. (1978). *Viabilidade do Setor Informal. A Demanda de Pequenos Servicos no Grande Recife*. Recife, PE, Brazil: Instituto Joaquim Nabuco de Pesquisas Sociais.

Cavalcanti, C., & Duarte, R. (1980a). *A Procura de Espaco na Economia Urbana: O Setor Informal de Fortaleza*. Recife, PE, Brazil: SUDENE/FUNDAJ.

Cavalcanti, C., & Duarte, R. (1980b). *O Setor Informal de Salvador: Dimensoes, Natureza, Significacao*. Recife, PE, Brazil: SUDENE/FUNDAJ.

Donaldson, M. (1978). *Children's Minds*. New York: Norton.

Gay, J., & Cole, M. (1976). *The New Mathematics and an Old Culture: A Study of Learning among the Kpelle of Liberia*. New York: Holt, Rinehart & Winston.

Johnson-Laird, P.N., Legrenzi, P., & Sonino Legrenzi, M. (1972). Reasoning and a sense of reality. *British Journal of Psychology, 63*, σσ. 395-400.

Lave, J., Murtaugh, M., & de La Rocha, O. (1984). The dialectical construction of arithmetic practice. Στο B. Rogoff & J. Lave (επιμ.), *Everyday Cognition: Its Development in Social Context*, σσ. 67-94. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Lunzer, E.A., Harrison, C., & Davey, M. (1972). The four-card problem and the development of formal reasoning. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 24*, σσ. 326-339.

Luria, A.R. (1976). *Cognitive Development: Its Cultural and Social Foundations*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Reed, H.J., & Lave, J. (1981). Arithmetic as a tool for investigating relations between culture and cognition. Στο R.W. Casson (επιμ.), *Language, Culture and Cognition: Anthropological Perspectives*. New York: Macmillan.

Wason, P.C., & Shapiro, D. (1971). Natural and contrived experience in a reasoning problem. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 23*, σσ. 63-71.