Υπογραμμικοί Αλγόριθμοι

Δεύτερη Διάλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Πιθανοτικά εργαλεία.

⋆ Ανισότητα Markov: Για τυχαία μεταβλητή X η οποία παίρνει μη αρνητικές τιμές ισχύει

$$Pr[X \geq \lambda E[X]] \leq \frac{1}{\lambda}$$

Πιθανοτικά εργαλεία.

⋆ Ανισότητα Markov: Για τυχαία μεταβλητή X η οποία παίρνει μη αρνητικές τιμές ισχύει

$$Pr[X \geq \lambda E[X]] \leq \frac{1}{\lambda}$$

⋆ Ανισότητα Chebyshev: Για τυχαία μεταβλητή X έχουμε

$$Pr[||X - E[X]| \geq \lambda E[X]||] \leq \frac{Var(X)}{\lambda^2 (E[X])^2} \leq \frac{E[X^2}{\lambda^2 (E[X])^2}$$

Πιθανοτικά εργαλεία.

⋆ Ανισότητα Markov: Για τυχαία μεταβλητή X η οποία παίρνει μη αρνητικές τιμές ισχύει

$$Pr[X \geq \lambda E[X]] \leq \frac{1}{\lambda}$$

⋆ Ανισότητα Chebyshev: Για τυχαία μεταβλητή X έχουμε

$$Pr[|X - E[X]| \geq \lambda E[X]|] \leq \frac{Var(X)}{\lambda^2(E[X])^2} \leq \frac{E[X^2}{\lambda^2(E[X])^2}$$

⋆ Φράγμα Chernoff: Για ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$ με τιμές τσο $[0, 1]$ η τυχαία μεταβλητή $X := \sum_{i=1}^{n} X_i$ με $E[X] = \mu$ ικανοποιεί

$$Pr[|X - \mu| \geq \lambda\mu] \leq 2e^{-\lambda^2 \cdot \mu/3}$$

Γενικό πρόβλημα ροών δεδομένων.

Έστω ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ και έστω μια ροή δεδομένων $(i_1, \Delta_1), (i_2, \Delta_2), \ldots$, έτσι ώστε κάθε στοιχείο (i, Δ) να προκαλεί $x_i \leftarrow x_i + \Delta$.

Γενικό πρόβλημα ροών δεδομένων.

Έστω ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ και έστω μια ροή δεδομένων $(i_1, \Delta_1), (i_2, \Delta_2), \ldots$, έτσι ώστε κάθε στοιχείο (i, Δ) να προκαλεί $x_i \leftarrow x_i + \Delta$.

Για ποιες συναρτήσεις F μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά το $F(x)$ σε *υπογραμμικό χώρο*,

Γενικό πρόβλημα ροών δεδομένων.

Έστω ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ και έστω μια ροή δεδομένων $(i_1, \Delta_1), (i_2, \Delta_2), \ldots$, έτσι ώστε κάθε στοιχείο (i, Δ) να προκαλεί $x_i \leftarrow x_i + \Delta$.

Για ποιες συναρτήσεις F μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά το $F(x)$ σε *υπογραμμικό χώρο*, δηλαδή μικρότερο από το να διατηρήσουμε όλο το διάνυσμα ή όλη τη ροή?

Γενικό πρόβλημα ροών δεδομένων.

Έστω ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ και έστω μια ροή δεδομένων $(i_1, \Delta_1), (i_2, \Delta_2), \ldots$, έτσι ώστε κάθε στοιχείο (i, Δ) να προκαλεί $x_i \leftarrow x_i + \Delta$.

Για ποιες συναρτήσεις F μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά το $F(x)$ σε *υπογραμμικό χώρο*, δηλαδή μικρότερο από το να διατηρήσουμε όλο το διάνυσμα ή όλη τη ροή?

Η απάντηση ασφαλώς δεν είναι γενική, και αλλάζει ανάλογα με τη συνάρτηση.

Συναρτήσεις Κατακερματισμού.

Ορισμός: Μια οικογένεια $\mathcal{H}$ η οποία περιέχει συναρτήσεις $h : A \to B$ λέγεται ανά-k ανεξάρτητη αν για κάθε k διαφορετικά $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$ και $b_1, b_2, \ldots, b_k \in B$ ισχύει

$$Pr_{h \in \mathcal{H}}[h(a_i) = b_i, \forall i \in [k]] = \frac{1}{|B|^k}.$$

Συναρτήσεις Κατακερματισμού.

Ορισμός: Μια οικογένεια $\mathcal{H}$ η οποία περιέχει συναρτήσεις $h : A \rightarrow B$ λέγεται ανά-k ανεξάρτητη αν για κάθε k διαφορετικά $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$ και $b_1, b_2, \ldots, b_k \in B$ ισχύει

$$Pr_{h \in \mathcal{H}}[h(a_i) = b_i, \forall i \in [k]] = \frac{1}{|B|^k}.$$

Διαισθητικά, αν επιλέξω μια τυχαία συνάρτηση h από την οικογένεια τότε συμπεριφέρεται πάνω στις k-άδες ως μια τελείως τυχαία συνάρτηση.

Συναρτήσεις Κατακερματισμού.

Ορισμός: Μια οικογένεια $\mathcal{H}$ η οποία περιέχει συναρτήσεις $h : A \to B$ λέγεται ανά-k ανεξάρτητη αν για κάθε k διαφορετικά $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$ και $b_1, b_2, \ldots, b_k \in B$ ισχύει

$$Pr_{h \in \mathcal{H}}[h(a_i) = b_i, \forall i \in [k]] = \frac{1}{|B|^k}.$$

Διαισθητικά, αν επιλέξω μια τυχαία συνάρτηση h από την οικογένεια τότε συμπεριφέρεται πάνω στις k-άδες ως μια τελείως τυχαία συνάρτηση.

Γεγονός: Υπάρχουν ανά-k ανεξάρτητες $\mathcal{H}$ με μέγεθος $2^{O(k \log |A|)}$. Με άλλα λόγια, για να γράψουμε κάτω μια τυχαία συνάρτηση χρειαζόμαστε $O(k \log |A|)$ bits.

Αλγόριθμος AMS

Έστω ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ και έστω μια ροή δεδομένων $(i_1, \Delta_1), (i_2, \Delta_2), \ldots$, έτσι ώστε κάθε στοιχείο (i, Δ) να προκαλεί $x_i \leftarrow x_i + \Delta$.

Αλγόριθμος AMS

Έστω ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ και έστω μια ροή δεδομένων $(i_1, \Delta_1), (i_2, \Delta_2), \ldots$, έτσι ώστε κάθε στοιχείο (i, Δ) να προκαλεί $x_i \leftarrow x_i + \Delta$. Τότε μπορούμε να υπολογίσουμε *προσεγγιστικά* το $\sum_{i=1}^n x_i^2$ στο τέλος της ροής?

Αλγόριθμος AMS

Έστω ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ και έστω μια ροή δεδομένων $(i_1, \Delta_1), (i_2, \Delta_2), \ldots$, έτσι ώστε κάθε στοιχείο (i, Δ) να προκαλεί $x_i \leftarrow x_i + \Delta$. Τότε μπορούμε να υπολογίσουμε *προσεγγιστικά* το $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ στο τέλος της ροής?

Δύο κακές λύσεις: είτε να κρατήσουμε όλη τη ροή για $O(m)$ χώρο είτε όλο το διάνυσμα για $O(n)$ χώρο.

Αλγόριθμος AMS

Έστω ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ και έστω μια ροή δεδομένων $(i_1, \Delta_1), (i_2, \Delta_2), \ldots$, έτσι ώστε κάθε στοιχείο (i, Δ) να προκαλεί $x_i \leftarrow x_i + \Delta$. Τότε μπορούμε να υπολογίσουμε *προσεγγιστικά* το $\sum_{i=1}^n x_i^2$ στο τέλος της ροής?

Δύο κακές λύσεις: είτε να κρατήσουμε όλη τη ροή για $O(m)$ χώρο είτε όλο το διάνυσμα για $O(n)$ χώρο. Ωστόσο, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα με μια δομή χώρου

$$O(\epsilon^{-2} \log n) \texttt{ bits}$$

βρίσκοντας μια τιμή $\widetilde{V}$ ώστε

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i^2 - V \right| \leq \epsilon \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Υποθέσεις.

Θα υποθέσουμε ότι δουλεύουμε στο μοντέλο word RAM με μεγέθος λέξης $w = \Omega(\log n)$, δηλαδή μπορούμε να κάνουμε πράξεις μεταξύ αριθμών που έχουνε w bits σε *σταθερό* χρόνο.

Υποθέσεις.

Θα υποθέσουμε ότι δουλεύουμε στο μοντέλο word RAM με μεγέθος λέξης $w = \Omega(\log n)$, δηλαδή μπορούμε να κάνουμε πράξεις μεταξύ αριθμών που έχουνε w bits σε *σταθερό* χρόνο.

Με βάση τα παραπάνω, ο $O\left(\frac{\log n}{\epsilon^2}\right)$ χώρος της προηγούμενης διαφάνειες είναι το ίδιο σαν να λέμε $O(\frac{1}{\epsilon^2})$ *λέξεις*.

Υποθέσεις.

Θα υποθέσουμε ότι δουλεύουμε στο μοντέλο word RAM με μεγέθος λέξης $w = \Omega(\log n)$, δηλαδή μπορούμε να κάνουμε πράξεις μεταξύ αριθμών που έχουνε w bits σε *σταθερό* χρόνο.

Με βάση τα παραπάνω, ο $O\left(\frac{\log n}{\epsilon^2}\right)$ χώρος της προηγούμενης διαφάνειες είναι το ίδιο σαν να λέμε $O(\frac{1}{\epsilon^2})$ *λέξεις*. Έτσι θα δούμε μια δομή δεδομένων που

1. χρησιμοποιεί $O(\frac{1}{\epsilon^2})$ χώρο,
2. πετυχαίνει με σταθερή πιθανότητα,
3. ο χώρος ανανέωσης της δομής είναι $O(1)$.

Αλγόριθμος AMS

Έστω μια συνάρτηση $\sigma : [n] \rightarrow \{-1, +1\}$ η οποία έχει διαλεχθεί τυχαία από μία ανά 4-συνάρτηση κατακερματισμού. Θα λέμε ότι η h είναι ανά-2 ανεξάρτητη (αλλάζοντας λίγο την ορολογία).

Αλγόριθμος AMS

Έστω μια συνάρτηση $\sigma : [n] \to \{-1, +1\}$ η οποία έχει διαλεχθεί τυχαία από μία ανά 4-συνάρτηση κατακερματισμού. Θα λέμε ότι η h είναι ανά-2 ανεξάρτητη (αλλάζοντας λίγο την ορολογία).

⋆ Διατηρούμε το άθροισμα $V = \sum_{i=1}^{n} \sigma(i) x_i$.

Αλγόριθμος AMS

Έστω μια συνάρτηση $\sigma : [n] \to \{-1, +1\}$ η οποία έχει διαλεχθεί τυχαία από μία ανά 4-συνάρτηση κατακερματισμού. Θα λέμε ότι η h είναι ανά-2 ανεξάρτητη (αλλάζοντας λίγο την ορολογία).

⋆ Διατηρούμε το άθροισμα $V = \sum_{i=1}^{n} \sigma(i) x_i$.
Στην αρχή έχουμε $V = 0$, και όποτε έρχεται ένα νέο στοιχείο (i, Δ) θέτουμε

$$V + = \sigma(i) \cdot \Delta.$$

Έστω μια συνάρτηση $\sigma : [n] \to \{-1, +1\}$ η οποία έχει διαλεχθεί τυχαία από μία ανά 4-συνάρτηση κατακερματισμού. Θα λέμε ότι η h είναι ανά-2 ανεξάρτητη (αλλάζοντας λίγο την ορολογία).

⋆ Διατηρούμε το άθροισμα $V = \sum_{i=1}^{n} \sigma(i) x_i$.
Στην αρχή έχουμε $V = 0$, και όποτε έρχεται ένα νέο στοιχείο (i, Δ) θέτουμε

$$V += \sigma(i) \cdot \Delta.$$

⋆ Χρόνος ανανέωσης: $O(1)$

Αλγόριθμος AMS

Έστω μια συνάρτηση $\sigma : [n] \to \{-1, +1\}$ η οποία έχει διαλεχθεί τυχαία από μία ανά 4-συνάρτηση κατακερματισμού. Θα λέμε ότι η h είναι ανά-2 ανεξάρτητη (αλλάζοντας λίγο την ορολογία).

⋆ Διατηρούμε το άθροισμα $V = \sum_{i=1}^{n} \sigma(i) x_i$.
Στην αρχή έχουμε $V = 0$, και όποτε έρχεται ένα νέο στοιχείο (i, Δ) θέτουμε

$$V+ = \sigma(i) \cdot \Delta.$$

⋆ Χρόνος ανανέωσης: $O(1)$
⋆ Τελική τιμή του V είναι $V = \sum_{i=1} \sigma(i) x_i$.

Έστω μια συνάρτηση $\sigma : [n] \to \{-1, +1\}$ η οποία έχει διαλεχθεί τυχαία από μία ανά 4-συνάρτηση κατακερματισμού. Θα λέμε ότι η h είναι ανά-2 ανεξάρτητη (αλλάζοντας λίγο την ορολογία).

⋆ Διατηρούμε το άθροισμα $V = \sum_{i=1}^{n} \sigma(i) x_i$.
Στην αρχή έχουμε $V = 0$, και όποτε έρχεται ένα νέο στοιχείο (i, Δ) θέτουμε

$$V += \sigma(i) \cdot \Delta.$$

⋆ Χρόνος ανανέωσης: $O(1)$
⋆ Τελική τιμή του V είναι $V = \sum_{i=1} \sigma(i) x_i$.
Θα δείξουμε ότι $V^2 \approx \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Ανάλυση, βήμα I: Μέση Τιμή

$$E[V^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma(i) x_i\right)^2\right] =$$

Ανάλυση, βήμα Ι: Μέση Τιμή

$$E[V^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma(i)x_i\right)^2\right] = E[\sum_{i,j}\sigma(i)\sigma(j)x_ix_j]$$

και άρα

$$E[V^2] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + E[\sum_{i\neq j}\sigma(i)\sigma(j)x_ix_j] =$$

Ανάλυση, βήμα Ι: Μέση Τιμή

$$E[V^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma(i)x_i\right)^2\right] = E[\sum_{i,j}\sigma(i)\sigma(j)x_ix_j]$$

και άρα

$$E[V^2] = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 + E[\sum_{i\neq j}\sigma(i)\sigma(j)x_ix_j] = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 + \sum_{i\neq j}x_ix_jE[\sigma(i)\sigma(j)].$$

Ανάλυση, βήμα Ι: Μέση Τιμή

$$E[V^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma(i)x_i\right)^2\right] = E[\sum_{i,j}\sigma(i)\sigma(j)x_ix_j]$$

και άρα

$$E[V^2] = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 + E[\sum_{i\neq j}\sigma(i)\sigma(j)x_ix_j] = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 + \sum_{i\neq j}x_ix_jE[\sigma(i)\sigma(j)].$$

Όμως, λόγω της 4-ανεξαρτησίας της σ έχουμε
$E[\sigma(i)\sigma(j)] = E[\sigma(i)]\cdot E[\sigma(j)] = 0\cdot 0 = 0.$

Ανάλυση, βήμα Ι: Μέση Τιμή

$$E[V^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma(i)x_i\right)^2\right] = E[\sum_{i,j}\sigma(i)\sigma(j)x_ix_j]$$

και άρα

$$E[V^2] = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 + E[\sum_{i\neq j}\sigma(i)\sigma(j)x_ix_j] = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 + \sum_{i\neq j}x_ix_jE[\sigma(i)\sigma(j)].$$

Όμως, λόγω της 4-ανεξαρτησίας της σ έχουμε
$E[\sigma(i)\sigma(j)] = E[\sigma(i)]\cdot E[\sigma(j)] = 0\cdot 0 = 0.$

Άρα $E[V^2] = \sum_{i=1}^{n}x_i^2$ (αμερόληπτη εκτίμηση).

Ανάλυση, βήμα II: Διακύμανση

$$E[V^4] = E\left[\left(\sum_{i=1} \sigma(i)x_i\right)^4\right] =$$

Ανάλυση, βήμα ΙΙ: Διακύμανση

$$E[V^4] = E\left[\left(\sum_{i=1} \sigma(i) x_i\right)^4\right] =$$

$$= E\left[\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4} x_{i_1} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} \cdot \sigma(i_1)\sigma(i_2)\sigma(i_3)\sigma(i_4)\right] =$$

Ανάλυση, βήμα II: Διακύμανση

$$E[V^4] = E\left[\left(\sum_{i=1} \sigma(i)x_i\right)^4\right] =$$

$$= E\left[\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4} x_{i_1}x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} \cdot \sigma(i_1)\sigma(i_2)\sigma(i_3)\sigma(i_4)\right] =$$

$$= \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4} x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} \cdot E\left[\sigma(i_1)\sigma(i_2)\sigma(i_3)\sigma(i_4)\right].$$

Ανάλυση, βήμα ΙΙ: Διακύμανση

$$E[V^4] = E\left[\left(\sum_{i=1} \sigma(i)x_i\right)^4\right] =$$

$$= E\left[\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4} x_{i_1}x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} \cdot \sigma(i_1)\sigma(i_2)\sigma(i_3)\sigma(i_4)\right] =$$

$$= \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4} x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} \cdot E\left[\sigma(i_1)\sigma(i_2)\sigma(i_3)\sigma(i_4)\right].$$

Οι μόνοι όροι οι οποίοι δεν μηδενίζονται είναι όταν $i_1 = i_2 = i_3 = i_4$ ή όταν $i_1 = i_2, i_3 = i_4$ και οι συμμετρικές περιπτώσεις. Υπάρχουν $1 + \binom{4}{2}$ τέτοιοι όροι.

Ανάλυση, βήμα ΙΙ: Διακύμανση

$$E[V^4] = \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4} x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} \cdot E\left[\sigma(i_1)\sigma(i_2)\sigma(i_3)\sigma(i_4)\right] =$$

Ανάλυση, βήμα ΙΙ: Διακύμανση

$$E[V^4] = \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4} x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} \cdot E\left[\sigma(i_1)\sigma(i_2)\sigma(i_3)\sigma(i_4)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + \binom{4}{2} \sum_{i \neq j} x_i^2 x_j^2 \leq$$

Ανάλυση, βήμα II: Διακύμανση

$$E[V^4] = \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} \cdot E\left[\sigma(i_1)\sigma(i_2)\sigma(i_3)\sigma(i_4)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + \binom{4}{2} \sum_{i \neq j} x_i^2 x_j^2 \leq \binom{4}{2} \cdot \sum_{i,j} x_i^2 x_j^2 =$$

Ανάλυση, βήμα ΙΙ: Διακύμανση

$$E[V^4] = \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4} x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} \cdot E\left[\sigma(i_1)\sigma(i_2)\sigma(i_3)\sigma(i_4)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + \binom{4}{2} \sum_{i \neq j} x_i^2 x_j^2 \leq \binom{4}{2} \cdot \sum_{i,j} x_i^2 x_j^2 =$$

$$\binom{4}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^2 = \binom{4}{2} \left(E[V^2] \right)^2$$

Ανάλυση, βήμα ΙΙ: Διακύμανση

$$E[V^4] = \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4} x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} \cdot E\left[\sigma(i_1)\sigma(i_2)\sigma(i_3)\sigma(i_4)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + \binom{4}{2}\sum_{i\neq j} x_i^2 x_j^2 \leq \binom{4}{2} \cdot \sum_{i,j} x_i^2 x_j^2 =$$

$$\binom{4}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 = \binom{4}{2}\left(E[V^2]\right)^2$$

Χρησιμοποιώντας Chebyshev στη $Z = V^2$ έχουμε

$$Pr[|Z - E[Z]| \geq \epsilon Z] \leq \frac{Var(Z)}{\epsilon^2 \cdot (E[Z])^2} = \Omega\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right) \quad :-($$

Ενίσχυση Διακύμανσης

Η διακύμανση μας βγήκε μεγάλη, άρα το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να πάρουμε το μέσο όρο $R = \Theta\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$ εκτιμήσεων. Με άλλα λόγια, παίρνουμε R τυχαίες ανά-4 συναρτήσεις
$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_R : [n] \to \{-1, +1\}$

Ενίσχυση Διακύμανσης

Η διακύμανση μας βγήκε μεγάλη, άρα το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να πάρουμε το μέσο όρο $R = \Theta\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$ εκτιμήσεων. Με άλλα λόγια, παίρνουμε R τυχαίες ανά-4 συναρτήσεις $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_R : [n] \to \{-1, +1\}$ και διατηρούμε τα

$$V^{(r)} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_r(i) x_i, \forall r \in [i].$$

Ενίσχυση Διακύμανσης

Η διακύμανση μας βγήκε μεγάλη, άρα το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να πάρουμε το μέσο όρο $R = \Theta\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$ εκτιμήσεων. Με άλλα λόγια, παίρνουμε R τυχαίες ανά-4 συναρτήσεις $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_R : [n] \to \{-1, +1\}$ και διατηρούμε τα

$$V^{(r)} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_r(i) x_i, \forall r \in [i].$$

Η απάντηση τότε είναι $\frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}\left(V^{(r)}\right)^2$

Ενίσχυση Διακύμανσης

Η διακύμανση μας βγήκε μεγάλη, άρα το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να πάρουμε το μέσο όρο $R = \Theta\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$ εκτιμήσεων. Με άλλα λόγια, παίρνουμε R τυχαίες ανά-4 συναρτήσεις
$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_R : [n] \to \{-1, +1\}$ και διατηρούμε τα

$$V^{(r)} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_r(i) x_i, \forall r \in [i].$$

Η απάντηση τότε είναι $\frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}\left(V^{(r)}\right)^2$ και η ανάλυση προκύπτει με εφαρμογή της ανισότητας Chebyshev ακριβώς όπως στον αλγόριθμο του Morris.

Συνολικός χώρος: $R \cdot 1 = O\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$ λέξεις.

Ενίσχυση Διακύμανσης

Η διακύμανση μας βγήκε μεγάλη, άρα το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να πάρουμε το μέσο όρο $R = \Theta\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$ εκτιμήσεων. Με άλλα λόγια, παίρνουμε R τυχαίες ανά-4 συναρτήσεις $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_R : [n] \to \{-1, +1\}$ και διατηρούμε τα

$$V^{(r)} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_r(i) x_i, \forall r \in [i].$$

Η απάντηση τότε είναι $\frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \left(V^{(r)}\right)^2$ και η ανάλυση προκύπτει με εφαρμογή της ανισότητας Chebyshev ακριβώς όπως στον αλγόριθμο του Morris.

Συνολικός χώρος: $R \cdot 1 = O\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$ λέξεις.
Χρόνος ανανέωσης: $O(R) = O\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$,

Ενίσχυση Διακύμανσης

Η διακύμανση μας βγήκε μεγάλη, άρα το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να πάρουμε το μέσο όρο $R = \Theta\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$ εκτιμήσεων. Με άλλα λόγια, παίρνουμε R τυχαίες ανά-4 συναρτήσεις $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_R : [n] \rightarrow \{-1, +1\}$ και διατηρούμε τα

$$V^{(r)} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_r(i) x_i, \forall r \in [i].$$

Η απάντηση τότε είναι $\frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \left(V^{(r)}\right)^2$ και η ανάλυση προκύπτει με εφαρμογή της ανισότητας Chebyshev ακριβώς όπως στον αλγόριθμο του Morris.

Συνολικός χώρος: $R \cdot 1 = O\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$ λέξεις.
Χρόνος ανανέωσης: $O(R) = O\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$, όχι $O(1)$ όπως θέλαμε.

Βελτιώνοντας τον χρόνο ανανέωσης.

Θα δούμε έναν τρόπο να βελτιώσουμε τον χρόνο ανανέωσης σε $O(1)$ από $O(\frac{1}{\epsilon^2})$.

Βελτιώνοντας τον χρόνο ανανέωσης.

Θα δούμε έναν τρόπο να βελτιώσουμε τον χρόνο ανανέωσης σε $O(1)$ από $O(\frac{1}{\epsilon^2})$.
Έστω $h : [n] \to [R]$ μία ανά-4 ανεξάρτητη συνάρτηση για $R = \Theta(\frac{1}{\epsilon^2})$.

Βελτιώνοντας τον χρόνο ανανέωσης.

Θα δούμε έναν τρόπο να βελτιώσουμε τον χρόνο ανανέωσης σε $O(1)$ από $O(\frac{1}{\epsilon^2})$.
Έστω $h : [n] \to [R]$ μία ανά-4 ανεξάρτητη συνάρτηση για $R = \Theta(\frac{1}{\epsilon^2})$.
Ορίζουμε

$$V^{(r)} = \sum_{i \in [n] : h(i) = r} \sigma(i) x_i, \forall r \in [R].$$

Βελτιώνοντας τον χρόνο ανανέωσης.

Θα δούμε έναν τρόπο να βελτιώσουμε τον χρόνο ανανέωσης σε $O(1)$ από $O(\frac{1}{\epsilon^2})$.
Έστω $h : [n] \to [R]$ μία ανά-4 ανεξάρτητη συνάρτηση για $R = \Theta(\frac{1}{\epsilon^2})$.
Ορίζουμε

$$V^{(r)} = \sum_{i \in [n] : h(i) = r} \sigma(i) x_i, \forall r \in [R].$$

Με άλλα λόγια, κάθε συντεταγμένη $i \in [n]$ συνεισφέρει σε έναν από τους $R = \Theta(\frac{1}{\epsilon^2})$ μετρητές και **όχι** σε όλους. Έχουμε $Z := \sum_r (V^{(r)})^2$.

Βελτιώνοντας τον χρόνο ανανέωσης.

Θα δούμε έναν τρόπο να βελτιώσουμε τον χρόνο ανανέωσης σε $O(1)$ από $O(\frac{1}{\epsilon^2})$.
Έστω $h : [n] \to [R]$ μία ανά-4 ανεξάρτητη συνάρτηση για $R = \Theta(\frac{1}{\epsilon^2})$.
Ορίζουμε

$$V^{(r)} = \sum_{i \in [n] : h(i) = r} \sigma(i) x_i, \forall r \in [R].$$

Με άλλα λόγια, κάθε συντεταγμένη $i \in [n]$ συνεισφέρει σε έναν από τους $R = \Theta(\frac{1}{\epsilon^2})$ μετρητές και **όχι** σε όλους. Έχουμε $Z := \sum_r (V^{(r)})^2$.

Εύκολα $E[Z] = E\left[\sum_r (V^{(r)})^2\right] = \sum_r \sum_{i:h(i)=r} x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Βελτιώνοντας τον χρόνο ανανέωσης.

Θα δούμε έναν τρόπο να βελτιώσουμε τον χρόνο ανανέωσης σε $O(1)$ από $O(\frac{1}{\epsilon^2})$.
Έστω $h : [n] \to [R]$ μία ανά-4 ανεξάρτητη συνάρτηση για $R = \Theta(\frac{1}{\epsilon^2})$.
Ορίζουμε

$$V^{(r)} = \sum_{i \in [n] : h(i) = r} \sigma(i) x_i, \forall r \in [R].$$

Με άλλα λόγια, κάθε συντεταγμένη $i \in [n]$ συνεισφέρει σε έναν από τους $R = \Theta(\frac{1}{\epsilon^2})$ μετρητές και **όχι** σε όλους. Έχουμε $Z := \sum_r (V^{(r)})^2$.

Εύκολα $E[Z] = E\left[\sum_r (V^{(r)})^2\right] = \sum_r \sum_{i:h(i)=r} x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Αλλά τι συμβαίνει με τη διακύμανση?

Βελτιώνοντας τον χρόνο ανανέωσης.

$$E\left[\left(\sum_r (V^{(r)})^2\right)^2\right] = \sum_{r,r'} E[(V^{(r)} \cdot V^{(r')})^2] =$$

Βελτιώνοντας τον χρόνο ανανέωσης.

$$E\left[\left(\sum_r (V^{(r)})^2\right)^2\right] = \sum_{r,r'} E[(V^{(r)} \cdot V^{(r')})^2] =$$

$$\sum_{r,r'} E\left[\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4 : h(i_1)=h(i_2)=r, h(i_3)=h(i_4)=r'} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} \sigma(i_1)\sigma(i_2)\sigma(i_3)\sigma(i_4)\right]$$

Βελτιώνοντας τον χρόνο ανανέωσης.

$$E\left[\left(\sum_r (V^{(r)})^2\right)^2\right] = \sum_{r,r'} E[(V^{(r)} \cdot V^{(r')})^2] =$$

$$\sum_{r,r'} E\left[\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4:h(i_1)=h(i_2)=r,h(i_3)=h(i_4)=r'} x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}\sigma(i_1)\sigma(i_2)\sigma(i_3)\sigma(i_4)\right]$$

$$\leq (1+\frac{2}{R})\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 = (E[Z])^2 + \frac{2}{R}(E[Z])^2,$$

Βελτιώνοντας τον χρόνο ανανέωσης.

$$E\left[\left(\sum_r (V^{(r)})^2\right)^2\right] = \sum_{r,r'} E[(V^{(r)} \cdot V^{(r')})^2] =$$

$$\sum_{r,r'} E\left[\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4: h(i_1)=h(i_2)=r, h(i_3)=h(i_4)=r'} x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}\sigma(i_1)\sigma(i_2)\sigma(i_3)\sigma(i_4)\right]$$

$$\leq (1+\frac{2}{R})\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2 = (E[Z])^2 + \frac{2}{R}(E[Z])^2,$$

άρα $Var(Z) = E[Z^2] - (E[Z])^2 = \frac{2}{R}(E[Z])^2$, άρα από Chebyshev αρκεί όντως $R = \Theta(\frac{1}{\epsilon^2})$.

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!