Θεωρία τύπων

Νίκος Ρήγας

Έκδοση 2023-11-10

Περιεχόμενα

Μέρος I

Η θεωρία τύπων τού Martin-Löf

Κεφάλαιο 1

Τύποι και αναδρομή

Όλες οι θεωρίες τύπων πραγματεύονται τυχόντες τύπους. Εκείνο που τίς διαφοροποιεί μεταξύ τους είναι ποιούς τύπους προβλέπει η κάθε μία να υπάρχουν και τί μπορεί να πει για αυτούς. Μία ιδιαιτερότητα τής θεωρίας τύπων τού Martin-Löf είναι ότι δεν προβλέπει τήν ύπαρξη οποιωνδήποτε συγκεκριμένων τύπων· αντ' αυτού, περιέχει τά μέσα για τήν περιγραφή τύπων. Οι τύποι που μπορούν να οριστούν έτσι είναι οι *επαγωγικοί* τύποι.

Ένας επαγωγικός τύπος A μπορεί να γίνει αντιληπτός διαισθητικά ως ένας τύπος που προσδιορίζεται από μηδέν ή περισσότερους *κατασκευαστές*, καθένας από τούς οποίους είναι ένας τρόπος σχηματισμού (με παραμέτρους) στοιχείων τού A. Αυτό περιλαμβάνει σαν ειδική περίπτωση κατασκευαστές χωρίς παραμέτρους, οι οποίοι είναι μεμονομένα στοιχεία τού A.

1.1 Οι φυσικοί αριθμοί

Οι φυσικοί αριθμοί παράγονται από τό επαγωγικό σχήμα

- τό μηδέν είναι φυσικός αριθμός, και
- ο επόμενος καθενός φυσικού αριθμού είναι φυσικός αριθμός.

Σε τυποθεωρητικό συμβολισμό, η παραπάνω επαγωγική περιγραφή τών φυσικών αριθμών παίρνει τή μορφή

- $0 : \mathrm{Nat}$,
- εάν $n : \mathrm{Nat}$, τότε $\mathrm{s}(n) : \mathrm{Nat}$.

Επομένως, ο τύπος Nat έχει δύο κατασκευαστές: Τόν 0, που δεν έχει παραμέτρους, και τόν s, που έχει μία παράμετρο η οποία είναι επίσης στοιχείο τού Nat (οπότε είναι αναδρομικός κατασκευαστής). Αναπτύσσοντας, βλέπουμε ότι τά στοιχεία τού Nat είναι τά

$$0,\ \mathrm{s}(0),\ \mathrm{s}(\mathrm{s}(0)),\ \dots,$$

τά οποία καλούμε 0, 1, 2 και λοιπά.

Αν μάς έχει δοθεί ένα στοιχείο $t(x)$ ενός τύπου A για κάθε στοιχείο x τού τύπου A', αυτό που έχουμε είναι μία οικογένεια στοιχείων τού A παραμετροποιημένη από τόν

A', ή, στήν ορολογία που θα υιοθετήσουμε, για έναν *μετασχηματισμό* τών στοιχείων τού A' σε στοιχεία τού A.

Προκειμένου να δηλώσουμε έναν τέτοιον μετασχηματισμό, γράφουμε

$$(x : A')\, t(x) : A$$

ή τόν ισοδύναμο κανόνα σχηματισμού

$$\frac{x : A'}{t(x) : A}$$

και λέμε «για x στόν A', $t(x)$ στόν A», ή «ένα στοιχείο $t(x)$ τού A για τό τυχόν στοιχείο x τού A'». Ο ίδιος ο μετασχηματισμός γράφεται

$$(x : A')\, t(x)$$

(και, ενίοτε, απλώς t). Ομοίως, η έκφραση

$$(x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n)\, t(x_1, \dots, x_n) : A$$

δηλώνει έναν μετασχηματισμό με n τό πλήθος παραμέτρους. (Ένας μετασχηματισμός $()\, t() : A$ με μηδέν τό πλήθος παραμέτρους δεν είναι παρά ένα στοιχείο τού A· γενικά, στήν έννοια τού μετασχηματισμού συμπεριλαμβάνουμε και τά στοιχεία ως οριακή περίπτωση.)

Οι παράμετροι ενός μετασχηματισμού μπορεί να είναι οι ίδιες μετασχηματισμοί· αυτό αποτυπώνεται σε εκφράσεις όπως

$$(x : A, (y : B)\, z(y) : C)\, t(x, z),$$

όπου ο σημαινόμενος μετασχηματισμός έχει δύο παραμέτρους, εκ τών οποίων η μία είναι στοιχείο τού A και η άλλη είναι μετασχηματισμός στοιχείων τού B σε στοιχεία τού C.

Περίπτωση μετασχηματισμού είναι και οι κατασκευαστές.

1.2 Αναδρομή στούς φυσικούς αριθμούς

Οι κύριες χρησιμότητες τής επαγωγικής περιγραφής ενός τύπου είναι η διατύπωση ορισμών με αναδρομή και αποδείξεων με επαγωγή. Θα εξετάσουμε τώρα τήν περίπτωση τής αναδρομής· για τήν επαγωγή θα είμαστε σε θέση να μιλήσουμε μόλις εμπλουτίσουμε τή γλώσσα με οικογένειες τύπων.

Έστω C τύπος. Δοθέντων ενός $c_0 : C$ και ενός ενός $(x : \mathrm{Nat}, y : C) c_{\mathrm{s}}(x, y) : C$, μπορούμε να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{Nat})\, t(x) : C$ θέτοντας

$$\begin{aligned} t(0) &:\equiv c_0, \\ t(\mathrm{s}(n)) &:\equiv c_{\mathrm{s}}(n, t(n)). \end{aligned}$$

Λέμε ότι ο t ορίζεται με *αναδρομή (recursion)* από τά c_0 και c_{s}· η δυνατότητα διατύπωσης τέτοιων ορισμών είναι η *αρχή τής αναδρομής (recursion principle) για τόν* Nat.

Ως πρώτο παράδειγμα εφαρμογής τής αρχής τής αναδρομής, ας ορίσουμε έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{Nat})\, \mathrm{pred}(x) : \mathrm{Nat}$ που στέλνει τό μηδέν στό μηδέν και καθέναν άλλο φυσικό αριθμό στόν προηγούμενό του: Στήν περίπτωση αυτή, ο τύπος C είναι ο Nat (ο μόνος τύπος που έχουμε αυτή τή στιγμή), και οι ορίζουσες σχέσεις έχουν τή μορφή

$$\begin{aligned} \mathsf{pred}(0) &:\equiv 0, \\ \mathsf{pred}(\mathsf{s}(n)) &:\equiv n. \end{aligned}$$

Πρόκειται δηλαδή για τό στιγμιότυπο τού γενικού σχήματος τής αναδρομής όπου τό c_0 είναι τό 0 και τό $c_{\mathsf{s}}(x, y)$ είναι τό x.

Μπορούμε επίσης να ορίζουμε μετασχηματισμούς που έχουν περισσότερες από μία παραμέτρους, κάνοντας αναδρομή σε μία από αυτές. Τέτοια περίπτωση είναι η πρόσθεση φυσικών αριθμών, τήν οποία θα ορίσουμε με αναδρομή στόν δεξιό προσθετέο:

$$\begin{aligned} m + 0 &:\equiv m, \\ m + \mathsf{s}(n) &:\equiv \mathsf{s}(m + n). \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι τό $m + n$ ορίζεται με αναδρομή από τά m και $(x : \mathrm{Nat}, y : \mathrm{Nat})\ \mathsf{s}(y)$.

Ενίοτε δεν θέλουμε να δώσουμε όνομα στόν μετασχηματισμό που ορίζεται με αναδρομή· αυτό συμβαίνει π.χ. εάν θέλουμε να τόν αποτιμήσουμε αμέσως ή όταν εμφανίζεται ως όρισμα κάποιου άλλου μετασχηματισμού. Επίσης, για τή μεταμαθηματική μελέτη τής θεωρίας τύπων είναι απαραίτητο να μπορούμε να διατυπώσουμε τήν αρχή τής αναδρομής με τρόπο που να μην απαιτεί τήν προσθήκη στή γλώσσα ενός συμβόλου για κάθε ορίσιμο μετασχηματισμό. Αυτό τό επιτυγχάνουμε υποκαθιστώντας τήν αρχή τής αναδρομής με τό ένα και μοναδικό στιγμιότυπο αυτης στό οποίο τά c_0 και c_{s} έχουν περάσει μέσα στόν συμβολισμό ως ρητές παράμετροι. Ορίζουμε λοιπόν τόν *αναδρομέα (recursor)*

$$(z : C, (x : \mathrm{Nat}, y : C)\ w(x, y) : C, n : \mathrm{Nat})\ \mathsf{rec}^C_{\mathrm{Nat}}(z, w, n) : C$$

τού Nat μέσω τής αναδρομής

$$\begin{aligned} \mathsf{rec}^C_{\mathrm{Nat}}(z, w, 0) &:\equiv z, \\ \mathsf{rec}^C_{\mathrm{Nat}}(z, w, \mathsf{s}(n)) &:\equiv w(n, \mathsf{rec}^C_{\mathrm{Nat}}(z, w, n)). \end{aligned}$$

Συνήθως δεν υπάρχει ανάγκη να δηλωθεί ο τύπος C στόν συμβολισμό, οπότε τόν παραλείπουμε και γράφουμε απλώς $\mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(z, w, n)$.

Ο αναδρομέας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφραστεί οποιοσδήποτε αναδρομικός ορισμός. Ο προηγούμενος ενός φυσικού αριθμού, λόγου χάριν, μπορεί τώρα να γραφτεί

$$\mathsf{pred}(n) :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(0, (x : \mathrm{Nat}, y : \mathrm{Nat})\ x, n),$$

ενώ τό άθροισμα δύο φυσικών αριθμών,

$$m + n :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(m, (x : \mathrm{Nat}, y : \mathrm{Nat})\ \mathsf{s}(y), n).$$

Άσκηση 1.1. Έχοντας τήν πρόσθεση, ο πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned} m \cdot 0 &:\equiv 0, \\ m \cdot \mathsf{s}(n) &:\equiv (m \cdot n) + m. \end{aligned}$$

Γράψτε τό $m \cdot n$ χρησιμοποιώντας τόν αναδρομέα τού Nat. Προαιρετικά, συνεχίστε με τά m^n και $n!$.

Λύση. $m \cdot n :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(0, (x, y : \mathrm{Nat})\ x + m, n)$. □

1.3 Άλλα παραδείγματα τύπων

Λίστες

Οι λίστες στοιχείων ενός τύπου A συγκροτούν έναν τύπο $\mathrm{List}(A)$, ο οποίος περιγράφεται από τό επαγωγικό σχήμα

- $\mathsf{nil}_A : \mathrm{List}(A)$, και
- εάν $a : A$ και $l : \mathrm{List}(A)$, τότε $\mathsf{cons}_A(a, l) : \mathrm{List}(A)$,

όπου nil_A η κενή λίστα και $\mathsf{cons}_A(a, l)$ η προέκταση τής l με τήν προσθήκη τού a. Στήν πράξη, τά subscripts θα παραλείπονται όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης σχετικά με τό ποιός είναι ο A.

Η αρχή τής αναδρομής για τόν $\mathrm{List}(A)$ έχει τήν εξής μορφή: Εάν ο C είναι ένας οποιοσδήποτε τύπος, και μάς έχουν δοθεί ένα $c_{\mathsf{nil}} : C$ και ένα $c_{\mathsf{cons}}(x, y, z) : C$ για τυχόντα $x : A$, $y : \mathrm{List}(A)$, και $z : C$, οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\mathsf{nil}) &:\equiv c_{\mathsf{nil}}, \\ t(\mathsf{cons}(a, l)) &:\equiv c_{\mathsf{cons}}(a, l, t(l)) \end{aligned}$$

ορίζουν τό $t(l)$ για οποιαδήποτε λίστα l:$\mathrm{List}(A)$. Για παράδειγμα, τό μήκος $\mathsf{len}(l)$ μιας λίστας l ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &:\equiv 0, \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(a, l)) &:\equiv \mathsf{s}(\mathsf{len}(l)), \end{aligned}$$

και η συνένωση (concatenation) $l + k$ δύο λιστών l και k ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned} \mathsf{nil} \quad + k &:\equiv k, \\ \mathsf{cons}(a, l) + k &:\equiv \mathsf{cons}(a, l + k), \end{aligned}$$

ενώ τό άθροισμα $\mathsf{sum}(l)$ τών στοιχείων μιας λίστας l φυσικών αριθμών ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned} \mathsf{sum}(\mathsf{nil}) &:\equiv 0, \\ \mathsf{sum}(\mathsf{cons}(a, l)) &:\equiv a + \mathsf{sum}(l). \end{aligned}$$

Όπως κάναμε και με τόν Nat, μπορούμε να «πακετάρουμε» τήν αρχή τής αναδρομής τού $\mathrm{List}(A)$ σε έναν αναδρομέα

$$(v : C, (x : A, y : \mathrm{List}(A), z : C)\ w(x, y, z) : C, l : \mathrm{List}(A))\ \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(v, w, l) : C$$

οριζόμενο από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned} \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(v, w, \mathsf{nil}) &:\equiv v, \\ \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(v, w, \mathsf{cons}(a, l)) &:\equiv w(a, l, \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(v, w, l)), \end{aligned}$$

οπότε τό μήκος μιας λίστας μπορεί εναλλακτικά να οριστεί ως

$$\mathsf{len}(l) :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(0, (x : A, y : \mathrm{List}(A), z : \mathrm{Nat})\ \mathsf{s}(z), l),$$

η συνένωση δύο λιστών,

$$l + k :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(k, (x : A, y : \mathrm{List}(A), z : \mathrm{List}(A))\ \mathsf{cons}(x, z), l),$$

και τό άθροισμα μιας λίστας φυσικών αριθμών,

$$\mathsf{sum}(l) :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{List(Nat)}}(0, (x : A, y : \mathrm{List}(A), z : \mathrm{Nat})\ x + z, l).$$

Άσκηση 1.2. Η συνένωση $\mathsf{cat}(L) : \mathrm{List}(A)$ μιας λίστας $L : \mathrm{List}(\mathrm{List}(A))$ λιστών μελών ενός τύπου A έχει τόν αναδρομικό ορισμό

$$\begin{aligned}\mathsf{cat}(\mathsf{nil}_{\mathrm{List}(A)}) &:\equiv \mathsf{nil}_A,\\ \mathsf{cat}(\mathsf{cons}_{\mathrm{List}(A)}(l, L)) &:\equiv l + \mathsf{cat}(L).\end{aligned}$$

Γράψτε τό $\mathsf{cat}(L)$ χρησιμοποιώντας τόν αναδρομέα τού $\mathrm{List}(\mathrm{List}(A))$.

Λύση. $\mathsf{cat}(L) :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(\mathrm{List}(A))}(\mathsf{nil}_A, (x{:}\mathrm{List}(A), y{:}\mathrm{List}(\mathrm{List}(A)), z{:}\mathrm{List}(A))x{+}z, L)$. □

Δέντρα

Ο τύπος BTree τών δυαδικών δέντρων συλλαμβάνεται από τό επαγωγικό σχήμα

- $\mathsf{triv} : \mathrm{BTree}$,
- εάν $r : \mathrm{BTree}$ και $s : \mathrm{BTree}$, τότε $\mathsf{join}(r, s) : \mathrm{BTree}$.

Στόν BTree αντιστοιχεί η εξής αρχή αναδρομής: Δοθέντων ενός $c_{\mathsf{triv}} : C$ και ενός $(x, y : \mathrm{BTree}, z, w : C)\ c_{\mathsf{join}}(x, y, z, w) : C$, όπου C τυχών τύπος, μπορούμε να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{BTree})\ t(x) : C$ θέτοντας

$$\begin{aligned}t(\mathsf{triv}) &:\equiv c_{\mathsf{triv}},\\ t(\mathsf{join}(r, s)) &:\equiv c_{\mathsf{join}}(r, s, t(r), t(s)).\end{aligned}$$

Άσκηση 1.3. Περιγράψτε τή μορφή τού $\mathsf{rec}_{\mathrm{BTree}}$ και διατυπώστε τίς ορίζουσες σχέσεις του.

Λύση. Ο αναδρομέας τού BTree είναι ο μετασχηματισμός

$$(x : C, (w_1, w_2 : \mathrm{BTree}, w_3, w_4 : C)\ y(w_1, w_2, w_3, w_4) : C, z : \mathrm{BTree})\ \mathsf{rec}_{\mathrm{BTree}}(x, y, z) : C$$

με ορίζουσες σχέσεις

$$\begin{aligned}\mathsf{rec}_{\mathrm{BTree}}(x, y, \mathsf{triv}) &:\equiv x,\\ \mathsf{rec}_{\mathrm{BTree}}(x, y, \mathsf{join}(u, v)) &:\equiv y(u, v, \mathsf{rec}_{\mathrm{BTree}}(x, y, u), \mathsf{rec}_{\mathrm{BTree}}(x, y, v)).\end{aligned}$$ □

Τά δυαδικά δέντρα είναι ειδική περίπτωση δέντρων δεδομένης διακλάδωσης. Ο τύπος $\mathrm{Tree}(A)$ τών δέντρων με τύπο διακλάδωσης A ορίζεται από τό επαγωγικό σχήμα

- $\mathsf{triv}_A : \mathrm{Tree}(A)$,
- εάν $(x : A)\ b(x) : \mathrm{Tree}(A)$, τότε $\mathsf{join}_A(x : A)\ b(x) : \mathrm{Tree}(A)$.

Περιγραφικότερα, αυτό που λέει η δεύτερη ρήτρα είναι ότι εάν έχουμε ένα δέντρο $b(x)$ για κάθε $x : A$, μπορούμε να ενώσουμε αυτά τά δέντρα με μία καινούργια ρίζα και να φτιάξουμε ένα μεγάλο δέντρο $\mathsf{join}_A(x : A)\ b(x)$, τό οποίο περιέχει τά διάφορα $b(x)$ ως άμεσα υποδέντρα. Για να επεκτείνουμε τόν ορισμό ενός μετασχηματισμού t στό $\mathsf{join}_A(x : A)\ b(x)$, έχοντας ήδη διαθέσιμα τά $t(b(x))$ για $x : A$, χρειαζόμαστε έναν μετασχηματισμό

$$((x : A)\ y(x) : \mathrm{Tree}(A), (x : A)\ z(x) : C)\ c_{\mathsf{join}_A}(y, z) : C$$

οπότε, μαζί με ένα $c_{\mathsf{triv}_A} : C$ μπορούμε να ορίσουμε τόν t θέτοντας

$$\begin{aligned} t(\mathsf{triv}_A) &:\equiv c_{\mathsf{triv}_A}, \\ t(\mathsf{join}_A(x:A)\, b(x)) &:\equiv c_{\mathsf{join}_A}((x:A)\, b(x), (x:A)\, t(b(x))). \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι ο τύπος A εμφανίζεται αρνητικά στόν κατασκευαστή join_A, οπότε αναμένεται ότι τό $\mathrm{Tree}(A)$ συναρτάται ανταλλοίωτα με τό A. Πράγματι, ένας μετασχηματισμός

$$(x:B)\, u(x) : A$$

επάγει μία αναπαραμετροποίηση δέντρων

$$(x:\mathrm{Tree}(A))\, \mathrm{Tree}(u)(x) : \mathrm{Tree}(B)$$

με ορισμό

$$\begin{aligned} \mathrm{Tree}(u)(\mathsf{triv}_A) &:\equiv \mathsf{triv}_B, \\ \mathrm{Tree}(u)(\mathsf{join}_A(x:A)\, b(x)) &:\equiv \mathsf{join}_B(y:B)\, \mathrm{Tree}(u)(b(u(y))). \end{aligned}$$

Άσκηση 1.4. Περιγράψτε τόν αναδρομέα τού $\mathrm{Tree}(A)$, και εκφράστε τόν $\mathrm{Tree}(u)$ με τή βοήθειά του.

Λύση. Πρόκειται για τόν μετασχηματισμό

$$(x:C, ((a:A)\, v(a):\mathrm{Tree}(A), (a:A)\, w(a):C)\, y(v,w):C, z:\mathrm{Tree}(A)) \\ \mathsf{rec}_{\mathrm{Tree}(A)}(x,y,z):C$$

που ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned} \mathsf{rec}_{\mathrm{Tree}(A)}(x,y,\mathsf{triv}_A) &:\equiv x, \\ \mathsf{rec}_{\mathrm{Tree}(A)}(x,y,\mathsf{join}_A(a:A)\, b(a)) &:\equiv y((a:A)\, b(a), (a:A)\, \mathsf{rec}_{\mathrm{Tree}(A)}(x,y,b(a))). \end{aligned}$$

Ο $\mathrm{Tree}(u)$ γράφεται

$$\mathrm{Tree}(u)(x) :\equiv \\ \mathsf{rec}_{\mathrm{Tree}(A)}(\mathsf{triv}_B, ((a:A)\, v(a):\mathrm{Tree}(A), (a:A)\, w(a):\mathrm{Tree}(B))\, \mathsf{join}_B(y:B)\, w(u(y)), x).$$

□

Άσκηση 1.5. Στόν ορισμό τού $\mathrm{List}(A)$, ο τύπος A εμφανίζεται θετικά. Δοθέντος ενός μετασχηματισμού $(x:A)\, u(x):B$ ορίστε, χρησιμοποιώντας τήν αρχή τής αναδρομής ή τόν αναδρομέα τού $\mathrm{List}(A)$, τόν μετασχηματισμό $(x:\mathrm{List}(A))\, \mathrm{List}(u)(x):\mathrm{List}(B)$ ο οποίος απεικονίζει μία λίστα μελών τού A στή λίστα τών εικόνων τους μέσω τού u.

Λύση. Με αναδρομή:

$$\begin{aligned} \mathrm{List}(u)(\mathsf{nil}_A) &:\equiv \mathsf{nil}_B, \\ \mathrm{List}(u)(\mathsf{cons}_A(a,l)) &:\equiv \mathsf{cons}_B(u(a), \mathrm{List}(u)(l)). \end{aligned}$$

Με τόν αναδρομέα:

$$\mathrm{List}(u)(l) :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(\mathsf{nil}_B, (x:\mathrm{List}(A), y:A, z:\mathrm{List}(B))\, \mathsf{cons}_B(u(y),z), x).$$ □

Αληθοτιμές

Ο Bool είναι ο τύπος που έχει ακριβώς δύο μέλη false και true· επομένως, περιγράφεται από τό επαγωγικό σχήμα

- $\mathsf{false} : \mathrm{Bool}$,
- $\mathsf{true} : \mathrm{Bool}$.

Η αρχή τής αναδρομής για τόν Bool εκφράζει τό γεγονός ότι προκειμένου να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό μελών τού Bool σε μέλη ενός τύπου C δεν έχουμε παρά να πούμε τί κάνει με τό false και τί με τό true· συγκεκριμένα, δοθέντων ενός $c_{\mathsf{false}} : C$ και ενός $c_{\mathsf{true}} : C$, οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\mathsf{false}) &:\equiv c_{\mathsf{false}}, \\ t(\mathsf{true}) &:\equiv c_{\mathsf{true}} \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{Bool})\, t(x) : C$. Όπως πάντα, έχουμε έναν αναδρομέα

$$(x : C, y : C, z : \mathrm{Bool})\ \mathsf{rec}_{\mathrm{Bool}}(x, y, z) : C$$

με ορίζουσες σχέσεις

$$\begin{aligned} \mathsf{rec}_{\mathrm{Bool}}(x, y, \mathsf{false}) &:\equiv x, \\ \mathsf{rec}_{\mathrm{Bool}}(x, y, \mathsf{true}) &:\equiv y. \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, μπορούμε να ορίσουμε τόν αληθοπίνακα τής διάζευξης μέσω τής αναδρομής

$$\begin{aligned} \mathsf{or}(b, \mathsf{false}) &:\equiv b, \\ \mathsf{or}(b, \mathsf{true}) &:\equiv \mathsf{true}, \end{aligned}$$

ή, εναλλακτικά, με τή βοήθεια τού αναδρομέα τού Bool,

$$\mathsf{or}(b, c) :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Bool}}(b, \mathsf{true}, c).$$

Άσκηση 1.6. Ορίστε τούς αληθοπίνακες τής σύζευξης, τής συνεπαγωγής, και τής άρνησης.

Λύση. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι· π.χ., με αναδρομή στήν πρώτη μεταβλητή:

$$\begin{aligned} \mathsf{and}(b, c) &:\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Bool}}(\mathsf{false}, c, b), \\ \mathsf{ifthen}(b, c) &:\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Bool}}(\mathsf{true}, c, b). \\ \mathsf{not}(b) &:\equiv \mathsf{ifthen}(b, \mathsf{false}). \end{aligned}$$

□

1.4 Ασκήσεις

Άσκηση 1.7. Για $n : \mathrm{Nat}$, τό $\mathsf{iszero}(n) : \mathrm{Bool}$ ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned} \mathsf{iszero}(0) &:\equiv \mathsf{true}, \\ \mathsf{iszero}(\mathsf{s}(n)) &:\equiv \mathsf{false}. \end{aligned}$$

Γράψτε τό $\mathsf{iszero}(n)$ με τή βοήθεια τού αναδρομέα τού Nat.

Λύση. $\mathrm{iszero}(n) :\equiv \mathrm{rec}_{\mathrm{Nat}}(\mathrm{true}, (x : \mathrm{Nat}, y : \mathrm{Bool})\ \mathrm{false}, n)$. □

Άσκηση 1.8 (almost minus)**.** Για $m, n{:}\mathrm{Nat}$, η πράξη $m \dot{-} n$ ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned} m \dot{-} 0 &:\equiv m, \\ m \dot{-} \mathrm{s}(n) &:\equiv \mathrm{pred}(m \dot{-} n). \end{aligned}$$

Γράψτε τό $m \dot{-} n$ χρησιμοποιώντας τόν $\mathrm{rec}_{\mathrm{Nat}}$.

Λύση. $m \dot{-} n :\equiv \mathrm{rec}_{\mathrm{Nat}}(m, (x, y : \mathrm{Nat})\ \mathrm{pred}(y), n)$. □

Άσκηση 1.9 (insertion sort)**.** Ο μετασχηματισμός $(a{:}A, l{:}\mathrm{List}(A))\,\mathrm{insert}(a, l){:}\mathrm{List}(A)$ τής ένθεσης μέλους σε (ταξινομημένη) λίστα ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned} &\mathrm{insert}(a', \mathrm{nil}) &&:\equiv \mathrm{cons}(a', \mathrm{nil}), \\ &\mathrm{insert}(a', \mathrm{cons}(a, l)) &&:\equiv \mathrm{rec}_{\mathrm{Bool}}(\mathrm{cons}(a, \mathrm{insert}(a', l)), \mathrm{cons}(a', \mathrm{cons}(a, l)), a \leq a'), \end{aligned}$$

όπου $a \leq a' :\equiv \mathrm{iszero}(a \dot{-} a')$. Χρησιμοποιήστε αυτόν τόν μετασχηματισμό για να περιγράψετε τόν αλγόριθμο ταξινόμησης insertion sort. (Πρόκειται για τόν αλγόριθμο ο οποίος, προκειμένου να ταξινομήσει μία λίστα $\mathrm{cons}(a, l)$, ταξινομεί πρώτα τήν l και μετά κάνει insert τό a.)

Λύση. Με αναδρομή:

$$\begin{aligned} \mathrm{isort}(\mathrm{nil}) &:\equiv \mathrm{nil}, \\ \mathrm{isort}(\mathrm{cons}(a, l)) &:\equiv \mathrm{insert}(a, \mathrm{isort}(l)). \end{aligned}$$

Με τόν αναδρομέα:

$$\mathrm{isort}(l) :\equiv \mathrm{rec}_{\mathrm{List}(A)}(\mathrm{nil}, (x : A, y, z : \mathrm{List}(A))\ \mathrm{insert}(x, z), l).$$ □

Άσκηση 1.10. Ορίστε ακολουθία $(n : \mathrm{Nat})\ a_n$ με

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i.$$

[Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τόν List(Nat).]

Λύση. □

Κεφάλαιο 2

Οικογένειες τύπων και επαγωγή

Στό προηγούμενο κεφάλαιο διατυπώσαμε κάποιες αρχές αναδρομής, με τή βοήθεια τών οποίων μπορούμε να εκφράσουμε μετασχηματισμούς μεταξύ τών διαφόρων τύπων. Αυτό που φτιάξαμε, εν ολίγοις, είναι μία απλή συναρτησιακή γλώσσα. Ενδιαφερόμαστε όμως επίσης για τίς ιδιότητες αυτών τών μετασχηματισμών. Σε αυτό τό κεφάλαιο, καθώς και στό επόμενο, θα δούμε πώς μπορούμε, στό πλαίσιο τής θεωρίας τύπων, να διατυπώνουμε και να αποδεικνύουμε προτάσεις.

Σε αντίθεση με άλλες μαθηματικές θεωρίες και θεμελιώσεις τών μαθηματικών όπως η θεωρία συνόλων, στή θεωρία τύπων οι μαθηματικές προτάσεις, καθώς και οι αποδείξεις τους, είναι μαθηματικά αντικείμενα πρώτης κατηγορίας. Συγκεκριμένα, οι μαθηματικές προτάσεις αναπαρίστανται από τύπους, που μπορούν να θεωρηθούν ταυτόχρονα μαθηματικές δομές και μαθηματικοί ισχυρισμοί, μία σύλληψη γνωστή ως propositions-as-types. Υπό αυτή τή σκοπιά, τά στοιχεία ενός τύπου νοούνται ως *τεκμήρια* ή *μάρτυρες* αλήθειας τής αντίστοιχης πρότασης. (Μερικές φορές λέγονται επίσης αποδείξεις, αλλά αυτή η ορολογία μπορεί να είναι παραπλανητική, επομένως γενικά τήν αποφεύγουμε.) Μία άμεση μεθοδολογική συνέπεια είναι ότι προκειμένου να δείξουμε ότι μία πρόταση αληθεύει δεν έχουμε παρά να εμφανίσουμε ένα στοιχείο τού τύπου που αντιστοιχεί σε αυτή τήν πρόταση.

Ωστόσο, αυτή η οπτική σχετικά με τίς αποδείξεις διαφέρει ουσιωδώς από τή συνήθη. Ο τρόπος με τόν οποίο η λογική γίνεται αντιληπτή από τή θεωρία τύπων είναι ότι μια πρόταση δεν είναι απλώς αληθής ή ψευδής, αλλά μάλλον μπορεί να νοηθεί ως η συλλογή όλων τών δυνατών τεκμηρίων αλήθειας της. Σύμφωνα με αυτήν τή σύλληψη, οι αποδείξεις δεν είναι μόνο τό μέσο επικοινωνίας τών μαθηματικών, αλλά αποτελούν και οι ίδιες αντικείμενο μελέτης ισότιμο με πιο οικεία αντικείμενα όπως οι αριθμοί και οι συναρτήσεις.

2.1 Οικογένειες τύπων

Θα μιλήσουμε τώρα για τό ένα από τά δύο δομικά στοιχεία τών προτάσεων, τά κατηγορήματα· τό άλλο, οι λογικές σταθερές (οι σύνδεσμοι και οι ποσοδείκτες), είναι τό αντικείμενο τού επόμενου κεφαλαίου.

Μία *οικογένεια τύπων (type family)* είναι ένας μετασχηματισμός τών στοιχείων κάποιων τύπων σε τύπους. Σε μία οικογένεια $(x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n)\, A(x_1, \dots, x_n)$, οι $A_1, \dots, A_n$

λέγονται τύποι δεικτών (indexing types), και οι επιμέρους τύποι $A(x_1, \dots, x_n)$ λέγονται στιγμιότυπα (instances) τής οικογένειας.

Οι οικογένειες τύπων, που επίσης λέγονται εξαρτώμενοι τύποι (dependent types), ήταν μία από τίς σημαντικότερες καινοτομίες τής θεωρίας τύπων τού Martin-Löf. Τυπικά παραδείγματα οικογενειών τύπων αποτελούν τά διάφορα κατηγορήματα $(x, y{:}A)x = y$, $(x{:}\mathrm{Nat})\mathrm{Prime}(x)$ κ.λπ. που συναντάμε στά μαθηματικά. Ένα στοιχειώδες, αλλά σημαντικό, παράδειγμα οικογένειας είναι η σταθερή οικογένεια $(x : A)\ B$ όπου A και B είναι τύποι. Και βέβαια, μία οικογένεια $()\ A()$ με μηδέν τό πλήθος ορίσματα δεν είναι παρά ένας τύπος.

Ο απλούστερος τρόπος να ορίσουμε μία οικογένεια είναι προδιαγράφοντας κατασκευαστές στά διάφορα στιγμιότυπά της, όπως κάναμε ήδη για μεμονωμένους τύπους. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτόν τόν τρόπο για να ορίσουμε τήν ισότητα. Μάλιστα, θα τήν ορίσουμε με δύο τρόπους: Πρώτα σαν οικογένεια ως προς τό ένα από τα δύο σκέλη (με τό άλλο να λειτουργεί σαν παράμετρος), και μετά σαν οικογένεια ως προς αμφότερα τά σκέλη.

2.2 Βασισμένη ισότητα

Έστω $a : A$, όπου A τύπος. Η *ισότητα προς a* είναι η οικογένεια

$$(x : A)\ a =_A x$$

που έχει τόν μοναδικό κατασκευαστή

$$\mathsf{refl}_a : a =_A a.$$

Εφ' όσον δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης (ο A προσδιορίζεται μονοσήμαντα ως ο τύπος των σκελών τής ισότητας), ο δείκτης παραλείπεται και γράφουμε, απλούστερα, $a = b$. Πρέπει, ωστόσο, να θυμόμαστε ότι πρόκειται για μία διαφορετική οικογένεια για κάθε τύπο A και για κάθε στοιχείο a αυτού.

Η ισότητα προς a λέγεται επίσης *βασισμένη (based)* ισότητα, διότι τό ένα σκέλος (τό αριστερό στόν συμβολισμό μας) κρατιέται σταθερό, σε αντιδιαστολή με τήν (απλώς) ισότητα που θα ορίσουμε παρακάτω, η οποία είναι οικογένεια ως προς αμφότερα τά σκέλη. Οι δύο ορισμοί διαφέρουν όσον αφορά τή μορφή τού αναδρομέα, αλλά είναι ισοδύναμοι· για τόν λόγο αυτόν χρησιμοποιούμε τό ίδιο σύμβολο.

Σχετικά με τήν αρχή τής αναδρομής, παρατηρήστε ότι η ισότητα προς a είναι οικογένεια, οπότε αυτό που ορίζεται είναι μετασχηματισμοί προς οικογένειες επί τού ίδιου τύπου δεικτών A, και επίσης ότι έχουμε μόνο έναν κατασκευαστή, οπότε αρκεί να πούμε τί κάνει ένας τέτοιος μετασχηματισμός με αυτόν. Αναλυτικότερα, ας θεωρήσουμε ότι μάς έχουν δοθεί

- μία οικογένεια $(x : A)\ C(x)$, και
- ένα στοιχείο c_{refl_a} τού $C(a)$.

Τότε, η σχέση

$$t(a, \mathsf{refl}_a) :\equiv c_{\mathsf{refl}_a}$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(x : A, p : a = x)\ t(x, p) : C(x)$.

Αν συγκρίνουμε αυτή τήν αρχή αναδρομής με εκείνες τών μεμονωμένων τύπων, θα παρατηρήσουμε ότι εδώ έχουμε ένα παραπάνω όρισμα, ο ρόλος τού οποίου είναι να προσδιορίζει σε ποιο στιγμιότυπο βρισκόμαστε κάθε φορά.

Ο αναδρομέας τής ισότητας προς a είναι ο μετασχηματισμός

$$(b : A, c : C(a), p : a = b)\ \mathsf{rec}^{C}_{a=b}(c, p) : C(b) \tag{2.1}$$

που ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\mathsf{rec}^{C}_{a=a}(c, \mathsf{refl}_a) :\equiv c. \tag{2.2}$$

Ο κανόνας σχηματισμού τού αναδρομέα (συμπεριλαμβάνοντας και τήν παράμετρο a) μάς δίνει τήν ευκαιρία να εισαγάγουμε τόν συμβολισμό που θα χρησιμοποιούμε στό εξής:

$$\frac{a : A \qquad b : A \qquad c : C(a) \qquad p : a = b}{\mathsf{transport}^{C}(p, c) :\equiv \mathsf{rec}^{C}_{a=b}(c, p) : C(b)}\ . \tag{2.3}$$

Ο συμβολισμός $\mathsf{transport}^{C}(p, c)$ προέρχεται από τήν ομοτοπική θεωρία τύπων και διαβάζεται «μεταφορά τού $c : C(a)$ στό $C(b)$ κατά μήκος τού $p : a = b$».

Αν από τόν (2.3) διατηρήσουμε μόνο τούς τύπους εκείνους που είναι ερμηνεύσιμοι ως προτάσεις, παίρνουμε τόν κανόνα απαλοιφής

$$\frac{C(a) \qquad a = b}{C(b)} \tag{$=^*$E}$$

τής βασισμένης ισότητας, γνωστό και ως *indiscernibility of identicals*, ο οποίος εκφράζει τό γεγονός ότι τά ίσα μοιράζονται τίς ίδιες ιδιότητες.

Όπως αναμένεται, η ισότητα είναι σχέση ισοδυναμίας. Η ανακλαστικότητα εξασφαλίζεται από τόν κανόνα εισαγωγής

$$\frac{}{a = a}\ . \tag{=I}$$

Εν συνεχεία, αν θεωρήσουμε τήν οικογένεια $(x : A)\ C(x)$ με

$$C(x) :\equiv x = a,$$

ο ($=^*$E) παίρνει τή μορφή

$$\frac{\overline{a = a} \qquad a = b}{b = a}\ .$$

Αν επαναφέρουμε τά στοιχεία, παίρνουμε τήν τυποθεωρητική κατασκευή

$$\frac{\mathsf{refl}_a : a = a \qquad p : a = b}{\mathsf{transport}^{-=a}(p, \mathsf{refl}_a) : b = a}\ .$$

Λήμμα 2.2.1 (Συμμετρία)**.** *Για $a, b : A$ και $p : a = b$ ορίζεται πράξη*

$$p^{-1} :\equiv \mathsf{transport}^{-=a}(p, \mathsf{refl}_a) : b = a.$$

Επιπλέον, $\mathsf{refl}_a^{-1} \equiv \mathsf{refl}_a$.

Τέλος, αν θέσουμε $C(x) :\equiv a = x$, παίρνουμε τήν απαγωγή

$$\frac{a = b \qquad b = c}{a = c}\ .$$

Αν επαναφέρουμε τά στοιχεία, παίρνουμε τήν τυποθεωρητική κατασκευή

$$\frac{p : a = b \qquad q : b = c}{\mathsf{transport}^{a=-}(q, p) : a = c}\ .$$

Λήμμα 2.2.2 (Μεταβατικότητα)**.** *Για $a, b, c : A$, $p : a = b$, και $q : b = c$ ορίζεται πράξη*

$$p \bullet q :\equiv \mathsf{transport}^{a = \_}(q, p) : a = c.$$

Επιπλέον, $\mathsf{refl}_a \bullet \mathsf{refl}_a \equiv \mathsf{refl}_a$.

Άλλο πόρισμα τού (=*E) είναι ότι η βασισμένη ισότητα διατηρείται από μετασχηματισμούς· προκειμένου για έναν μετασχηματισμό $(x : A)\ u(x) : B$, τό ζητούμενο προκύπτει θεωρώντας στή θέση τού $C(x)$ τό $u(a) = u(x)$. Τό επόμενο λήμμα εισάγει έναν χρήσιμο συμβολισμό.

Λήμμα 2.2.3. *Έστω $(x{:}A)u(x){:}B$ μετασχηματισμός. Για οποιαδήποτε $a, b{:}A$ και $p{:}a = b$, ορίζεται*

$$u(p) : u(a) = u(b),$$

ούτως ώστε $u(\mathsf{refl}_a) \equiv \mathsf{refl}_{u(a)}$.

Απόδειξη. Θα ορίσουμε τό $u(p)$ με αναδρομή στό p. Θεωρούμε λοιπόν, για $a : A$, τήν οικογένεια $(x : A)\ u(a) = u(x)$, τήν οποία θα γράφουμε συντομότερα $u(a) = u(\_)$, και ορίζουμε τόν μετασχηματισμό $(x{:}A, p{:}a = x)t(x, p){:}u(a) = u(x)$ μέσω τής αναδρομής

$$t(a, \mathsf{refl}_a) :\equiv \mathsf{refl}_{u(a)} : u(a) = u(a).$$

Για $p : a = b$ θέτουμε $u(p) :\equiv t(b, p)$. Τό δεύτερο ζητούμενο είναι άμεσο:

$$u(\mathsf{refl}_a) \equiv t(a, \mathsf{refl}_a) \equiv \mathsf{refl}_{u(a)}. \qquad \square$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να ορίσουμε απ' ευθείας τό $u(p)$ επικαλούμενοι τόν αναδρομέα τής ισότητας:

$$u(p) :\equiv \mathsf{transport}^{u(a) = u(\_)}(p, \mathsf{refl}_{u(a)}).$$

Αυστηρά μιλώντας, θα έπρεπε να γράφουμε $u(a, b, p)$ αντί για $u(p)$, αλλά ακολουθούμε τήν πρακτική τής παράλειψης τών εννοουμένων. Επιπλέον, θεωρητικά, ο συμβολισμός αυτός είναι διφορούμενος (χρησιμοποιούμε τό ίδιο σύμβολο για έναν μετασχηματισμό στοιχείων τού A και έναν μετασχηματισμό στοιχείων τού $a = b$), αλλά στήν πράξη δεν προκαλεί σύγχυση. Ακολουθεί τήν καθιερωμένη στή θεωρία κατηγοριών πρακτική τής χρήσης τού ίδιου συμβόλου για τήν εφαρμογή ενός συναρτητή σε αντικείμενα και σε μορφισμούς.

2.3 Επαγωγή

Η προσθήκη οικογενειών τύπων στή θεωρία μάς δίνει τή δυνατότητα να ισχυροποιήσουμε τίς αρχές αναδρομής τών διαφόρων τύπων. Θα πάρουμε ως παράδειγμα τούς φυσικούς αριθμούς: Η έννοια ενός αναδρομικού ορισμού

$$\begin{aligned} t(0) &:\equiv c, \\ t(\mathsf{s}(n)) &:\equiv f_n(t(n)), \end{aligned}$$

όπου $c{:}C$ και $(n{:}\mathrm{Nat}, x{:}C)\ f_n(x){:}C$, είναι ότι ο t μπορεί να υπολογιστεί σε βήματα:

$$\begin{aligned} t(0) &\equiv c, \\ t(1) &\equiv f_0(t(0)), \\ t(2) &\equiv f_1(t(1)), \end{aligned}$$

και ούτω καθεξής. Σχηματικά, οι τιμές τού t λαμβάνονται «κυνηγώντας» τό c κατά μήκος τού διαγράμματος

$$C \xrightarrow{f_0} C \xrightarrow{f_1} C \xrightarrow{f_2} \cdots.$$

Η ίδια, όμως, διαδικασία υπολογισμού εφαρμόζεται και στό γενικότερο διάγραμμα

$$C_0 \xrightarrow{f_0} C_1 \xrightarrow{f_1} C_2 \xrightarrow{f_2} \cdots,$$

όπου, αντί για έναν τύπο C, έχουμε μία οικογένεια τύπων $(n : \mathrm{Nat})\ C_n$. Οδηγούμαστε έτσι στήν *αρχή τής επαγωγής* τού Nat: Δοθέντων

- μιας οικογένειας $(x : \mathrm{Nat})\ C(x)$,
- ενός $c_0 : C(0)$, και
- ενός μετασχηματισμού $(x : \mathrm{Nat}, y : C(x))\ c_{\mathrm{s}}(x, y) : C(\mathrm{s}(x))$,

οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(0) &:\equiv c_0, \\ t(\mathrm{s}(n)) &:\equiv c_{\mathrm{s}}(n, t(n)) \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό

$$(x : \mathrm{Nat})\ t(x) : C(x).$$

Με ανάλογο τρόπο γενικεύονται οι αρχές αναδρομής τών άλλων τύπων. Η αρχή τής επαγωγής για τόν $\mathrm{List}(A)$, π.χ., διαμορφώνεται ως εξής: Δοθέντων

- μιας οικογένειας $(x : \mathrm{List}(A))\ C(x)$,
- ενός $c_{\mathsf{nil}} : C(\mathsf{nil})$, και
- ενός μετασχηματισμού $(x : A, y : \mathrm{List}(A), z : C(x))\ c_{\mathsf{cons}}(x, y, z) : C(\mathsf{cons}(x, y))$,

οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\mathsf{nil}) &:\equiv c_{\mathsf{nil}}, \\ t(\mathsf{cons}(a, l)) &:\equiv c_{\mathsf{cons}}(a, l, t(l)), \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{List}(A))\ t(x) : C(x)$.

Άσκηση 2.1. Διατυπώστε τίς αρχές επαγωγής τών $\mathrm{Tree}(A)$ και Bool.

Λύση. Διατυπώνουμε τήν αρχή επαγωγής για τόν $\mathrm{Tree}(A)$: Δοθέντων

- μιας οικογένειας $(x : \mathrm{Tree}(A))\ C(x)$,
- ενός $c_{\mathsf{triv}_A} : C(\mathsf{triv}_A)$, και
- ενός μετασχηματισμού
$((x : A)\ y(x) : \mathrm{Tree}(A), (x : A)\ z(x) : C)\ c_{\mathsf{join}_A}(y, z) : C(\mathsf{join}_A(x : A)\ y(x)),$

οι σχέσεις

$$
\begin{aligned}
t(\mathsf{triv}_A) &:\equiv c_{\mathsf{triv}_A}, \\
t(\mathsf{join}_A(x:A)\,b(x)) &:\equiv c_{\mathsf{join}_A}((x:A)\,b(x),(x:A)\,t(b(x)))
\end{aligned}
$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό $(x:\mathrm{Tree}(A))\,t(x):C(x)$. $\square$

Η αρχή τής επαγωγής τού Nat οφείλει τήν ονομασία της στό ότι εμπεριέχει τήν οικεία μέθοδο απόδειξης ιδιοτήτων τών φυσικών με επαγωγή: Εάν $\phi(x)$ είναι μία ιδιότητα φυσικών αριθμών, από μία απόδειξη c_0 τής $\phi(0)$ και μία απόδειξη $c_{\mathsf{s}}(x,y)$ τής $\phi(\mathsf{s}(x))$ από τήν $\phi(x)$ λαμβάνουμε, μέσω τού μετασχηματισμού t που ορίζεται με επαγωγή από τά c_0 και c_{s}, μία απόδειξη $t(x)$ τής $\phi(x)$ για τυχόντα φυσικό αριθμό x. Αυτό είναι σκόπιμο να τό διατυπώσουμε ξεχωριστά:

Αρχή τής απόδειξης με επαγωγή στόν Nat: Προκειμένου να αποδείξουμε μία ιδιότητα $C(n)$ για όλους τούς φυσικούς αριθμούς n, αρκεί

- να δείξουμε τό $C(0)$, και
- να δείξουμε τό $C(\mathsf{s}(n))$ από τό $C(n)$, για τυχόν n.

Η γενίκευση τού αναδρομέα για τήν αρχή τής επαγωγής ονομάζεται *επαγωγέας* και συμβολίζεται ind· για τούς φυσικούς αριθμούς, έχει τή μορφή

$$
\frac{z:C(0) \qquad (x:\mathrm{Nat},y:C(x))\,w(x,y):C(\mathsf{s}(x)) \qquad n:\mathrm{Nat}}{\mathsf{ind}_{\mathrm{Nat}}(z,w,n):C(n)}\,.
$$

Ως παράδειγμα εφαρμογής τής αρχής τής επαγωγής, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να δείξουμε ότι η πρόσθεση φυσικών αριθμών είναι αντιμεταθετική,

$$
n+m=m+n,
$$

με επαγωγή στό n. Αφ' ενός έχουμε να δείξουμε ότι $0+m=m+0$, τό οποίο, δεδομένου ότι $m+0\equiv m$, γράφεται ισοδύναμα

$$
0+m=m. \tag{2.4}
$$

Αφ' ετέρου, έχουμε να δείξουμε ότι εάν $n+m=m+n$, τότε $\mathsf{s}(n)+m=m+\mathsf{s}(n)$, τό οποίο, δεδομένου ότι $m+\mathsf{s}(n)\equiv\mathsf{s}(m+n)$, και αξιοποιώντας τήν επαγωγική υπόθεση, γράφεται ισοδύναμα

$$
\mathsf{s}(n)+m=\mathsf{s}(n+m). \tag{2.5}
$$

Παρατηρήστε ότι οι σχέσεις (2.4) και (2.5) είναι οι ορίζουσες σχέσεις τής πρόσθεσης αντεστραμμένες· αυτό φαίνεται καλύτερα εάν θεσουμε $m+'n:\equiv n+m$:

$$
\begin{aligned}
m+'0 &= m, \\
m+'\mathsf{s}(n) &= \mathsf{s}(m+'n).
\end{aligned}
$$

Αυτό που μόλις διαπιστώσαμε είναι ειδική περίπτωση τού εξής αποτελέσματος.

Θεώρημα 2.3.1 (μοναδικότητα τού definiendum). *Ας θεωρήσουμε τόν αναδρομικό ορισμό*

$$\begin{aligned} t(0) &:\equiv c_0, \\ t(\mathrm{s}(n)) &:\equiv c_{\mathrm{s}}(n, t(n)), \end{aligned}$$

όπου $c_0 : C$ *και* $(n : \mathrm{Nat}, x : C)\ c_{\mathrm{s}}(n, x) : C$, *και ας υποθέσουμε ότι μάς έχει δοθεί ένας μετασχηματισμός* $(n : \mathrm{Nat})\ u(n) : C$ *μαζί με τά εξής δεδομένα:*

1. *ένα* $p_0 : u(0) = c_0$, *και*
2. *ένα* $p_{\mathrm{s}}(n) : u(\mathrm{s}(n)) = c_{\mathrm{s}}(n, u(n))$ *για κάθε* $n : \mathrm{Nat}$.

Τότε, ορίζεται μετασχηματισμός

$$(n : \mathrm{Nat})\ p(n) : u(n) = t(n).$$

Απόδειξη. Θα ορίσουμε τόν p με επαγωγή. Η μία ρήτρα τού ορισμού είναι προφανής:

$$p(0) :\equiv p_0 : u(0) = c_0 \equiv t(0). \tag{2.6}$$

Όσον αφορά τήν άλλη, εάν $p(n) : u(n) = t(n)$, τότε παίρνουμε

$$p_{\mathrm{s}}(n) : u(\mathrm{s}(n)) = c_{\mathrm{s}}(n, u(n))$$

και

$$c_{\mathrm{s}}(n, p(n)) : c_{\mathrm{s}}(n, u(n)) = c_{\mathrm{s}}(n, t(n)) \equiv t(\mathrm{s}(n))$$

(με τόν συμβολισμό που εισαγάγαμε παραπάνω για τό $c_{\mathrm{s}}(n, \_)(p(n))$), οπότε μπορούμε να επικαλεστούμε τή μεταβατικότητα τής ισότητας και να θέσουμε

$$p(\mathrm{s}(n)) :\equiv p_{\mathrm{s}}(n) \bullet c_{\mathrm{s}}(n, p(n)) : u(\mathrm{s}(n)) = t(\mathrm{s}(n)). \tag{2.7}$$

Ο p ορίστηκε με επαγωγή από τίς (2.6) και (2.7). ☐

Άσκηση 2.2. Συμπληρώστε τήν απόδειξη τής αντιμεταθετικότητας τής πρόσθεσης. Συγκεκριμένα, ορίστε, με επαγωγή στό m, μετασχηματισμούς

$$(m : \mathrm{Nat})\ p_0(m) : 0 + m = m$$

και

$$(n, m : \mathrm{Nat})\ p_{\mathrm{s}}(n, m) : \mathrm{s}(n) + m = \mathrm{s}(n + m)$$

και μετά εφαρμόστε τό θεώρημα 2.3.1 για να συμπεράνετε ότι $n + m = m + n$ για οποιαδήποτε $m, n : \mathrm{Nat}$.

Λύση. Για να ορίσουμε τό p_0 χρειαζόμαστε, αφ' ενός, ένα

$$p_0(0) : 0 + 0 = 0.$$

Εν τώ μεταξύ, $0 + 0 \equiv 0$, οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$p_0(0) :\equiv \mathsf{refl}_0.$$

Αφ' ετέρου, υποθέτοντας ότι έχουμε ορίσει τό $p_0(m) : 0 + m = m$, χρειαζόμαστε ένα

$$p_0(\mathsf{s}(m)) : 0 + \mathsf{s}(m) = \mathsf{s}(m).$$

Εφ' όσον $0 + \mathsf{s}(m) \equiv \mathsf{s}(0 + m)$, μπορούμε να θέσουμε

$$p_0(\mathsf{s}(m)) :\equiv \mathsf{s}(p_0(m)).$$

Για τό p_s χρειαζόμαστε, κατά πρώτον, ένα

$$p_\mathsf{s}(n, 0) : \mathsf{s}(n) + 0 = \mathsf{s}(n + 0).$$

Τά σκέλη αυτής τής ισότητας υπολογίζονται:

$$\begin{aligned} \mathsf{s}(n) + 0 &\equiv \mathsf{s}(n), \\ \mathsf{s}(n + 0) &\equiv \mathsf{s}(n). \end{aligned}$$

Επομένως, μπορούμε να θέσουμε

$$p_\mathsf{s}(n, 0) :\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{s}(n)}.$$

Κατά δεύτερον, χρειάζεται από τό $p_\mathsf{s}(n, m) : \mathsf{s}(n) + m = \mathsf{s}(n + m)$ να ορίσουμε τό

$$p_\mathsf{s}(n, \mathsf{s}(m)) : \mathsf{s}(n) + \mathsf{s}(m) = \mathsf{s}(n + \mathsf{s}(m)).$$

Τά σκέλη αυτής τής ισότητας υπολογίζονται:

$$\begin{aligned} \mathsf{s}(n) + \mathsf{s}(m) &\equiv \mathsf{s}(\mathsf{s}(n) + m), \\ \mathsf{s}(n + \mathsf{s}(m)) &\equiv \mathsf{s}(\mathsf{s}(n + m)). \end{aligned}$$

Μπορούμε, επομένως, να θέσουμε

$$p_\mathsf{s}(n, \mathsf{s}(m)) :\equiv \mathsf{s}(p_\mathsf{s}(n, m)).$$

Εάν θεωρήσουμε ένα $m : \mathsf{Nat}$, τό ζητούμενο, $n + m = m + n$ για οποιοδήποτε $n : \mathsf{Nat}$, λαμβάνεται ως τό συμπέρασμα τού θεωρήματος 2.3.1 εάν θέσουμε

- όπου c_0 τό m,
- όπου $c_\mathsf{s}(n, x)$ τό $\mathsf{s}(x)$,
- όπου $u(n)$ τό $n + m$,
- όπου p_0 τό $p_0(m)$,
- όπου $p_\mathsf{s}(n)$ τό $p_\mathsf{s}(n, m)$. □

Άσκηση 2.3. Διατυπώστε και αποδείξτε τό ανάλογο τού θεωρήματος 2.3.1 για λίστες.

Λύση. Η μοναδικότητα τού definiendum για αναδρομές επί τού $\mathsf{List}(A)$ διατυπώνεται ως εξής: Αν θεωρήσουμε ένα $c_\mathsf{nil} : C$ και ένα $(x : A, y : \mathsf{List}(A), z : C)\ c_\mathsf{cons}(x, y, z) : C$, καθώς και έναν μετασχηματισμό $(x : \mathsf{List}(A))\ u(x) : C$ που ικανοποιεί τίς σχέσεις

1. $u(\mathsf{nil}) = c_\mathsf{nil}$, και

2. $u(\mathsf{cons}(a, l)) = c_{\mathsf{cons}}(a, l, u(l))$ για οποιαδήποτε $a : A$ και $l : \mathrm{List}(A)$,

τότε

$$u(l) = \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(c_{\mathsf{nil}}, c_{\mathsf{cons}}, l)$$

για όλα τά $l : \mathrm{List}(A)$.

Η ζητούμενη ισότητα θα αποδειχθεί με επαγωγή στό l. Αφ' ενός,

$$\begin{aligned} u(\mathsf{nil}) &= c_{\mathsf{nil}} \\ &\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(c_{\mathsf{nil}}, c_{\mathsf{cons}}, \mathsf{nil}). \end{aligned}$$

Αφ' ετέρου, αν υποθέσουμε ότι $u(l) = \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(c_{\mathsf{nil}}, c_{\mathsf{cons}}, l)$, τότε

$$\begin{aligned} u(\mathsf{cons}(a, l)) &= c_{\mathsf{cons}}(a, l, u(l)) \\ &= c_{\mathsf{cons}}(a, l, \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(c_{\mathsf{nil}}, c_{\mathsf{cons}}, l)) \\ &\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(c_{\mathsf{nil}}, c_{\mathsf{cons}}, \mathsf{cons}(a, l)). \end{aligned} \qquad \square$$

2.4 Ισότητα

Έστω A τύπος. Η ισότητα τού A είναι η οικογένεια

$$(x, y : A)\ x =_A y$$

που ορίζεται από τή μοναδική ρήτρα

- για $x : A$, $\mathsf{refl}_x : x =_A x$. $\square$

Σε αντίθεση με τή βασισμένη ισότητα, η ισότητα είναι οικογένεια ως προς αμφότερα τά σκέλη, και μάλιστα ο ορισμός της είναι συμμετρικός. Κατ' επέκταση, η αναδρομή στήν ισότητα ορίζει μετασχηματισμούς προς οικογένειες εξαρτώμενες, γενικά, από δύο παραμέτρους. Αναλυτικότερα, δοθέντων

- μιας οικογένειας $(x, y : A)\ C(x, y)$, και
- ενός μετασχηματισμού $(x : A)\ c_{\mathsf{refl}}(x) : C(x, x)$,

η σχέση

$$t(x, x, \mathsf{refl}_x) :\equiv c_{\mathsf{refl}}(x)$$

ορίζει τό $t(x, y, p) : C(x, y)$ για τυχόντα $x, y : A$ και $p : x = y$.

Ο αναδρομέας

$$(a, b : A, (x : A)\ c(x) : C(x, x), p : a = b)\ \mathsf{rec}^C_{a=b}(c, p) : C(a, b)$$

τής ισότητας ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\mathsf{rec}^C_{x=x}(c, \mathsf{refl}_x) :\equiv c(x)$$

και έχει τόν κανόνα σχηματισμού

$$\frac{a, b : A \qquad (x : A)\ c(x) : C(x, x) \qquad p : a = b}{\mathsf{rec}^C_{a=b}(c, p) : C(a, b)}\ ,$$

ο οποίος μάς δίνει τόν άλλον κανόνα απαλοιφής

$$\frac{C(x,x) \qquad a=b}{C(a,b)} \tag{=E}$$

τής ισότητας (με τόν περιορισμό ότι τό x δεν εμφανίζεται ελεύθερο σε ανοιχτές υποθέσεις πάνω από τό $C(x,x)$), ο οποίος εκφράζει τό γεγονός ότι η ισότητα είναι η ελάχιστη ανακλαστική σχέση. Ειδικότερα, εφ' όσον η βασισμένη ισότητα είναι ανακλαστική σχέση, έπεται ότι η ισότητα συνεπάγεται τή βασισμένη ισότητα. Ισχύει και τό αντίστροφο.

Για τίς ανάγκες αυτής τής ενότητας, η βασισμένη ισότητα θα συμβολίζεται $=^*$. Αφ' ενός, ο (=E) μάς δίνει

$$\frac{\overline{x =^* x} \qquad a=b}{a =^* b}$$

Επαναφέροντας τή διακόσμηση παίρνουμε τό τυποθεωρητικό γεγονός

$$\frac{\mathsf{refl}^*_x : x =^* x \qquad p : a=b}{u(p) :\equiv \mathsf{rec}_{a=b}^{(x,y:A)\, x=^*y}((x:A)\,\mathsf{refl}^*_x, p) : a =^* b} \,.$$

Αφ' ετέρου, θέτοντας $C(x) :\equiv a = x$ στόν ($=^*$E), παίρνουμε τήν απαγωγή

$$\frac{\overline{a=a} \qquad a =^* b}{a=b} \,,$$

και τό αντίστοιχο τυποθεωρητικό γεγονός

$$\frac{\mathsf{refl}_a : a=a \qquad q : a =^* b}{v(q) :\equiv \mathsf{transport}^{a=-}(q, \mathsf{refl}_a) : a=b} \,.$$

Λήμμα 2.4.1. *Η ισότητα και η βασισμένη ισότητα είναι ισοδύναμες. Συγκεκριμένα,*

1. *Για $a,b : A$ και $p : a=b$ ορίζεται $u(p) : a =^* b$.*
2. *Για $a,b : A$ και $q : a =^* b$ ορίζεται $v(q) : a=b$.*

Η ύπαρξη τών παραπάνω μετασχηματισμών u και v σημαίνει ότι οι δύο ισότητες είναι λογικώς ισοδύναμες ως προτάσεις. Ισχύει κάτι περισσότερο: Οι u και v είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.

Λήμμα 2.4.2. *Για $a,b : A$, $p : a=b$, και $q : a =^* b$,*

$$v(u(p)) = p,$$
$$u(v(q)) = q.$$

Παρατηρήστε ότι εδώ έχουμε να κάνουμε με ισότητες μεταξύ στοιχείων κάποιας ισότητας. Κάθε ισότητα, εφ' όσον είναι τύπος, είναι εφοδιασμένη με τή δική της ισότητα, κι αυτό δημιουργεί μία ιεραρχία

$$a =_A b \qquad p =_{a=_A b} q \qquad r =_{p=_{a=_A b} q} s \qquad \ldots$$

ισότήτων που δεν καταρρέει, γενικά, σε κανένα πεπερασμένο στάδιο[1].

Σύμφωνα με τό λήμμα 2.4.2, οι δύο ισότητες ταυτίζονται ως τύποι (τί ακριβώς σημαίνει αυτό θα φανεί όταν θα μιλήσουμε για univalence). Αυτή είναι μία πολύ πιο ισχυρή σχέση από τή λογική ισοδυναμία. Στά επόμενα δεν θα διακρίνουμε ανάμσα στίς δύο ισότητες· θα χρησιμοποιούμε τό σύμβολο «=» για αμφότερες, όπως κάναμε μέχρι τώρα, και όταν εννοούμε τή βασισμένη ισότητα, αυτό θα διευκρινίζεται.

Τό λήμμα αποδεικνύεται με επαγωγή στά p και q αντίστοιχα. Θα χρειαστεί να διατυπώσουμε πρώτα τίς αρχές επαγωγής τών δύο ισοτήτων. Για τήν ισότητα προς a, η αρχή τής επαγωγής έχει ως εξής: Δοθέντων

- μιας οικογένειας $(x : A, p : a = x)\, C(x, p)$, και
- ενός $c_{\mathsf{refl}_a} : C(a, \mathsf{refl}_a)$,

η σχέση

$$t(a, \mathsf{refl}_a) :\equiv c_{\mathsf{refl}_a}$$

ορίζει τό $t(x, p) : C(x, p)$ για οποιαδήποτε $x : A$ και $p : a = x$.

Αυτή η αρχή μάς δίνει τή λογική *αρχή τής απόδειξης με επαγωγή στή βασισμένη ισότητα*: Έστω $a : A$. Προκειμένου να αποδείξουμε μία ιδιότητα $C(x, p)$ για όλα τά $x : A$ και $p : a = x$, αρκεί να δείξουμε τό $C(a, \mathsf{refl}_a)$.

Η αρχή επαγωγής τής ισότητας λέει ότι, δοθέντων

- μιας οικογένειας $(x, y : A, p : x = y)\, C(x, y, p)$, και
- ενός $c_{\mathsf{refl}}(x) : C(x, x, \mathsf{refl}_x)$ για κάθε $x : A$,

η σχέση

$$t(x, x, \mathsf{refl}_x) :\equiv c_{\mathsf{refl}}(x)$$

ορίζει τό $t(x, y, p)$ για τυχόντα $x, y : A$ και $p : x = y$.

Και αυτή η αρχή μάς οδηγεί σε μία *αρχή τής απόδειξης με επαγωγή στήν ισότητα*: Προκειμένου να αποδείξουμε μία ιδιότητα $C(x, y, p)$ για όλα τά $x, y : A$ και $p : x = y$, αρκεί να δείξουμε τό $C(x, x, \mathsf{refl}_x)$ για τυχόν $x : A$.

Απόδειξη τού λήμματος 2.4.2. Για τήν πρώτη ισότητα, έχουμε να δείξουμε τό

$$C(a, b, p) :\equiv \mathsf{transport}^{a=-}(\mathsf{rec}_{a=b}^{(x,y:A)\, x=^* y}((x : A)\, \mathsf{refl}^*_x, p), \mathsf{refl}_a) = p.$$

για όλα τά $a, b{:}A$ και $p{:}a = b$. Από τήν αρχή τής απόδειξης με επαγωγή στήν ισότητα, αρκεί να δείξουμε τό

$$\begin{aligned} C(a, a, \mathsf{refl}_a) &\equiv \mathsf{transport}^{a=-}(\mathsf{rec}_{a=a}^{(x,y:A)\, x=^* y}((x : A)\, \mathsf{refl}^*_x, \mathsf{refl}_a), \mathsf{refl}_a) = \mathsf{refl}_a \\ &\equiv \mathsf{transport}^{a=-}(\mathsf{refl}^*_a, \mathsf{refl}_a) = \mathsf{refl}_a \\ &\equiv \mathsf{refl}_a = \mathsf{refl}_a, \end{aligned}$$

για τυχόν $a{:}A$, τό οποίο, βεβαίως, ισχύει. Η άλλη ισότητα αποδεικνύεται ομοίως. □

[1] Κάποια στιγμή είχε εικαστεί ή υποτεθεί ότι αυτός ο πύργος ισοτήτων (πρέπει να) καταρρέει αμέσως· η σχετική αρχή, που ακούει στό όνομα *uniqueness of identiny proofs (UIP)*, και είναι ισοδύναμη με τήν υπόθεση ότι κάθε τύπος είναι σύνολο, έρχεται σε σύγκρουση με τό univalence, αλλά είναι συνεπής με τή θεωρία τύπων τού Martin-Löf.

2.5 Ασκήσεις

Άσκηση 2.4. Δείξτε ότι η συνένωση λιστών είναι προσεταιριστική, περιγράφοντας, για οποιαδήποτε $l, k, j : \mathrm{List}(A)$, ένα στοιχείο τού τύπου

$$(l + k) + j = l + (k + j).$$

[Υπόδειξη: Κάντε επαγωγή στό l.]

Λύση. Θα ορίσουμε, με επαγωγή στό l, έναν μετασχηματισμό

$$(l, k, j : \mathrm{List}(A))\, t(l, k, j) : (l + k) + j = l + (k + j).$$

Κατά πρώτον, πρέπει να ορίσουμε τό

$$t(\mathsf{nil}, k, j) : (\mathsf{nil} + k) + j = \mathsf{nil} + (k + j).$$

Από τόν ορισμό τής συνένωσης, όμως, παρατηρούμε ότι

$$(\mathsf{nil} + k) + j \equiv k + j \equiv \mathsf{nil} + (k + j),$$

οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$t(\mathsf{nil}, k, j) :\equiv \mathsf{refl}_{k+j}.$$

Κατά δεύτερον, ας υποθέσουμε ότι έχουμε τό $t(l, k, j) : (l + k) + j = l + (k + j)$, και θέλουμε να ορίσουμε τό

$$t(\mathsf{cons}(a, l), k, j) : (\mathsf{cons}(a, l) + k) + j = \mathsf{cons}(a, l) + (k + j).$$

Οι υπολογισμοί τών σκελών αυτής τής ισότητας δίνουν

$$\begin{aligned}(\mathsf{cons}(a, l) + k) + j &\equiv \mathsf{cons}(a, (l + k)) + j \\ &\equiv \mathsf{cons}(a, (l + k) + j), \\ \mathsf{cons}(a, l) + (k + j) &\equiv \mathsf{cons}(a, l + (k + j)).\end{aligned}$$

Εφ' όσον $t(l, k, j) : (l + k) + j = l + (k + j)$, τό λήμμα 2.2.3 μάς δίνει ένα στοιχείο

$$\mathsf{cons}(a, t(l, k, j)) : \mathsf{cons}(a, (l + k) + j) = \mathsf{cons}(a, l + (k + j)),$$

οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$t(\mathsf{cons}(a, l), k, j) :\equiv \mathsf{cons}(a, t(l, k, j)).$$ □

Άσκηση 2.5. Δοθέντος ενός μετασχηματισμού $(x : A)\, u(x) : B$, περιγράψτε, για οποιαδήποτε $l, k : \mathrm{List}(A)$, ένα στοιχείο τού τύπου

$$\mathrm{List}(u)(l + k) = \mathrm{List}(u)(l) + \mathrm{List}(u)(k).$$

[Υπόδειξη: Κάντε επαγωγή στό l.]

Λύση. Αφ' ενός, έχουμε να ορίσουμε τό

$$t(\mathsf{nil}_A, k) : \mathrm{List}(u)(\mathsf{nil}_A + k) = \mathrm{List}(u)(\mathsf{nil}_A) + \mathrm{List}(u)(k).$$

Οι υπολογισμοί τών σκελών αυτής τής ισότητας δίνουν

$$\begin{aligned} \mathrm{List}(u)(\mathsf{nil}_A + k) &\equiv \mathrm{List}(u)(k), \\ \mathrm{List}(u)(\mathsf{nil}_A) + \mathrm{List}(u)(k) &\equiv \mathsf{nil}_B + \mathrm{List}(u)(k) \\ &\equiv \mathrm{List}(u)(k), \end{aligned}$$

οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$t(\mathsf{nil}_A, k) :\equiv \mathsf{refl}_{\mathrm{List}(u)(k)}.$$

Αφ' ετέρου, έχουμε τό $t(l, k) : \mathrm{List}(u)(l + k) = \mathrm{List}(u)(l) + \mathrm{List}(u)(k)$ και χρειαζόμαστε τό $t(\mathsf{cons}_A(a, l), k) : \mathrm{List}(u)(\mathsf{cons}_A(a, l) + k) = \mathrm{List}(u)(\mathsf{cons}_A(a, l)) + \mathrm{List}(u)(k)$. Οι υπολογισμοί τών σκελών τής τελευταίας ισότητας δίνουν

$$\begin{aligned} \mathrm{List}(u)(\mathsf{cons}_A(a, l) + k) &\equiv \mathrm{List}(u)(\mathsf{cons}_A(a, l + k)) \\ &\equiv \mathsf{cons}_B(u(a), \mathrm{List}(u)(l + k)), \\ \mathrm{List}(u)(\mathsf{cons}_A(a, l)) + \mathrm{List}(u)(k) &\equiv \mathsf{cons}_B(u(a), \mathrm{List}(u)(l)) + \mathrm{List}(u)(k) \\ &\equiv \mathsf{cons}_B(u(a), \mathrm{List}(u)(l) + \mathrm{List}(u)(k)), \end{aligned}$$

οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$t(\mathsf{cons}_A(a, l), k) :\equiv \mathsf{cons}_B(u(a), t(l, k)).$$ □

Άσκηση 2.6 (Φυσικότητα τού cat)**.** Δοθέντος ενός μετασχηματισμού $(x : A)\ u(x) : B$, δείξτε ότι, για οποιαδήποτε λίστα $L : \mathrm{List}(\mathrm{List}(A))$,

$$\mathsf{cat}(\mathrm{List}(\mathrm{List}(u))(L)) = \mathrm{List}(u)(\mathsf{cat}(L)).$$

[Υπόδειξη: Κάντε επαγωγή στό L. Χρησιμοποιήστε τήν προηγούμενη άσκηση.]

Λύση. Θα ορίσουμε, με επαγωγή στό L, ένα $t(L) : \mathsf{cat}(\mathrm{List}(\mathrm{List}(u))(L)) = \mathrm{List}(u)(\mathsf{cat}(L))$ για οποιαδήποτε λίστα $L : \mathrm{List}(\mathrm{List}(A))$. Αφ' ενός έχουμε να ορίσουμε τό

$$t(\mathsf{nil}_{\mathrm{List}(A)}) : \mathsf{cat}(\mathrm{List}(\mathrm{List}(u))(\mathsf{nil}_{\mathrm{List}(A)})) = \mathrm{List}(u)(\mathsf{cat}(\mathsf{nil}_{\mathrm{List}(A)})).$$

Οι υπολογισμοί τών σκελών τής ισότητας δίνουν

$$\begin{aligned} \mathsf{cat}(\mathrm{List}(\mathrm{List}(u))(\mathsf{nil}_{\mathrm{List}(A)})) &\equiv \mathsf{cat}(\mathsf{nil}_{\mathrm{List}(B)}) \\ &\equiv \mathsf{nil}_B, \\ \mathrm{List}(u)(\mathsf{cat}(\mathsf{nil}_{\mathrm{List}(A)})) &\equiv \mathrm{List}(u)(\mathsf{nil}_A) \\ &\equiv \mathsf{nil}_B, \end{aligned}$$

οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$t(\mathsf{nil}_{\mathrm{List}(A)}) :\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{nil}_B}.$$

Αφ' ετέρου, έχουμε τό $t(L) : \mathsf{cat}(\mathrm{List}(\mathrm{List}(u))(L)) = \mathrm{List}(u)(\mathsf{cat}(L))$ και χρειαζόμαστε να ορίσουμε τό $t(\mathsf{cons}_{\mathrm{List}(A)}(l, L))$. □

Κεφάλαιο 3

Θεωρία τύπων τού Martin-Löf: Τά βασικά

Στό προηγούμενο κεφάλαιο εισαγάγαμε οικογένοιες τύπων, δηλαδή κατηγορήματα, και ορίσαμε τήν ισότητα σαν ένα τέτοιο κατηγόρημα. Στό κεφάλαιο αυτό, θα πραγματευτούμε τά τυποθεωρητικά ανάλογα τών λογικών συνδέσμων.

3.1 Γινόμενα

Σύμφωνα με τήν ερμηνεία Brouwer-Heyting-Kolmogorov (BHK), ένα τεκμήριο αλήθειας τής σύζευξης $\phi_1 \wedge \phi_2$ δύο προτάσεων ϕ_1 και ϕ_2 αποτελείται από ένα τεκμήριο αλήθειας τής ϕ_1 και ένα τής ϕ_2.

Ο τύπος που αντιστοιχεί στή σύζευξη δύο προτάσεων είναι ο τύπος τών *ζευγών*, ή *(καρτεσιανό) γινόμενο* δύο τύπων: Δοθέντων δύο τύπων A_1 και A_2, τό γινόμενο $A_1 \times A_2$ έχει τόν κατασκευαστή (διατεταγμένο ζεύγος)

$$(x_1 : A_1, x_2 : A_2)\ \mathsf{pair}(x_1, x_2) : A_1 \times A_2,$$

ή, υπό μορφήν κανόνα σχηματισμού,

$$\frac{x_1 : A_1 \qquad x_2 : A_2}{\mathsf{pair}(x_1, x_2) : A_1 \times A_2}\ .$$

Αν αφαιρέσουμε τά στοιχεία και μεταβούμε σέ λογικό συμβολισμό, παίρνουμε τόν κανόνα εισαγωγής τής σύζευξης,

$$\frac{\phi_1 \qquad \phi_2}{\phi_1 \wedge \phi_2}\ . \tag{$\wedge$I}$$

που εκφράζει τό στοιχειώδες λογικό γεγονός ότι από δύο προτάσεις μπορούμε να συμπεράνουμε τή σύζευξή τους. Ο κανόνας αυτός ονομάζεται *κανόνας εισαγωγής (introduction rule)* τής σύζευξης, διότι περιγράφει τόν (κανονικό) τρόπο με τόν οποίο μία σύζευξη εμφανίζεται ως συμπέρασμα μιας απόδειξης.

Η αρχή αναδρομής τού γινομένου λέει ότι, δοθέντων ενός τύπου C και ενός μετασχηματισμού $(x_1 : A_1, x_2 : A_2)\ c_{\mathsf{pair}}(x_1, x_2) : C$, η σχέση

$$t(\mathsf{pair}(x_1, x_2)) :\equiv c_{\mathsf{pair}}(x_1, x_2)$$

ορίζει τό $t(x) : C$ για οποιοδήποτε $x : A_1 \times A_2$. Η αρχή αυτή συνοψίζεται σε έναν αναδρομέα

$$\frac{(x_1 : A_1, x_2 : A_2)\, z(x_1, x_2) : C \qquad x : A_1 \times A_2}{\mathsf{rec}_{A_1 \times A_2}(z, x) : C}\ ,$$

οριζόμενο από τή σχέση

$$\mathsf{rec}_{A_1 \times A_2}(z, \mathsf{pair}(x_1, x_2)) :\equiv z(x_1, x_2).$$

Εάν από τόν κανόνα σχηματισμού τού $\mathsf{rec}_{A_1 \times A_2}$ παραλείψουμε τά στοιχεία και μεταβούμε σε λογικό συμβολισμό, παίρνουμε τόν κανόνα απαγωγής

$$\frac{\begin{array}{c}(\phi_1, \phi_2)\\ \vdots \\ \theta\end{array} \qquad \phi_1 \wedge \phi_2}{\theta}\ , \tag{$\wedge$E}$$

ο οποίος εκφράζει τόν τρόπο με τόν οποίο μία σύζευξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως υπόθεση, και γι' αυτό λέγεται *κανόνας απαλοιφής (elimination rule)* τής σύζευξης.

3.2 Αθροίσματα

Σύμφωνα με τήν BHK, τεκμήρια αλήθειας τής διάζευξης $\phi_1 \vee \phi_2$ δύο προτάσεων ϕ_1 και ϕ_2 είναι τά τεκμήρια αλήθειας τής ϕ_1, καθώς και εκείνα τής ϕ_2.

Τό τυποθεωρητικό ανάλογο τής διάζευξης είναι τό *άθροισμα* $A_1 + A_2$ δύο τύπων A_1 και A_2, τό οποίο έχει τούς κατασκευαστές

1. εάν $x_1 : A_1$, τότε $\mathsf{in}_1(x_1) : A_1 + A_2$,
2. εάν $x_2 : A_2$, τότε $\mathsf{in}_2(x_2) : A_1 + A_2$,

οι οποίοι γράφονται ως κανόνες στή μορφή

$$\frac{x_1 : A_1}{\mathsf{in}_1(x_1) : A_1 + A_2} \qquad \qquad \frac{x_2 : A_2}{\mathsf{in}_2(x_2) : A_1 + A_2}\ .$$

και από τούς οποίους παίρνουμε τούς κανόνες εισαγωγής

$$\frac{\phi_1}{\phi_1 \vee \phi_2} \qquad \qquad \frac{\phi_2}{\phi_1 \vee \phi_2} \tag{$\vee$I}$$

τής διάζευξης, οι οποίοι εκφράζουν τό γεγονός ότι μπορούμε να συμπεράνουμε μία διάζευξη από εκάτερη τών διαζευκτέων.

Η αρχή τής αναδρομής για τή διάζευξη έχει ως εξής: Δοθέντων ενός τύπου C και δύο μετασχηματισμών $(x_1 : A_1)\, c_{\mathsf{in}_1}(x_1) : C$ και $(x_2 : A_2)\, c_{\mathsf{in}_2}(x_2) : C$, οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\mathsf{in}_1(x_1)) &:\equiv c_{\mathsf{in}_1}(x_1), \\ t(\mathsf{in}_2(x_2)) &:\equiv c_{\mathsf{in}_2}(x_2) \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό $(x : A_1 + A_2)\, t(x) : C$. Ο αναδρομέας τής διάζευξης έχει τόν κανόνα σχηματισμού

$$\frac{(x_1 : A_1)\, z_1(x_1) : C \qquad (x_2 : A_2)\, z_2(x_2) : C \qquad x : A_1 + A_2}{\mathsf{rec}_{A_1 + A_2}(z_1, z_2, x) : C}$$

και ορίζεται από τίς σχέσεις

$$\mathsf{rec}_{A_1+A_2}(z_1, z_2, \mathsf{in}_1(x_1)) :\equiv z_1(x_1),$$
$$\mathsf{rec}_{A_1+A_2}(z_1, z_2, \mathsf{in}_2(x_2)) :\equiv z_2(x_2).$$

Από τόν $\mathsf{rec}_{A_1+A_2}$ παίρνουμε τόν κανόνα απαλοιφής τής διάζευξης

$$\frac{\begin{matrix}(\phi_1) \\ \vdots \\ \theta\end{matrix} \quad \begin{matrix}(\phi_2) \\ \vdots \\ \theta\end{matrix} \quad \phi_1 \vee \phi_2}{\theta}\ , \tag{$\vee$E}$$

ο οποίος περιγράφει τήν απόδειξη με διάκριση περιπτώσεων.

3.3 Τύποι συναρτήσεων

Σύμφωνα με τήν BHK, ένα τεκμήριο αλήθειας τής συνεπαγωγής $\phi \supset \psi$ δύο προτάσεων ϕ και ψ είναι μία διαδικασία που μετασχηματίζει οποιοδήποτε τεκμήριο αλήθειας τής ϕ σε ένα τής ψ.

Τό τυποθεωρητικό ανάλογο τής συνεπαγωγής είναι ο τύπος $A \to B$ τών συναρτήσεων από τόν τύπο A στόν τύπο B, με κατασκευαστή (συναρτησιακή αφαίρεση ή λ-αφαίρεση)

- Για μετασχηματισμό $(x : A)\, b(x) : B$, $\lambda(b) : A \to B$.

Η ιδιαιτερότητα τού τύπου τών συναρτήσεων είναι ότι έχει έναν κατασκευαστή, τή *συναρτησιακή αφαίρεση ή λ-αφαίρεση*, τό όρισμα τού οποίου είναι μετασχηματισμός. Αυτό αντανακλάται και στόν κανόνα σχηματισμού του, ο οποίος έχει τή μορφή

$$\frac{(x : A)\, b(x) : B}{\lambda(b) : A \to B}\ .$$

Από τόν κανόνα αυτόν παίρνουμε τόν κανόνα εισαγωγής

$$\frac{\begin{matrix}(\phi) \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\phi \supset \psi} \tag{$\supset$I}$$

τής συνεπαγωγής, ο οποίος, σε άλλες διατυπώσεις τής λογικής, είναι γνωστός ως θεώρημα απαγωγής.

Η αρχή αναδρομής τού $A \to B$ λέει ότι, δοθέντων τύπου C και μετασχηματισμού $((x : A)\, y(x) : B)\, c_\lambda(y) : C$, η σχέση

$$t(\lambda(b)) :\equiv c_\lambda(b)$$

ορίζει τό $t(f) : C$ για τυχούσα συνάρτηση $f : A \to B$.

Ο αναδρομέας

$$\frac{((x : A)\, y(x) : B)\, z(y) : C \qquad f : A \to B}{\mathsf{rec}_{A \to B}(z, f) : C}$$

τού $A \to B$ ορίζεται από τή σχέση

$$\mathsf{rec}_{A\to B}(z, \lambda(b)) :\equiv z(b),$$

και δίνει τόν κανόνα

$$\dfrac{\begin{matrix}\left(\dfrac{\phi}{\psi}\right)\\ \vdots \\ \theta\end{matrix} \qquad \phi \supset \psi}{\theta} \tag{$\supset$E}$$

απαλοιφής τής συνεπαγωγής. Αν συμβολίσουμε $\Sigma \vdash \theta$ τό γεγονός ότι η θ έπεται (είναι λογική συνέπεια) τών προτάσεων και κανόνων που ανήκουν στό σύνολο Σ, ο $(\supset E)$ λέει ότι εάν $\Sigma \cup \{\frac{\phi}{\psi}\} \vdash \theta$, τότε $\Sigma \cup \{\phi \supset \psi\} \vdash \theta$.

3.4 Ο τύπος 0

Κατά τήν BHK, τό ψευδές F δεν έχει τεκμήρια αλήθειας.

Τό τυποθεωρητικό ανάλογο τού ψευδούς είναι ο τύπος $\mathbf{0}$ που δεν έχει κανέναν κατασκευαστή. Κατά συνέπεια, τό ψευδές δεν έχει κανόνες εισαγωγής. Η αρχή τής αναδρομής για τόν $\mathbf{0}$ μάς δίνει έναν μετασχηματισμό $(x : \mathbf{0})\; t(x) : C$ για κάθε τύπο C, που είναι και ο αναδρομέας του,

$$\frac{x : \mathbf{0}}{\mathsf{rec}_{\mathbf{0}}(x) : C}\ .$$

Αντίστοιχα, ο κανόνας απαλοιφής τού ψευδούς είναι ο

$$\frac{\mathsf{F}}{\theta}\ , \tag{FE}$$

γνωστός και ως ex falso (sequitur) quodlibet.

3.5 Ο τύπος 1

Τό αληθές T δεν είναι και τόσο χρήσιμο στη λογική. Είναι, όμως, χρήσιμο στή θεωρία τύπων. Σύμφωνα με τήν BHK, η πρόταση T έχει ένα τεκμήριο αλήθειας. Ο αντίστοιχος τύπος είναι ο $\mathbf{1}$, που έχει τόν κατασκευαστή

- $! : \mathbf{1}$,

ο οποίος δίνει τόν κανόνα εισαγωγής

$$\frac{}{\mathsf{T}} \tag{TI}$$

τού αληθούς, που λέει, απλώς, ότι η πρόταση T αληθεύει.

Προκειμένου να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό τών στοιχείων τού $\mathbf{1}$ δεν έχουμε παρά να πούμε πώς αυτός δρα στό μοναδικό στοιχείο ! αυτού· αυτό ακριβώς εκφράζεται από τήν αρχή αναδρομής τού αληθούς: Δοθέντος ενός $c_! : C$, η σχέση

$$t(!) :\equiv c_!$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(x : \mathbf{1})\, t(x) : C$. Έτσι και ο αναδρομέας

$$\frac{x : C \qquad y : \mathbf{1}}{\mathsf{rec}_{\mathbf{1}}(x, y) : C}$$

τού **1** ορίζεται από τή σχέση

$$\mathsf{rec}_{\mathbf{1}}(x, !) :\equiv x.$$

Από τόν κανόνα αυτόν παίρνουμε τόν κανόνα απαλοιφής τού αληθούς

$$\frac{\theta \qquad \top}{\theta}\ . \tag{$\top$E}$$

3.6 Ειδικοί κανόνες απαλοιφής

Εάν ένας σύνδεσμος έχει ακριβώς έναν κανόνα εισαγωγής, ο μοναδικός αυτός κανόνας εισαγωγής μπορεί επίσης να διαβαστεί από κάτω προς τά επάνω. Τά προϊόντα αυτής τής αντιστροφής λέγονται *ειδικοί (special) κανόνες απαλοιφής* (και, ενίοτε, για αντιδιαστολή, οι άλλοι κανόνες απαλοιφής ονομάζονται *γενικοί*). Προκειμένου για τή σύζευξη, αυτοί είναι οι

$$\frac{\phi_1 \wedge \phi_2}{\phi_1} \qquad\qquad \frac{\phi_1 \wedge \phi_2}{\phi_2}\ . \tag{$\wedge$S}$$

Για τή συνεπαγωγή έχουμε τόν κανόνα

$$\frac{\phi \supset \psi \qquad \phi}{\psi}\ , \tag{$\supset$S}$$

γνωστό και ως modus ponens. Τέλος, για τό αληθές έχουμε μηδέν τό πλήθος ειδικούς κανόνες απαλοιφής.

Για καθέναν από τούς τρεις παραπάνω συνδέσμους, οι ειδικοί κανόνες απαλοιφής είναι ισοδύναμοι με τόν (γενικό) κανόνα απαλοιφής· αυτό είναι απόρροια τών ακόλουθων γενικότερων διαπιστώσεων που αφορούν τά τυποθεωρητικά ανάλογα τών συνδέσμων αυτών.

Για τό γινόμενο, θεωρούμε τούς μετασχηματισμούς (προβολές)

$$\frac{x : A_1 \times A_2}{\mathsf{pr}_1(x) : A_1} \qquad\qquad \frac{x : A_1 \times A_2}{\mathsf{pr}_2(x) : A_2}$$

που ορίζονται μέσω τών αναδρομών

$$\begin{aligned} \mathsf{pr}_1(\mathsf{pair}(a_1, a_2)) &:\equiv a_1, \\ \mathsf{pr}_2(\mathsf{pair}(a_1, a_2)) &:\equiv a_2. \end{aligned}$$

Όπως και κάθε άλλος μετασχηματισμός που ορίζεται με αναδρομή, οι προβολές μπορούν να εκφραστούν με τή βοήθεια τού αναδρομέα τού γινομένου· αντιστρόφως, ο $\mathsf{rec}_{A_1 \times A_2}$ ορίζεται από τούς pr_1 και pr_2 μέσω τής σχέσης

$$\mathsf{rec}_{A_1 \times A_2}(z, x) :\equiv z(\mathsf{pr}_1(x), \mathsf{pr}_2(x)).$$

Ελέγχουμε ότι ικανοποιείται η ορίζουσα σχέση τού αναδρομέα:

$$\begin{aligned}\mathsf{rec}_{A_1\times A_2}(z,\mathsf{pair}(x_1,x_2)) &\equiv z(\mathsf{pr}_1(\mathsf{pair}(x_1,x_2)),\mathsf{pr}_2(\mathsf{pair}(x_1,x_2)))\\ &\equiv z(x_1,x_2).\end{aligned}$$

Για τόν τύπο τών συναρτήσεων, θεωρούμε τόν μετασχηματισμό (εφαρμογή συνάρτησης σε όρισμα)

$$\frac{f:A\to B \qquad x:A}{\mathsf{apply}_f(x):B}$$

που ορίζεται μέσω τής αναδρομής

$$\mathsf{apply}_{\lambda(b)}(x) :\equiv b(x).$$

Ο $\mathsf{rec}_{A\to B}$ ορίζεται από τόν apply μέσω τής σχέσης

$$\mathsf{rec}_{A\to B}(z,f) :\equiv z(\mathsf{apply}_f).$$

Ελέγχουμε ότι ικανοποιείται η ορίζουσα σχέση τού αναδρομέα:

$$\begin{aligned}\mathsf{rec}_{A\to B}(z,\lambda(b)) &\equiv z(\mathsf{apply}_{\lambda(b)})\\ &\equiv z(b).\end{aligned}$$

Για τόν τύπο **1**, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ο $\mathsf{rec}_{\mathbf{1}}$ ορίζεται και χωρίς αναδρομή:

$$\mathsf{rec}_{\mathbf{1}}(x,y) :\equiv x.$$

Αυτό αντανακλά τό λογικό γεγονός ότι ο κανόνας απαλοιφής τού αληθούς δεν παράγει νέες αποδείξιμες προτάσεις.

3.7 Εξαρτώμενα αθροίσματα

Σύμφωνα με τήν BHK, ένα τεκμήριο αλήθειας τής $\exists(x:A)\,\phi(x)$, όπου A τό πεδίο διακύμανσης τής μεταβλητής x, αποτελείται από ένα στοιχείο a τού A και ένα τεκμήριο αλήθειας τού $\phi(a)$.

Ο τύπος που αντιστοιχεί στήν υπαρκτική ποσόδειξη είναι τό εξαρτώμενο άθροισμα: Εάν έχουμε μία οικογένεια τύπων $(x{:}A)B(x)$, μπορούμε επίσης να σχηματίζουμε ζέυγη $\mathsf{pair}(a,b)$ με $a{:}A$ και $b{:}B(a)$. Με άλλα λόγια, ο τύπος τής δεύτερης συντεταγμένης μπορεί να εξαρτάται από τήν πρώτη. Αυτά τά ζεύγη, τά οποία ενίοτε καλούνται *εξαρτώμενα* ζεύγη, συγκροτούν έναν τύπο $\sum(B)$, τό *(εξαρτώμενο) άθροισμα* τής οικογένειας $(x:A)\,B(x)$, με κατασκευαστή

$$\frac{x:A \qquad y:B(x)}{\mathsf{pair}(x,y):\sum(B)}\ .$$

Παρατηρήστε ότι, εάν η $(x:A)\,B(x)$ είναι σταθερή, δηλαδή ο $B(x)$ δεν εξαρτάταοι από τό x αλλά είναι ένας μεμονομένος τύπος B, αυτό που παίρνουμε από τόν ορισμό είναι τό $A\times B$. Με άλλα λόγια, τό εξαρτώμενο άθροισμα είναι γενίκευση τού καρτεσιανού γινομένου. Αυτό αιτιολογεί και τή χρήση τού ίδιου συμβόλου για τούς δύο κατασκευαστές.

Αντίστοιχα έχουμε τόν κανόνα εισαγωγής

$$\frac{\phi(a)}{\exists(x:A)\,\phi(x)}\ , \tag{$\exists$I}$$

τού υπαρκτικού ποσοδείκτη, ο οποίος μάς λέει ότι από τήν $\phi(a)$ για κάποιο a μπορούμε να συμπεράνουμε τήν $\exists(x:A)\,\phi(x)$.

Η αρχή τής αναδρομής τού εξαρτώμενου αθροίσματος λέει ότι, δοθέντος ενός μετασχηματισμού $(x:A, y:B(x))\ c_{\mathsf{pair}}(x,y):C$, η σχέση

$$t(\mathsf{pair}(a,b)) :\equiv c_{\mathsf{pair}}(a,b)$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(w:\sum(B))\ t(w):C$. Η αρχή αυτή συνοψίζεται σε έναν αναδρομέα

$$\frac{(x:A, y:B(x))\ z(x,y):C \qquad w:\sum(B)}{\mathsf{rec}_{\sum(B)}(z,w):C}\ ,$$

οριζόμενο από τή σχέση

$$\mathsf{rec}_{\sum(B)}(z,\mathsf{pair}(a,b)) :\equiv z(a,b).$$

Από τόν κανόνα σχηματισμού τού αναδρομέα τού εξαρτώμενου γινομένου παίρνουμε τόν κανόνα απαλοιφής

$$\frac{\begin{array}{c}(\phi(x))\\ \vdots\\ \theta\end{array} \qquad \exists(x:A)\,\phi(x)}{\theta} \tag{$\exists$E}$$

τού υπαρκτικού ποσοδείκτη (με τόν περιορισμό ότι τό x δεν εμφανίζεται (ελεύθερο) σε (ανοιχτές) υποθέσεις πάνω από τό θ).

3.8 Εξαρτώμενα γινόμενα

Η ρήτρα τής BHK για τόν καθολικό ποσοδείκτη έχει ως εξής: Ένα τεκμήριο αλήθειας τής πρότασης $\forall(x:A)\,\phi(x)$ είναι μία διαδικασία που μετασχηματίζει τό τυχόν στοιχείο a τού A σε ένα τεκμήριο αλήθειας τής $\phi(a)$.

Η αντίστοιχη τυποθεωρητική έννοια είναι τό εξαρτώμενο γινόμενο. Κατ' αρχάς, παρατηρήστε ότι τά στοιχεία ενός τύπου είναι δυνατόν να μετασχηματίζονται σε στοιχεία διαφορετικών στιγμιοτύπων μιας οικογένειας. Τέτοια είναι η περίπτωση με τούς μετασχηματισμούς που ορίζονται με αναδρομή στήν ισότητα (και σε οποιαδήποτε άλλη μη τετριμμένη οικογένεια), καθώς και με τούς επαγωγείς τών διαφόρων τύπων. Σε έναν τέτοιο μετασχηματισμό $(x:A)\,b(x):B(x)$ αντιστοιχεί μία συνάρτηση f με $f(x):B(x)$ για $x:A$. Οι συναρτήσεις με αυτή τή γενικότερη έννοια, οι οποίες λέγονται και «εξαρτώμενες» συναρτήσεις, συγκροτούν έναν τύπο, τό *(εξαρτώμενο) γινόμενο* $\prod(B)$ τής οικογένειας $(x:A)\ B(x)$, ο οποίος έχει τόν κατασκευαστή

$$\frac{(x:A)\,b(x):B(x)}{\lambda(b):\prod(B)}\ .$$

Είναι φανερό από τήν περιγραφή τού $\prod(B)$ ότι ο $A \to B$ είναι η ειδική περίπτωση στην οποία η οικογένεια $(x : A)\, B(x)$ είναι σταθερή.

Από τόν παραπάνω κανόνα παίρνουμε τόν κανόνα εισαγωγής

$$\frac{\phi(x)}{\forall\,(x : A)\,\phi(x)} \tag{$\forall$I}$$

τού καθολικού ποσοδείκτη (με τόν περιορισμό ότι τό x δεν εμφανίζεται σε υποθέσεις πάνω από τό $\phi(x)$), ο οποίος λέει ότι από μία απόδειξη τής $\phi(x)$ για τυχόν $x : A$ μπορούμε να συμπεράνουμε τήν $\forall\,(x : A)\,\phi(x)$.

Η αρχή τής αναδρομής για τό εξαρτώμενο γινόμενο είναι επίσης γενίκευση τής αντίστοιχης αρχής για τόν τύπο τών συναρτήσεων: Δοθέντος μετασχηματισμού

$$((x : A)\; y(x) : B(x))\; c_\lambda(y) : C,$$

η σχέση

$$t(\lambda(x : A)\, b(x)) :\equiv c_\lambda(b)$$

ορίζει μετασχηματισμό $(f : \prod(B))\, t(f) : C$. Ο αναδρομέας

$$\frac{((x : A)\, b(x) : B(x))\; z(x : A)\, b(x) : C \qquad f : \prod(B)}{\mathsf{rec}_{\prod(B)}(z, f) : C}$$

τού εξαρτώμενου γινομένου ορίζεται από τή σχέση

$$\mathsf{rec}_{\prod(B)}(z, \lambda(b)) :\equiv z(b),$$

και δίνει τόν κανόνα απαλοιφής

$$\frac{\begin{matrix}\left(\overline{\phi(x)}\right)\\ \vdots \\ \theta\end{matrix} \qquad \forall\,(x : A)\,\phi(x)}{\theta}\;. \tag{$\forall$E}$$

τού καθολικού ποσοδείκτη.

Ο καθολικός ποσοδείκτης έχει επίσης έναν ειδικό κανόνα απαλοιφής

$$\frac{\forall\,(x : A)\,\phi(x)}{\phi(a)}\;, \tag{$\forall$S}$$

ο οποίος, όπως και στην περίπτωση τής συνεπαγωγής, λαμβάνεται από τόν κανόνα σχηματισμού

$$\frac{f : \prod(B) \qquad x : A}{\mathsf{apply}_f(x) : B(x)}$$

τού μετασχηματισμού apply που ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\mathsf{apply}_{\lambda(b)}(x) :\equiv b(x).$$

Και πάλι, οι δύο κανόνες απαλοιφής είναι ισοδύναμοι συνεπεία τού εναλλακτικού ορισμού

$$\mathsf{rec}_{\prod(B)}(z, f) :\equiv z(\mathsf{apply}_f)$$

τού αναδρομέα τού εξαρτώμενου γινομένου.

3.9 Αρχές επαγωγής

Μέχρι σττιγμής, περιγράψαμε κάποιους τύπους και είδαμε πώς οι κατασκευαστές τους αντιστοιχούν σε κανόνες εισαγωγής κάποιων προτάσεων και οι αναδρομείς τους σε κανόνες απαλοιφής τών ίδιων προτάσεων.

Οι τύποι συνοδεύονται επίσης από αρχές επαγωγής. Οι αρχές αυτές έχουν οργανικό ρόλο στή θεωρία τύπων, αλλά δεν αντανακλώνται στή φυσική απαγωγή. Θα συζητήσουμε τώρα τίς αρχές επαγωγής τών τύπων που παρουσιάσαμε (πλην τού αθροίσματος). Με τό ερώτημα τής (απουσίας) λογικής ερμηνείας αυτών θα καταπιαστούμε αμέσως μετά.

Οι αρχές επαγωγής τών τύπων είναι ευθείες γενικεύσεις τών αρχών αναδρομής τους. Η αρχή επαγωγής τού $A \to B$ διατυπώνεται ως εξής: Δοθέντων

- οικογένειας $(f : A \to B)\, C(f)$, και
- μετασχηματισμού $((x : A)\, b(x) : B)\, c_\lambda(b) : C(\lambda(b))$,

η σχέση

$$t(\lambda(b)) :\equiv c_\lambda(b)$$

ορίζει μετασχηματισμό

$$(f : A \to B)\, t(f) : C(f).$$

Η αρχή αυτή συνοψίζεται στόν επαγωγέα

$$\frac{((x : A)\; y(x) : B)\; z(y) : C(\lambda(y)) \qquad f : A \to B}{\mathsf{ind}_{A\to B}(z, f) : C(f)}$$

τού $A \to B$, με ορίζουσα σχέση

$$\mathsf{ind}_{A\to B}(z, \lambda(b)) :\equiv z(b).$$

Από τήν παραπάνω αρχή επαγωγής συνάγεται η
Αρχή τής απόδειξης με επαγωγή στόν $A \to B$: Προκειμένου να αποδείξουμε μία ιδιότητα τών συναρτήσεων από τόν A στόν B, αρκεί να τήν δείξουμε για συναρτήσεις τής μορφής $\lambda(x : A)\, b(x)$.

Νωρίτερα παρατηρήσαμε ότι ο αναδρομέας τού $A \to B$ είναι δυνατόν να ληφθεί από τήν εφαρμογή, μέσω τού εναλλακτικού ορισμού

$$\mathsf{rec}_{A\to B}(z, f) :\equiv z(\mathsf{apply}_f).$$

Η απόπειρα επέκτασης τού αποτελέσματος αυτού στόν επαγωγέα προσκρούει στό ότι υπάρχει ασυμφωνία τύπων:

$$z(\mathsf{apply}_f) : C(\lambda(\mathsf{apply}_f)),$$
$$\mathsf{ind}_{A\to B}(z, f) : C(f).$$

Ο τρόπος να συσχετίσουμε αυτά τά δύο στιγμιότυπα τής C μάς παρέχεται από τό επόμενο λήμμα.

Λήμμα 3.9.1. *Για οποιαδήποτε $f : A \to B$ υπάρχει ένα*

$$\eta_{A\to B}(f) : \lambda(\mathsf{apply}_f) = f,$$

τό οποίο ικανοποιεί τή σχέση $\eta_{A\to B}(\lambda(b)) \equiv \mathsf{refl}_{\lambda(b)}$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στήν f· αν η f είναι τής μορφής $\lambda(b)$, τότε

$$\lambda(\mathsf{apply}_{\lambda(b)}) \equiv \lambda(b)$$

(από τόν ορισμό τού apply), οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$\eta_{A\to B}(\lambda(b)) :\equiv \mathsf{refl}_{\lambda(b)}. \qquad \square$$

Συνοψίζοντας, έχουμε τά εξής:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{apply}_{\lambda(b)} & \equiv & b, \\ \lambda(\mathsf{apply}_f) & = & f. \end{array}$$

Μπορούμε τώρα να θέσουμε

$$\mathsf{ind}_{A\to B}(z, f) :\equiv \mathsf{transport}^C(\eta_{A\to B}(f), z(\mathsf{apply}_f)).$$

Εύκολα ελέγχθεται ότι ο ορισμός αυτός επαληθεύει τήν ορίζουσα σχέση τού $\mathsf{ind}_{A\to B}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{ind}_{A\to B}(z, \lambda(b)) &\equiv \mathsf{transport}^C(\eta_{A\to B}(\lambda(b)), z(\mathsf{apply}_{\lambda(b)})) \\ &\equiv \mathsf{transport}^C(\mathsf{refl}_{\lambda(b)}, z(b)) \\ &\equiv z(b). \end{aligned}$$

Πόρισμα 3.9.2. *Ο $\mathsf{ind}_{A\to B}$ είναι ορίσιμος από τούς* apply *και* $\eta_{A\to B}$. $\square$

Εξ αιτίας αυτού, η συνήθης πρακτική κατά τήν παρουσίαση τής θεωρίας τύπων είναι ο $\mathsf{ind}_{A\to B}$ να αποσιωπάται προς χάριν τών apply και $\eta_{A\to B}$. Στό εξής θα υιοθετήσουμε αυτή τήν πρακτική. Επιπλέον, θα είμαστε πιο χαλαροί όσον αφορά τή διάκριση μεταξύ συναρτήσεων και μετασχηματισμών, και θα γράφουμε $f(x)$ αντί τού $\mathsf{apply}_f(x)$, όπως είναι καθιερωμένο στά μαθηματικά.

Με αυτόν τόν συμβολισμό, ο apply_f γράφεται

$$(x : A)\ f(x).$$

Αυτά που είπαμε για συναρτήσεις ισχύουν αυτούσια και για εξαρτώμενες συναρτήσεις. Ειδικότερα, ισχύουν τά ανάλογα τού λήμματος 3.9.1 και τού πορίσματος 3.9.2:

Λήμμα 3.9.3. *Για οποιαδήποτε $f : \prod(B)$ υπάρχει ένα*

$$\eta_{\prod(B)}(f) : \lambda(x : A)\ f(x) = f,$$

τό οποίο ικανοποιεί τή σχέση $\eta_{\prod(B)}(\lambda(b)) \equiv \mathsf{refl}_{\lambda(b)}$. $\square$

Πόρισμα 3.9.4. *Ο $\mathsf{ind}_{\prod(B)}$ είναι ορίσιμος από τούς* apply *και* $\eta_{\prod(B)}$. $\square$

Η αρχή επαγωγής για τόν $A_1 \times A_2$ λέει ότι, δοθέντων μιας οικογένειας

$$(x : A_1 \times A_2)\, C(x)$$

και ενός μετασχηματισμού

$$(x_1 : A_1, x_2 : A_2)\, c_{\mathsf{pair}}(x_1, x_2) : C(\mathsf{pair}(x_1, x_2)),$$

μπορούμε να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό $(x : A_1 \times A_2)\, t(x) : C(x)$ θέτοντας

$$t(\mathsf{pair}(a_1, a_2)) :\equiv c_{\mathsf{pair}}(a_1, a_2).$$

Από τήν αρχή επαγωγής λαμβάνεται ο επαγωγέας

$$\frac{(x_1 : A_1, x_2 : A_2)\, z(x_1, x_2) : C(\mathsf{pair}(x_1, x_2)) \qquad x : A_1 \times A_2}{\mathsf{ind}_{A_1 \times A_2}(z, x) : C(x)}$$

τού $A_1 \times A_2$, με ορίζουσα σχέση

$$\mathsf{ind}_{A_1 \times A_2}(z, \mathsf{pair}(a_1, a_2)) :\equiv z(a_1, a_2).$$

Αρχή τής απόδειξης με επαγωγή στόν $A_1 \times A_2$: Προκειμένου να αποδείξουμε μία ιδιότητα τών στοιχείων τού $A_1 \times A_2$, αρκεί να τήν δείξουμε για στοιχεία τής μορφής $\mathsf{pair}(x_1, x_2)$.

Όπως συνέβη και με τούς τύπους συναρτήσεων, προκειμένου να πάρουμε πίσω τόν $\mathsf{ind}_{A_1 \times A_2}$ από τίς pr_1 και pr_2 χρειαζόμαστε τό επόμενο αποτέλεσμα.

Λήμμα 3.9.5. *Για οποιοδήποτε $x : A_1 \times A_2$, υπάρχει ένα*

$$\eta_{A_1 \times A_2}(x) : \mathsf{pair}(\mathsf{pr}_1(x), \mathsf{pr}_2(x)) = x$$

τό οποίο ικανοποιεί τή σχέση $\eta_{A_1 \times A_2}(\mathsf{pair}(x_1, x_2)) \equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(x_1, x_2)}$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στό x, θέτοντας

$$\eta_{A_1 \times A_2}(\mathsf{pair}(x_1, x_2)) :\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(x_1, x_2)}. \qquad \square$$

Άσκηση 3.1. Ορίστε, με τή βοήθεια τών pr_i και $\eta_{A_1 \times A_2}$, έναν μετασχηματισμό ο οποίος ικανοποιεί τήν ορίζουσα σχέση τού $\mathsf{ind}_{A_1 \times A_2}$.

Ισχύουν τά αυτά για εξαρτώμενα ζεύγη.

Η αρχή τής επαγωγής για τόν $\mathbf{1}$ λέει ότι, δοθέντων μιας οικογένειας $(x : \mathbf{1})\, C(x)$ και ενός $c_! : C(!)$, η σχέση

$$t(!) :\equiv c_!$$

ορίζει τό $t(x) : C(x)$ για τυχόν $x : \mathbf{1}$. Ειδικότερα,
Αρχή τής απόδειξης με επαγωγή στόν $\mathbf{1}$: Προκειμένου να αποδείξουμε μία ιδιότητα για τό τυχόν στοιχείο τού $\mathbf{1}$, αρκεί να τήν δείξουμε για τό !.

Νωρίτερα παρατηρήσαμε ότι ο αναδρομέας τού $\mathbf{1}$ είναι ορίσιμος χωρίς αναδρομή. Δεν συμβαίνει τό ίδιο με τόν επαγωγέα

$$\frac{z : C(!) \qquad x : \mathbf{1}}{\mathsf{ind}_{\mathbf{1}}(z, x) : C(x)}$$

αυτού, όπου

$$\mathsf{ind}_{\mathbf{1}}(z, !) :\equiv z.$$

Συγκεκριμένα, εκείνο που μάς λέει παραπάνω είναι ότι τό ! είναι τό μοναδικό στοιχείο τού $\mathbf{1}$:

Άσκηση 3.2. Δείξτε ότι, για οποιοδήποτε $x : \mathbf{1}$, υπάρχει ένα

$$\eta_{\mathbf{1}}(x) : ! = x$$

τό οποίο ικανοποιεί τή σχέση $\eta_{\mathbf{1}}(!) \equiv \mathsf{refl}_!$, και χρησιμοποιήστε το για να ορίσετε τόν $\mathsf{ind}_{\mathbf{1}}$.

Η αρχή επαγωγής τού $\mathbf{0}$ δίνει, για οποιαδήποτε οικογένεια

$$(x : \mathbf{0})\, C(x)$$

έναν μετασχηματισμό

$$(x : \mathbf{0})\, t(x) : C(x)$$

χωρίς ορίζουσες σχέσεις (μια και δεν υπάρχει τίποτα στό οποίο να μπορεί να οριστεί). Αυτός ο μετασχηματισμός είναι και ο επαγωγέας

$$\frac{x : \mathbf{0}}{\mathsf{ind}_{\mathbf{0}}(x) : C(x)}$$

τού $\mathbf{0}$.

Ο $\mathsf{ind}_{\mathbf{0}}$ μπορεί να οριστεί από τόν $\mathsf{rec}_{\mathbf{0}}$:

$$\mathsf{ind}_{\mathbf{0}}^{C}(x) :\equiv \mathsf{rec}_{\mathbf{0}}^{C(x)}(x).$$

Ο τυπικός τρόπος για να δείξει κανείς ότι ένας τύπος A δεν έχει στοιχεία είναι να ορίσει έναν μετασχηματισμό

$$(x : A)\, t(x) : \mathbf{0}$$

(ή, ισοδύναμα, μία συνάρτηση $f : A \to \mathbf{0}$): Η ύπαρξη ενός τέτοιου μετασχηματισμού σημαίνει ότι εάν ο A είχε ένα στοιχείο a, τότε ο $\mathbf{0}$ θα είχε τό στοιχείο $t(a)$, άτοπο.

Άσκηση 3.3. Έστω E ο τύπος που έχει ως μοναδικό κατασκευαστή τόν

$$(x : E)\, e(x) : E.$$

Δείξτε ότι ο E δεν έχει στοιχεία. [Υπόδειξη: Διατυπώστε πρώτα τήν αρχή αναδρομής τού E.]

3.10 Ασκήσεις

Άσκηση 3.4. Περιγράψτε μία συνάρτηση

$$f : ((A_1 \to C) \times (A_2 \to C)) \to (A_1 + A_2) \to C.$$

Άσκηση 3.5. Περιγράψτε μία συνάρτηση

$$f : \prod (x : A_1 + A_2)\ \Big[\Big(\sum (x_1 : A_1)\ \mathsf{in}_1(x_1) = x\Big) + \Big(\sum (x_2 : A_2)\ \mathsf{in}_2(x_2) = x\Big)\Big].$$

Άσκηση 3.6. Ορίστε συνάρτηση

$$f : \Big(\sum (x : \mathbf{1})\ A(x)\Big) \to A(!)$$

ούτως ώστε $f(\mathsf{pair}(!, a)) \equiv a$.

Άσκηση 3.7. Χρησιμοποιήστε τόν $\mathsf{ind}_{\mathsf{Bool}}$ για να ορίσετε μία συνάρτηση

$$f : \prod(x : \mathsf{Bool})\,((\mathsf{false} = x) + (\mathsf{true} = x))$$

με $f(\mathsf{false}) \equiv \mathsf{in}_1(\mathsf{refl}_{\mathsf{false}})$ και $f(\mathsf{true}) \equiv \mathsf{in}_2(\mathsf{refl}_{\mathsf{true}})$.

Άσκηση 3.8. Χρησιμοποιήστε τήν f τής προηγούμενης άσκησης για να ορίσετε έναν μετασχηματισμό

$$(c_{\mathsf{false}} : C(\mathsf{false}), c_{\mathsf{true}} : C(\mathsf{true}), x : \mathsf{Bool})\ \mathsf{ind}'(c_{\mathsf{false}}, c_{\mathsf{true}}, x) : C(x)$$

ο οποίος ικανοποιεί τήν ορίζουσα σχέση τού $\mathsf{ind}_{\mathsf{Bool}}$.

Άσκηση 3.9 ([7, άσκηση 1.4])**.** Ειδική περίπτωση τού ορισμού με αναδρομή στόν Nat είναι ο ορισμός με *επανάληψη* (iteration):

$$\begin{aligned} t(0) &:\equiv d_0, \\ t(\mathsf{s}(n)) &:\equiv d_{\mathsf{s}}(t(n)), \end{aligned}$$

όπου C τύπος, $d_0 : C$ και $(x : C)\ d_{\mathsf{s}}(x) : C$. Δοθέντων ενός τύπου C, ενός $c_0 : C$, και ενός $(x : \mathsf{Nat}, y : C)\ c_{\mathsf{s}}(x, y) : C$ ορίστε, χρησιμοποιώντας επανάληψη αντί για αναδρομή, έναν μετασχηματισμό $(n : \mathsf{Nat})\ r(n) : C$ ο οποίος ικανοποιεί τίς ισότητες

$$\begin{aligned} r(0) &= c_0, \\ r(\mathsf{s}(n)) &= c_{\mathsf{s}}(n, r(n)), \end{aligned}$$

και συμπεράνετε ότι για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό n,

$$r(n) = \mathsf{rec}_{\mathsf{Nat}}(c_0, c_{\mathsf{s}}, n).$$

[Υπόδειξη: Ορίστε, με επανάληψη, έναν μετασχηματισμό $(n : \mathsf{Nat})\ t(n) : \mathsf{Nat} \times C$, και εφαρμόστε τή δεύτερη προβολή για να πάρετε τόν r. Για τή δεύτερη ισότητα, κάντε επαγωγή στό n. Τέλος, χρησιμοποιήστε τό θεώρημα 2.3.1.]

Άσκηση 3.10 ([7, άσκηση 1.5])**.** Δείξτε ότι τό εξαρτώμενο άθροισμα $\sum(A)$ μιας οικογένειας A επί τού Bool συμπεριφέρεται όπως ο τύπος $A(\mathsf{false}) + A(\mathsf{true})$: Ορίστε κατάλληλους μετασχηματισμούς in_1', in_2', και ind', και επαληθεύστε τίς ορίζουσες σχέσεις τού επαγωγέα.

Άσκηση 3.11 ([7, άσκηση 1.6])**.** Εάν A οικογένεια επί τού Bool, ορίστε κατάλληλους μετασχηματισμούς

$$(x_1 : A(\mathsf{false}), x_2 : A(\mathsf{true}))\ \mathsf{pair}'(x_1, x_2) : \prod(A),$$

και

$$\begin{aligned} (f : \textstyle\prod(A))\ \mathsf{pr}_1'(f) : A(\mathsf{false}), \\ (f : \textstyle\prod(A))\ \mathsf{pr}_2'(f) : A(\mathsf{true}), \end{aligned}$$

και επαληθεύστε ότι ικανοποιούνται οι προβλεπόμενες ορίζουσες σχέσεις.

Άσκηση 3.12. Ορίστε αντίστροφες μεταξύ τους συναρτήσεις

1. $A + \mathbf{0} \ \leftrightarrows\ A$,
2. $A \times \mathbf{0} \ \leftrightarrows\ \mathbf{0}$,
3. $A \times \mathbf{1} \ \leftrightarrows\ A$.

Κεφάλαιο 4

Η λογική στή θεωρία τύπων

Η θεωρία τύπων είναι μία συλλογή κανόνων για τόν χειρισμό τών τύπων και τών στοιχείων τους. Αλλά στά μαθηματικά, καθώς και στή φυσική γλώσσα γενικώς, χρησιμοποιούμε λογικούς συνδέσμους όπως «και» και «ή», και ποσοδείκτες όπως «για κάθε» και «υπάρχει». Η θεωρία τύπων μάς προσφέρει περισσότερους από έναν τρόπους να αντιστοιχίσουμε τίς προτάσεις τής κοινής μαθηματικής γλώσσας σε τύπους.

Η αντιστοιχία Curry-Howard εκφράζει μία αυστηρά κατασκευαστική αντίληψη για τή λογική, η οποία έχει σημαντικές αρετές (κατασκευαστικότητα, υπολογιστικότητα, απλότητα). Παρ' όλ' αυτά (ή, ίσως, ακριβώς για αυτόν τόν λόγο), είναι ακατάλληλη για τήν τυποθεωρητική διατύπωση ορισμένων κλασικών αρχών, όπως η αρχή τού αποκλειόμενου τρίτου και τό αξίωμα τής επιλογής.

Στό κεφάλαιο αυτό θα προετοιμάσουμε τό έδαφος για μία άλλη μετάφραση τής λογικής στήν θεωρία τύπων, η οποία θα μάς επιτρέψει να διαχειριστούμε αυτές τίς αρχές.

4.1 Λογική κατά Curry-Howard

Στά δύο προηγούμενα κεφάλαια είδαμε πώς ορισμένοι τύποι είναι (μεθ)ερμηνεύσιμοι ως προτάσεις, εις τρόπον ώστε οι κατασκευαστές τους να αντιστοιχούν στούς κανόνες εισαγωγής και οι αναδρομείς τους στούς κανόνες απαλοιφής τών προτάσεων αυτών. Αυτό μάς επιτρέπει να διατυπώνουμε θεωρήματα και άλλους ισχυρισμούς χρησιμοποιώντας λέξεις τής φυσικής γλώσσας όπως «και», «ή», «για κάθε» και ούτω καθεξής, ενώ μπορούμε ανά πάσα στιγμή να γράφουμε αυτούς τούς ισχυρισμούς σε αμιγώς τυποθεωρητική γλώσσα και να τούς εννοούμε ως τύπους. Και εφ' όσον οι αποδείξεις είναι περιγραφές τεκμηρίων αλήθειας, τό να αποδείξουμε έναν τέτοιο ισχυρισμό συνίσταται στό να εμφανίσουμε ένα στοιχείο τού αντίστοιχου τύπου.

Αντιστρόφως, υπό τήν αντιστοιχία Curry-Howard, κάθε τύπος μπορεί να διαβαστεί σαν πρόταση, αρκεί τά στοιχεία του να εννοηθούν ως τεκμήρια αλήθειας. Ο Nat, για παράδειγμα, είναι η πρόταση που έχει τούς δύο κανόνες εισαγωγής

$$\frac{}{\mathrm{Nat}} \qquad\qquad \frac{\mathrm{Nat}}{\mathrm{Nat}} \tag{4.1}$$

και τόν κανόνα απαλοιφής

$$\frac{C \qquad \begin{matrix}(\mathrm{Nat}, C)\\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \mathrm{Nat}}{C}\ . \tag{4.2}$$

Οι κανόνες αυτοί μπορεί να έχουν ενδιαφέρον από τή σκοπιά τής δομικής θεωρίας αποδείξεων, αλλά από μία πιο πρακτική σκοπιά, σύμφωνα με τήν οποία η λογική είναι ένα εργαλείο για τήν οργάνωση και συστηματοποίηση ενός σώματος γνώσης, είναι άχρηστοι, καθώς δεν συνεισφέρουν στή σχέση τής αποδειξιμότητας. Επίσης, η φυσική αντίληψη για τόν Nat δεν είναι εκείνη μιας πρότασης, καθώς δεν μάς φαίνεται να εκφράζει κάποιο γεγονός, μαθηματικό ή άλλο· ειδικότερα, δεν αντιστοιχεί σε μία πρόταση τής φυσικής γλώσσας.

Στήν πράξη, οι μαθηματικές θεωρίες διαχωρίζουν τή λογική από τό καθ' εαυτού αντικείμενό τους: Η λογική αντιμετωπίζεται ως μία συλλογή αναλυτικών γεγονότων, και επομένως είναι κατά τό μάλλον ή ήττον κοινή ανάμεσα στίς διάφορες θεωρίες, ενώ τό ειδικό αντικείμενο, γενικά, δεν είναι[1].

Τεχνικώς, οι τύποι τών θεωριών αυτών είναι χωρισμένοι σε δύο ομάδες. Αφ' ενός έχουμε τά είδη (sorts), τά οποία παίζουν τόν ρόλο τών τύπων δεικτών· για τήν αριθμητική, αυτή η ομάδα περιέχει τόν Nat. Αφ' ετέρου, έχουμε τίς προτάσεις, οι οποίες παίζουν τόν ρόλο τών στιγμιοτύπων τών οικογενειών. Με άλλα λόγια, μόνο οικογένειες προτάσεων παραμετροποιημένες από είδη μπορούν να εκφραστούν. Αυτό έχει σαν συνέπεια ότι μόνο τά είδη έχουν διατυπώσιμες αρχές επαγωγής, και μάλιστα περιορισμένες σε τέτοιες οικογένειες· η αριθμητική, λόγου χάριν, περιέχει τήν αρχή τής επαγωγής τού Nat, άλλα διατυπωμένη μόνο για φόρμουλες τής γλώσσας.

Αυτή η μορφή οργάνωσης αντανακλά τή βασική πρόθεση πίσω από τήν εκάστοτε θεωρία. Αν, για παράδειγμα, τό αντικείμενο μελέτης μας είναι οι φυσικοί αριθμοί, τότε μάς ενδιαφέρει να μπορούμε να εκφράζουμε ιδιότητες (τής δομής) τών φυσικών αριθμών, ενώ ιδιότητες τών τεκμηρίων αλήθειας τών προτάσεων όχι και τόσο.

Αυτή η ως επί τό πλείστον συμβασιοκρατική εξήγηση υπονοεί ότι ανά πάσα στιγμή μπορούμε, αν τό θελήσουμε, να εμπλουτίσουμε μία γλώσσα πρώτης τάξης με κατηγορήματα επί τεκμηρίων αλήθειας, και τότε βεβαίως να προσθέσουμε και τίς κατάλληλες αρχές επαγωγής. Είναι, επίσης, γνωστό, ότι μπορούμε να προσθέσουμε τήν αρχή τού αποκλειόμενου τρίτου και να πάρουμε τήν αντίστοιχη κλασική θεωρία. Ωστόσο, αυτά τά δύο δεν μπορούμε να τά κάνουμε ταυτόχρονα: Τό σχήμα

$$A + (A \to \mathbf{0}),$$

όπου A τυχών τύπος, αντιφάσκει με τό univalence. Προκειμένου να έχουμε στη διάθεσή μας τήν αρχή τού αποκλειόμενου τρίτου, έστω και σαν ρητή υπόθεση, χρειαζόμαστε έναν άλλο τρόπο να εκφράσουμε αυτή τήν αρχή.

4.2 Απλές προτάσεις

Όταν οι τύποι διαβάζονται ως προτάσεις, τά στοιχεία τους ενδέχεται να περιέχουν πληροφορία πέραν τού ότι αυτοί αληθεύουν, η οποία απορρέει από τήν ύπαρξη

[1]Ωστόσο, ο Frege επιχειρηματολογεί υπέρ τής αναλυτικότητας τής αριθμητικής, η δουλειά τού Bishop υποδεικνύει ότι η ανάλυση είναι, κατά πάσα πιθανότητα, αναλυτική, ενώ η ομοτοπική θεωρία τύπων κάνει τό ίδιο για μεγάλο μέρος τής άλγεβρας και τής γεωμετρίας.

διαφορετικών μεταξύ τους τεκμηρίων αλήθειας, και όλες οι τυποθεωρητικές κατασκευές σέβονται αυτή τήν επιπλέον πληροφορία. Για παράδειγμα, ένα στοιχείο τού τύπου $A + B$ μάς αποκαλύπτει περισσότερα από τό απλό γεγονός ότι ο $A + B$ είναι κατοικημένος: Μάς λέει επίσης από ποιον προσθετέο έχει προέλθει. Ομοίως, ένα στοιχείο τού $\sum(x{:}A)\,B(x)$ περιέχει ως πρόσθετη πληροφορία έναν μάρτυρα ύπαρξης, δηλαδή ένα $a : A$ τέτοιο που $B(a)$. Ωστόσο, στήν πράξη δεν ενδιαφερόμαστε για τό πόσα και ποια τεκμήρια αλήθειας έχει μία πρόταση, αλλά μόνο για τό αν έχει τέτοια τεκμήρια, δηλαδή αν αληθεύει.

Μπορούμε να λάβουμε μία πιο συμβατική λογική περιοριζόμενοι σε τύπους, τά στοιχεία τών οποίων δεν περιέχουν πληροφορία πλέον τού ότι αυτοί αληθεύουν, και βλέποντας μόνο αυτούς ως προτάσεις. Αυτό υποδεικνύει τόν ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.2.1. Μία *απλή πρόταση (mere proposition)* είναι ένας τύπος, όλα τά στοιχεία τού οποίου είναι ίσα μεταξύ τους.

Μπορούμε να γράψουμε τόν παραπάνω ορισμό ως τόν τύπο

$$\mathrm{IsProp}(A) :\equiv \prod(x, y : A)\,(x = y).$$

Σε συνέχεια τής συζήτηση που μάς οδήγησε στόν ορισμό 4.2.1, αρμόζει εδώ να παρατηρήσουμε ότι οι αρχές επαγωγής τών απλών προτάσεων δεν είναι, γενικά, ιδιαίτερα χρήσιμες· για παράδειγμα,

Λήμμα 4.2.2. *Αν ο $A_1 \times A_2$ είναι απλή πρόταση, τότε η αρχή τής επαγωγής του ανάγεται στήν αρχή τής αναδρομής του.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με τό λήμμα 3.9.5 και τήν άσκηση που τό ακολουθεί, η αρχή επαγωγής τού $A_1 \times A_2$ είναι ισοδύναμη με τήν ισότητα

$$\mathsf{pair}(\mathsf{pr}_1(x), \mathsf{pr}_2(x)) = x$$

η οποία, εφ' όσον ο $A_1 \times A_2$ είναι απλή πρόταση, ικανοποιείται αυτομάτως. □

Άσκηση 4.1. Βελτιώστε τήν απόδειξη τού λήμματος: Δείξτε ότι, δοθέντος ενός

$$\eta_{A_1\times A_2}(x) : \mathsf{pair}(\mathsf{pr}_1(x), \mathsf{pr}_2(x)) = x$$

για κάθε $x : A_1 \times A_2$, μπορούμε να ορίσουμε ένα

$$\eta'_{A_1\times A_2}(x) : \mathsf{pair}(\mathsf{pr}_1(x), \mathsf{pr}_2(x)) = x$$

ούτως ώστε $\eta'_{A_1\times A_2}(\mathsf{pair}(x_1, x_2)) = \mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(x_1,x_2)}$. [Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε (χωρίς απόδειξη) ότι τό p^{-1} είναι αντίστροφο τού p, δηλ. ότι $p^{-1} \bullet p = \mathsf{refl}_b$ για $p : a = b$.]

Ας σημειωθεί, ωστόσο, ότι η αρχή επαγωγής ενός τύπου είναι συχνά απαραίτητη προκειμένου να δείξουμε ότι ο τύπος αυτός είναι απλή πρόταση.

Στή συνέχεια, όπως και μέχρι τώρα, θα συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε τήν αντιστοιχία Curry-Howard για να μετεγγράφουμε στή θεωρία τύπων τίς προτάσεις που θα διατυπώνουμε στή φυσική γλώσσα, καθώς είναι αυτή που κατά κανόνα εκφράζει πιστά αυτό που θέλουμε να πούμε. Στις μεμονωμένες περιπτώσεις που θα εννοούμε κάτι άλλο, θα τό δηλώνουμε ρητά. Με τή λογική τών απλών προτάσεων θα ασχοληθούμε διεξοδικά στό κεφάλαιο (forward reference).

Βιβλιογραφία

[1] Errett Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, Academic Press, New York, 1967.

[2] Per Martin-Löf, *Intuitionistic Type Theory*, Studies in proof theory, vol. 1, Bibliopolis, Napoli, 1984.

[3] ______, *On the meanings of the logical constants and the justifications of the logical laws*, Nordic journal of philosophical logic **1** (1996), no. 1, 11–60.

[4] Emily Riehl, *Category Theory in Context*, Aurora: Dover Modern Math Originals, Courier Dover Publications, 2017.

[5] Egbert Rijke, *Introduction to Homotopy Type Theory* (2022), https://arxiv.org/abs/2212.11082.

[6] Alfred Tarski, *The Concept of Truth in Formalized Languages*, Logic, Semantics, Metamathematics, 2nd ed. (J. Corcoran, ed.), Hackett, Indianapolis, 1983, pp. 152–278.

[7] The Univalent Foundations Program, *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*, https://homotopytypetheory.org/book/. Institute for Advanced Study, 2013.