$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

Γραμμική Απεικόνιση:

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : T(x+y) = T(x) + T(y)$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n : T(\lambda x) = \lambda T(x)$

• Επακόλουθα : $T(0) = 0$

$$T(c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots c_n a_n)$$
$$=$$
$$T(c_1 a_1) + T(c_2 a_2) + \dots T(c_n a_n)$$
$$=$$
$$c_1 T(a_1) + c_2 T(a_2) + \dots c_n T(a_n)$$

Για κάθε γραμμική απεικόνιση:
$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, υπάρχει $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
ώστε $T(x) = Ax$

* Πώς βρίσκω τον T?

Έστω $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$, ..., $e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

✓ n διανύσματα το πλήθος
Υπολογίζω τα $T(e_1)$, $T(e_2)$, ..., $T(e_n)$ κ'
τα βάζω σαν στήλες του A

πχ1 Να βρεθεί αν T γραμμική

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} x+2y \\ z-3x \\ x+y-z \end{bmatrix}$$

• $T(x+x', y+y', z+z')$

$= T(x, y, z) + T(x', y', z')$

$$= \begin{bmatrix} x+2y \\ z-3x \\ x+y-z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x'+2y' \\ z'-3x' \\ x'+y'-z' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x+x'+2y+2y' \\ z-3x+z'-3x' \\ x+y-z+x'+y'-z' \end{bmatrix} = T(x+x', y+y', z+z') \checkmark$$

• $$T(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \begin{bmatrix} \lambda x + 2\lambda y \\ \lambda z - 3\lambda x \\ \lambda x + \lambda y - \lambda z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda(x+2y) \\ \lambda(z-3x) \\ \lambda(x+y-z) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x+2y \\ z-3x \\ x+y-z \end{bmatrix} = \lambda T(x, y, z) \checkmark$$

(2) Έστω $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- $T(e_1) = T(1,0,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $T(e_2) = T(0,1,0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $T(e_3) = T(0,0,1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Άρα $T(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_3 - 3x_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{bmatrix}$ ίδιο πράγμα με τον τύπο !

Π.χ 2
- $T(x, y, z, w) = 2z$, $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$
- $T(x, y) = \begin{bmatrix} x^{2/3} \cdot y^{1/3} \\ 0 \end{bmatrix}$, $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\longrightarrow T(x+x', y+y', z+z', w+w') = 2(z+z')$
$= 2z + 2z' = T(x, y, z, w) + T(x', y', z', w')$

$\longrightarrow T(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda \omega) = 2\lambda z = \lambda \cdot 2z = \lambda \cdot T(x, y, z, \omega)$

✓

Εξετάζω αν:

- $T(\lambda x, \lambda y) = \lambda T(x, y)$?

$$\begin{bmatrix} (\lambda x)^{2/3} \cdot (\lambda y)^{1/3} \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x^{2/3} \cdot y^{1/3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα το $T(\lambda x) = \lambda T(x)$

- $T(x+x', y+y') \underset{?}{=} T(x, y) + T(x', y')$

$\forall x, x', y, y' \in \mathbb{R}$

Αρκεί να ελέγξω οτι $\forall x, x', y, y' \in \mathbb{R}$

$(x+x')^{2/3} \cdot (y+y')^{1/3} = x^{2/3} \cdot y^{1/3} + (x')^{2/3} \cdot (y')^{1/3}$ (1)

Άρα $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ κ' $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ θα έχω:

(1) $\Rightarrow 0 = -1 + 2^{1/3}$ ή $1 = 2^{1/3}$ ΑΤΟΠΟ!

ΠΧ 3

πχ3 Έστω η απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ η οποία: ① προβάλλει ένα σημείο (x, y, z) στο επίπεδο των xy

② διαστέλλει τη διάσταση x κατά 2

③ παίρνει το συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \xrightarrow{①} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{②} \begin{bmatrix} 2x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{③} \begin{bmatrix} -2x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\to T\left(\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2\lambda x \\ -\lambda y \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -2x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda T(x, y, z)$$

$$\to T\left(\begin{bmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2(x+x') \\ -(y+y') \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2x' \\ -y' \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right)$$

• Βρίσκω τα $T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$T(e_3) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Άρα $T(x) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$