Άσκηση (Φροντιστήριο)

① $(\mathbb{R}^3)$ $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Να βρεθεί αν είναι εξαρτημένα ή ανεξάρτητα και αν ισχύει το πρώτο, να βρεθεί και μια σχέση γραμμικής εξάρτησης μεταξύ τους

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_2 = \Gamma_2 - 2\Gamma_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 = \Gamma_3 - 3\Gamma_1]{}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 = \Gamma_3 - 2\Gamma_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 = \Gamma_2(-1/3)]{}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 = \Gamma_1 - 4\Gamma_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{Βασική} & \text{Βασική} & \text{Ελεύθερη} \end{array}$$

→ Γραμμικώς εξαρτημένα

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

← span (γραμμική θήκη)

Δηλαδή, $\forall\, x_1, x_2, x_3$ της μορφής $2x_3, -x_3, x_3$, ισχύει ότι:

$$x_1 \cdot \vec{v}_1 + x_2 \cdot \vec{v}_2 + x_3 \cdot \vec{v}_3 = \vec{0} \quad (1)$$

Για $x_3 = 1$, $x_2 = -1$, $x_1 = 2$

Άρα $(1) \Longrightarrow 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0} \Longrightarrow \vec{v}_2 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_3 \quad (2)$

• ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ (της 2)

$$2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}=\vec{V}_2$$

Άσκηση 2

▶ $\vec{V}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\5\end{bmatrix}$, $\vec{V}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\8\end{bmatrix}$, $\vec{V}_3=\begin{bmatrix}4\\-1\\0\end{bmatrix}$

Είναι γραμμικά ανεξάρτητα;

$$A=\begin{bmatrix}0&1&4\\1&2&-1\\5&8&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\Gamma_1\rightleftarrows\Gamma_2]{}\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&4\\5&8&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\Gamma_3:=\Gamma_3-5\Gamma_1]{}\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&4\\0&-2&5\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3=\Gamma_3+2\Gamma_2]{}\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&4\\0&0&13\end{bmatrix}$$

~ Άρα είναι γραμμικά ανεξάρτητα αφού πλήθος οδηγών = πλήθος στηλών

▶ $\vec{V}_1=\begin{bmatrix}8\\3\\0\\-2\end{bmatrix}$ $\vec{V}_2=\begin{bmatrix}4\\11\\-4\\6\end{bmatrix}$ $\vec{V}_3=\begin{bmatrix}2\\0\\1\\1\end{bmatrix}$ $\vec{V}_4=\begin{bmatrix}3\\-9\\-5\\3\end{bmatrix}$ $\vec{V}_5=\begin{bmatrix}0\\-2\\-7\\7\end{bmatrix}$

Επειδή έχουμε 5 διανύσματα στο $\mathbb{R}^4$, τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα

$$\text{Gauss} \longrightarrow \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$x_4 - 2x_5 = 0 \Rightarrow x_4 = 2x_5$
$x_3 = 0$
$x_2 + x_5 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_5$
$x_1 - x_5 = 0 \Rightarrow x_1 = x_5.$

Για $x_5 = 1$: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$

Άρα $1 \cdot \vec{v_1} - 1 \cdot \vec{v_2} + 0\vec{v_3} + 2\vec{v_4} + 1 \cdot \vec{v_5} = \vec{0}$

$$\boxed{\vec{v_2} = \vec{v_1} + 2\vec{v_4} + \vec{v_5}}$$

$$\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$