Πρόβλημα 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

α) Να βρεθούν, εφόσον υπάρχουν, οι αντίστροφοι των AB και BA.

β) Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει $C \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ ώστε CA να είναι αντιστρέψιμος.

Λύση

α) Έστω πίνακας $C = AB \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Έχουμε: $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Εφόσον $\det C = 6 \neq 0$, $\exists C^{-1}$. Συγκεκριμένα,

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_2 := \Gamma_2/2]{\Gamma_1 := \Gamma_1 - 2\Gamma_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2}$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_1 := \Gamma_1 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & -1/6 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right]$$

C^{-1}

Συνεπώς παρατηρούμε ότι $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/6 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$

Έστω τώρα ο πίνακας $D = BA \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Έχουμε : $D = B\cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ο πίνακας D δεν είναι αντιστρέψιμος, εφόσον $\det D = +3 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right) = 0$

↳ Ή εναλλακτικά επειδή $S_2 = -(S_3)$

β) Έστω $F = CA, \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$\det(F) = \det(C\cdot A) = \det\left(\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right) =$

$= \det\left(\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ C_{31} & C_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ C_{31} & C_{32} & 0 \end{bmatrix}\right) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) =$

ανάπτυγμα ως προς την τελευταία στήλη

$= 0 \cdot 0 = 0$

ανάπτυγμα ως προς την τελευταία γραμμή

Πρόβλημα 2.

Να βρεθεί μια βάση του μηδενοχώρου $Null(A) = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = 0\}$, του πίνακα:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & -6 & -3 \end{bmatrix}$. Ποιά είναι η διάσταση του μηδενοχώρου;

Για να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου, Null(A), αρκεί να λύσουμε το: $Ax=0 \iff \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & -6 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_3 := \Gamma_3/3]{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2}$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_3 := \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_3 := \Gamma_3/2]{\Gamma_2 := \Gamma_2/9}$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 := \Gamma_3 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Η τρίτη εξίσωση ικανοποιείται $\forall (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$.
- Η δεύτερη εξίσωση ικανοποιείται για $w=0$
- Η πρώτη εξίσωση ικανοποιείται για $x+y-2z-3w=0$

$\Big\} \Rightarrow x = 2z - y$

Άρα ο N(A) έχει ένα διάνυσμα της μορφής: $\vec{x} = \begin{bmatrix} -y+2z \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$

Δηλαδή, $\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} z$, με $y, z \in \mathbb{R}$

Επομένως, για $y=z=1$, μια βάση του $N(A)$ είναι η $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Η διάσταση του μηδενοχώρου είναι : $\dim N(A) = n - r(A) =$ (πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών) $= 2$.

Πρόβλημα 3.

Να βρεθούν τα λ για τα οποία ο πίνακας $A-\lambda I$, όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, δεν είναι αντιστρέψιμος.

Λύση

Έχουμε ότι $\det(A-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & -7 \\ 0 & -2-\lambda & -6 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}\right)$ $\dfrac{\text{ανάπτυγμα}}{\text{ως προς την πρώτη στήλη}}$

$= (1-\lambda)\det\left(\begin{bmatrix} -2-\lambda & -6 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)\left[(-2-\lambda)(5-\lambda)+12\right] = (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2) =$

$= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1)$

Για να μην είναι αντιστρέψιμος, πρέπει $\det(A-\lambda I)=0$ $\Rightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=2$

Πρόβλημα 4

Να δειχθεί ότι για κάθε πίνακα $A_{,}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, ο πίνακας $A+A^T$ είναι συμμετρικός και ο πίνακας $A-A^T$ είναι αντισυμμετρικός. Να δειχθεί ότι ο A μπορεί να γραφεί πάντα ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

⇝ Απόδειξη ότι $\forall$ τετραγωνικό πίνακα A, ότι ο $A+A^T$ είναι συμμετρικός:

$$(A+A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A + A^T$$

⇝ Απόδειξη ότι $\forall$ τετραγωνικό πίνακα A, ότι ο $A-A^T$ είναι αντισυμμετρικός.

$$(A-A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A-A^T)$$

⇝ Απόδειξη ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας A μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

Ο πίνακας A μπορει να γραφεί ισοδύναμα και ως εξής:

$$A = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} = \frac{A}{2} + \frac{A^T}{2} + \frac{A}{2} - \frac{A^T}{2} = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}.$$

Θεωρούμε ως $B = \frac{A+A^T}{2}$ και $C = \frac{A-A^T}{2}$

Αρκεί να δείξουμε ότι οι πίνακες B και C είναι συμμετρικοί και αντισυμμετρικοί αντίστοιχα. Αυτό ισχύει, γιατί όπως αποδείξαμε στο 1º ερώτημα, ο πίνακας $A+A^T$ είναι συμμετρικός και ο πίνακας $A-A^T$ είναι αντισυμμετρικος για κάθε τετραγωνικό πίνακα A.

Έτσι, επειδή $B^T = \left(\frac{A+A^T}{2}\right)^T = \frac{1}{2}(A+A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T+A) = B$, ο πίνακας B

είναι συμμετρικός. Και επειδή $C^T = \frac{(A-A^T)^T}{2} = \frac{1}{2}(A-A^T)^T = -\frac{1}{2}(A-A^T) = -C$
ο πίνακας C είναι αντισυμμετρικός.

Συνεπώς, αποδείξαμε ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας A μπορεί να γραφεί πάντα ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

Πρόβλημα 5.

Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορίζουμε το ίχνος του ως άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του, δηλαδή $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$. Να δειχθεί ότι $tr(A^T A) = tr(A \cdot A^T)$ και ότι είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων όλων των στοιχείων του A.

→ Απόδειξη ότι $tr(A^T A) = tr(A \cdot A^T)$

Θεωρούμε τα στοιχεία του A ως $[a]_{ij}$, με (i,j), κάθε τετράγωνο του πίνακα A.

Έχουμε ότι $tr(A^T \cdot A) = \sum_{i=1}^{n} (A^T \cdot A)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (A^T \cdot A)_{ij}$ ⟹

$(A^T \cdot A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A^T)_{ik} \cdot A_{kj}$

$\Rightarrow tr(A^T A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (A^T)_{ik}(A)_{kj} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} ((A)_{kj})((A^T)_{ik}) = tr(A \cdot A^T)$

~ Απόδειξη ότι $tr(A^T \cdot A)$ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων όλων των στοιχείων του A.

Ισχύει ότι $tr(A^T \cdot A) = \sum_{i=1}^{n} (A^T \cdot A)_{ii}$

Εκφράζουμε τα στοιχεία

$(A^T \cdot A)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} (A^T)_{ik} \cdot A_{ki}$. για $i=k$, $(A^T)_{ik} = A_{ki}$ $\Rightarrow (A^T \cdot A)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} \cdot A_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (A_{ki})^2$.

Συνεπώς, $tr(A^T \cdot A) = \sum_{i=1}^{n} (A^T \cdot A)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (A_{ki})^2$.

Πρόβλημα 6.

Για ένα πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορίζουμε το ίχνος ως το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του, δηλαδή $tr(A) = a_{11} + a_{12} + \dots + a_{nn}$. Έστω $W := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} / tr(A) = 0\}$
Νδο το W είναι διανυσματικός χώρος και να βρείτε την διάστασή του.

Το W είναι διανυσματικός χώρος διότι:

1. Είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση, καθώς, δεδομένου ότι: $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} (A)_{ii}$, έχουμε ότι:

$$tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n} (A+B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (A_{ii} + B_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} + \sum_{i=1}^{n} B_{ii} = tr(A) + tr(B)$$

2. Είναι κλειστό ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό, διότι:

$$tr(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda A)_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} A_{ii}.$$

Πρόβλημα 6. Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορίζουμε το ίχνος ως το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του, δηλαδή $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$. Έστω $W = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | tr(A) = 0\}$. Να δειχθεί ότι ο W είναι διανυσματικός χώρος και να βρεθεί η διάστασή του.

Έχουμε ότι αν $A, B \in W$ τότε $\mathrm{tr}(A) = 0, \mathrm{tr}(B) = 0$ και $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B) = 0$ άρα $A+B \in W$. Επίσης, λόγω της προφανούς ιδιότητας $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{tr}(A)$ έχουμε ότι $A \in W$ δίνει και $\lambda A \in W$ για $\lambda \in \mathbb{R}$. Επίσης $tr(0) = 0$, όπου το αριστερά μηδέν είναι ο μηδενικός $n \times n$ πίνακας και το δεξιά μηδέν ο πραγματικός αριθμός μηδέν, άρα ο W έχει και το μηδενικό διάνυσμα. Όλες οι ιδιότητες ικανοποιούνται άρα ο W είναι διανυσματικός χώρος.

Για να βρούμε τη διάσταση του αρκεί να βρούμε μία βάση του. Για 2×2 πίνακες έχουμε ότι η συνθήκη $tr(A) = 0$ δίνει ότι ο W περιέχει όλους τους πίνακες της μορφής

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & -a_{11} \end{bmatrix}$$

άρα μία βάση του είναι η

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Τα παραπάνω είναι βάση του W καθώς είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και παράγουν όλο το W. Αυτό σημαίνει ότι η διάσταση του W για $n = 2$ ισούται με 3.

Για γενικό n θα δώσουμε μια βάση του με $n^2 - 1$ στοιχεία. Έστω E_{ij} ο πίνακας που έχει 1 στην θέση (i, j) και 0 οπουδήποτε αλλού. Έστω $\widetilde{E}_i$ επίσης ο πίνακας που έχει 1 στη θέση (i, i), -1 στη θέση (n, n) και 0 οπουδήποτε αλλού. Ισχυριζόμαστε ότι το σύνολο

$$\mathcal{B} := \left\{ E_{i,j} | (i, j) \in [n] \times [n], i \neq j \right\} \bigcup \left\{ \widetilde{E}_i | 1 \leq i \leq n - 1 \right\}$$

είναι μια βάση του W. Πρώτα από όλα, έχουμε ότι $\mathrm{tr}(E_{ij}) = 0$ για $i \neq j$ και άρα $E_{ij} \in W$, αλλά και $\mathrm{tr}(\widetilde{E}_i) = 0$ οπότε $\widetilde{E}_i \in W$. Εν συνεχεία, εύκολα παρατηρεί κανείς ότι όλοι αυτοί οι πίνακες είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι, γιατί κάθε πίνακας στο $\mathcal{B}$ έχει ένα μη μηδενικό σε μια εγγραφή όπου όλοι οι άλλοι έχουν 0 [1]. Τελικώς, κάθε πίνακας με μηδενικό ίχνος μπορεί να γραφτεί ως το άθροισμα όλων αυτών των πινάκων. Πρώτα, παρατηρούμε ότι κάθε $A \in W$ ικανοποιεί $a_{nn} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{ii}$ λόγω της σχέσης $\mathrm{tr}(A) = 0$. Για να γράψουμε τον A ως γραμμικό συνδυασμό των πινάκων στη $\mathcal{B}$ έχουμε το εξής: για τα στοιχεία εκτός της διαγωνίου χρησιμοποιούμε τους πίνακες $E_{i,j}$ με συντελεστή $a_{i,j}$ στον γραμμικό συνδυασμό και για τα στοιχεία εντός της διαγωνίου, εκτός του n-οστού χρησιμοποιούμε τους $\widetilde{E}_i$ με συντελεστή a_{ii}. Εφόσον τα στοιχεία στο σύνολο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και παράγουν όλο το W αυτό σημαίνει ότι είναι μια βάση του W. Άρα $\mathrm{dim}W = |\mathcal{B}| = n^2 - 1$.

[1] Προσοχή, αυτό είναι μια ικανή αλλά όχι μια αναγκαία συνθήκη για γραμμική ανεξαρτησία.

Πρόβλημα 7

Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $A^2 + A^T = I$. Να δειχθεί ότι $A^4 - 2A^2 + A = 0$.
Δείξτε ότι δεν γίνεται και οι 4 πίνακες A, $A-I$, $A - \frac{(-1+\sqrt{5})}{2}I$, $A - \frac{(-1-\sqrt{5})}{2}I$ να είναι αναστρέψιμοι.

1ο σκέλος

Δίνεται ότι $A^2 + A^T = I$

Από τη δοσμένη σχέση έχουμε ότι: $(A^2 + A^T)^T = I^T \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (A^2)^T + (A^T)^T = I \underset{\substack{(A^2)^T = (A^T)^2 \\ \text{επειδή } A \text{ τετραγωνικός.}}}{\Longleftrightarrow} (A^T)^2 + A = I$ (*)

νδο $A^4 - 2A^2 + A = 0$

$\rightarrow A^4 - 2A^2 + A = (A^2)^2 - 2A^2 + A = (I - A^T)^2 - 2(I - A^T) + A =$

$= I - \cancel{2A^T} + (A^T)^2 - 2I + \cancel{2A^T} + A = (A^T)^2 + A - I \overset{(*)}{=} I - I = 0.$

Συνεπώς, $A^4 - 2A^2 + A = 0$.

2ο σκέλος

$A^4 - 2A^2 + A = 0 \Longleftrightarrow A(A^3 - 2A + I) = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow A(A^3 - 3A^2 + 3A - I + 3A^2 - 5A + 2I) = 0 \Longleftrightarrow A\left((A-I)^3 + (A-I)(3A-2I)\right) = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow A\cdot(A-I)(A^2 - 2A + I + 3A - 2I) = 0 \Longleftrightarrow A(A-I)(A^2 + A - I) = 0$

$\rightsquigarrow$ Εύρεση ριζών "πολυωνύμου" $A^2 + A - I = 0$ ή $A^2 \cdot I + A \cdot I - I = 0$

$\mathcal{D} = I^2 - 4I(-I) = I + 4I = 5I$

$A_1 = \frac{-I + \sqrt{5}I}{2} = \frac{(-1+\sqrt{5})I}{2}$

$A_2 = \frac{-I - \sqrt{5}I}{2} = \frac{(-1-\sqrt{5})I}{2}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow A^2 + A - I = \left(A - \frac{(-1+\sqrt{5})I}{2}\right)\left(A - \frac{(-1-\sqrt{5})I}{2}\right)$

Δηλαδή $A^4 - 2A^2 + A = 0 \Leftrightarrow A\,(A-I)\left(A - \frac{(-1+\sqrt{5})I}{2}\right)\left(A - \frac{(-1-\sqrt{5})I}{2}\right) = 0$

ή ισοδύναμα, $\det A \cdot \det(A-I) \cdot \det\left(A - \frac{(-1+\sqrt{5})I}{2}\right) \cdot \det\left(A - \frac{(-1-\sqrt{5})I}{2}\right) = 0$

Συνεπώς, $\det A = 0$ ή $\det(A-I) = 0$ ή $\det\left(A - \frac{(-1+\sqrt{5})I}{2}\right) = 0$ ή $\det\left(A - \frac{(-1-\sqrt{5})I}{2}\right) = 0$

Δεδομένου ότι ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος μόνο εάν $\det A \neq 0$, αντιλαμβανόμαστε ότι δεν γίνεται και οι 4 πίνακες να είναι αντιστρέψιμοι, καθώς σίγουρα η ορίζουσα ενός εκ των πινάκων A, $A-I$, $\left(A - \frac{(-1+\sqrt{5})I}{2}\right)$, $\left(A - \frac{(-1-\sqrt{5})I}{2}\right)$ θα είναι 0.

Πρόβλημα 8.

Αν για μια γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ισχύει ότι $\operatorname{Ker}(T) \subseteq \operatorname{Range}(T)$, τότε $\dim \operatorname{Ker}(T) \leq \frac{n}{2}$.

Απο γνωστό θεώρημα έχουμε ότι: $\dim(\operatorname{Ker}(T)) + \dim(\operatorname{Range}(T)) = \dim V$

Εφόσον $\operatorname{Ker}(T) \subseteq \operatorname{Range}(T)$, $\dim \operatorname{Ker}(T) \leq \dim \operatorname{Range}(T) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker}(T) + \dim \operatorname{Ker}(T) \leq \dim(\operatorname{Range}(T)) + \dim \operatorname{Ker}(T) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\dim \operatorname{Ker}(T) \leq \dim V \Leftrightarrow \boxed{\dim \operatorname{Ker}(T) \leq \frac{n}{2}}$