Πρόβλημα 1. Αν είναι εφικτό, να διαγωνιοποιηθεί ο παρακάτω πίνακας

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ και αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη γραμμή έχουμε

$$(2-\lambda)\cdot \det \begin{bmatrix} -6-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} - 4\cdot \det \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} + 3\cdot \det \begin{bmatrix} -4 & -6-\lambda \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

το οποίο μετά από τις πράξεις ισούται με

$$p(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda-1)(\lambda+2)^2.$$

Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι η 1 και -2 με αλγεβρική πολλαπλότητα 1 και 2 αντίστοιχα. Πρέπει να υπολογίσουμε εν συνεχεία τους δύο μηδενοχώρους, έναν για κάθε ιδιοτιμή, οι οποίοι είναι οι

$$\mathrm{Null}(A-I) = \{x \in \mathbb{R}^3 | (A-I)x = 0\}, \mathrm{Null}(A+2I) = \{x \in \mathbb{R}^3 | (A+2I)x = 0\}.$$

Άρα έχουμε να λύσουμε τα συστήματα $(A+I)x = 0$ και $(A+2I)x = 0$ [1]. Για το δεύτερο σύστημα, η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του $A + 2I$ είναι η

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν δύο βασικές μεταβλητες, άρα έχουμε $3-2 = 1$ ελεύθερη μεταβλητή. Επομένως, η διάσταση του μηδενοχώρου $\mathrm{Null}(A + 2I)$ είναι 1 και αυτή ακριβώς είναι η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής -2. Εφόσον όμως η γεωμετρική πολλαπλότητα αυτής της ιδιοτιμής είναι μικρότερη από την αλγεβρική της πολλαπλότητα ο πίνακας δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Πρόβλημα 2. Αν είναι εφικτό να διαγωνιοποιηθεί ο παρακάτω πίνακας

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

για τον οποίο δίνονται οι 3 ιδιοτιμές του οι οποίες είναι ίσες με $3, 4, 6$.

Είναι οι στήλες του A γραμμικώς ανεξάρτητες; Είναι ο A αντιστρέψιμος; Είναι η απεικόνιση $T(x) = Ax$ επί στον $\mathbb{R}^3$; Ισχύει ότι ο μηδενοχώρος του A έχει διάσταση τουλάχιστον 1 ;

[1] Προσοχή ότι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε μία ιδιοτιμή λ ενός πίνακα A δεν είναι ο μηδενοχώρος $\mathrm{Null}(A - \lambda I)$ αλλά το σύνολο $\mathrm{Null}(A - \lambda I) \setminus \{0\}$, το οποίο δεν είναι διανυσματικός χώρος. Αυτό διότι δεν επιτρέπουμε ένα ιδιοδιάνυσμα να είναι το μηδενικό διάνυσμα.

Να υπολογιστεί επίσης ο A^{-1} αλλά και εν συνεχεία να υπολογιστεί ο πίνακας $\lim_{n\to\infty}(A^{-1})^n$.

Λύση.
Μπορούμε άμεσα να πούμε ότι ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος καθώς όλες οι ιδιοτιμές του είναι διαφορετικές μεταξύ τους, ή με άλλα λόγια όλες έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα 1 (άρα και γεωμετρική πολλαπλότητα 1). Έχουμε ότι $det(A) = 3{\cdot}4{\cdot}6 \neq 0$ άρα ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος, άρα και οι στήλες και οι γραμμές του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες (βαθμός ισούται με 3). Επιπρόσθετα, η απεικόνιση $T(x) = Ax$ είναι $1-1$ και επίσης είναι και επί στον $\mathbb{R}^3$: αυτό μπορούμε να το δούμε κάνοντας απαλοιφή Gauss και βλέποντας ότι υπάρχουν τρεις οδηγοί, όσες και οι στήλες, ωστόσο μπορούμε να το συμπεράνουμε άμεσα από την αντιστρεψιμότητα του A. Είναι $1-1$ εφόσον $Ax = Ay \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}Ay \Rightarrow x = y$ αλλά και επί εφόσον για κάθε $b \in \mathbb{R}^3$ υπάρχει x ώστε $b = Ax$ και συγκεκριμένα το $x = A^{-1}b$. Ο μηδενοχώρος του A πρέπει να έχει διάσταση 0, δηλαδή να περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα, αλλιώς δεν θα ήταν αντιστρέψιμος, καθώς η σχέση $Ax = 0$ με $x \neq 0$ σημαίνει ότι οι στήλες του είναι γραμμικώς εξαρτημένες[2] – εναλλακτικά, η σχέση $Ax = 0, x \neq 0$ σημαίνει ότι ο A έχει το 0 σαν ιδιοτιμή άρα και η ορίζουσά του είναι 0, οπότε δεν είναι αντιστρέψιμος.

Για να τον διαγωνιοποιήσουμε πρέπει να βρούμε τους μηδενοχώρους

$$\mathrm{Null}(A-3I), \mathrm{Null}(A-4I), \mathrm{Null}(A-6I)$$

και κάνοντας απαλοιφή Gauss βρίσκουμε

- ότι ο μηδενοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 3 είναι ο

$$\mathrm{Null}(A-3I) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- ότι ο μηδενοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 4 είναι ο

$$\mathrm{Null}(A-4I) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- ότι ο μηδενοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 6 είναι ο

$$\mathrm{Null}(A-6I) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Άρα $A = P\Lambda P^{-1}$ όπου P ο πίνακας που έχει τα ιδιοδιανύσματα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

[2]Θυμηθείτε ότι το Ax είναι απλά ένας γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A με συντελεστές x_1, x_2, x_3.

σαν στήλες και Λ ο διαγώνιος πίνακας που έχει τις ιδιοτιμές $3, 4, 6$ στη διαγώνιο. Ωστόσο, επειδή ο P είναι συμμετρικός μπορούμε να αποφύγουμε να κάνουμε την επίπονη διαδικασία της απαλοιφής Gauss σε τον 3×6 επαυξημένο πίνακα $[P|I]$ για να βρούμε τον P^{-1}. Απλά κανονικοποιούμε τις στήλες του P και έχουμε

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \langle P_1, P_1 \rangle = 3 \Rightarrow P_1 := \frac{1}{\sqrt{3}} P_1$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \langle P_2, P_2 \rangle = 2 \Rightarrow P_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} P_1$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \langle P_3, P_3 \rangle = 6 \Rightarrow P_3 := \frac{1}{\sqrt{6}} P_3$$

Τώρα μπορούμε να πούμε ότι

$$A = P\Lambda P^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Έχουμε επίσης

$$A^1 = P\Lambda^{-1} P^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 4^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 6^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

και γενικά

$$(A^1)^n = P(\Lambda^{-1})^n P^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 4^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 6^{-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Εφόσον $(\Lambda^{-1})^n \to 0$ (ο μηδενικός 3×3 πίνακας) καθώς $n \to \infty$ έχουμε ότι και $(A^{-1})^n \to 0$. Για να πειστεί κανείς για αυτό μπορεί να παρατηρήσει ότι κάθε εγγραφή του $(A^{-1})^n$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $3^{-n}, 4^{-n}, 6^{-n}$ άρα όταν πάρει κανείς το όριο όλα αυτά θα μηδενιστούν. Γενικότερα, κάθε εγγραφή ενός διαγωνιοποιήσιμου πίνακα είναι γραμμικός συνδυασμός των ιδιοτιμών του λόγω της σχέσης $A = P\Lambda P^{-1}$.

Πρόβλημα 3. Για ποιους από τους παρακάτω πίνακες μπορούμε να συμπεράνουμε σίγουρα ότι είναι διαγωνιοποιήσιμοι;
α) Για τους πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ οι οποίοι ικανοποιούν $A^2 - I = 0$.
β) Για τους πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ οι οποίοι ικανοποιούν $(A^2 - 4A + I)(A + I) = 0$.
γ) Για τους πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ οι οποίοι ικανοποιούν $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$.
δ) Για τους πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ οι οποίοι ικανοποιούν $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{-k} A^k = 0$.

Λύση.

Υπενθύμιση: Ένας πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν το ελάχιστό του πολυώνυμο m παραγοντοποιείται σε απλούς παράγοντες, δηλαδή όλες του οι ρίζες έχουν πολλαπλότητα 1. Επίσης, το m είναι διαιρέτης κάθε άλλου πολυωνύμου p ώστε $p(A) = 0$. Με βάση αυτά έχουμε ότι:
α) το m διαιρεί το $p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$ και άρα όλες του οι ρίζες σίγουρα έχουν πολλαπλότητα 1, άρα A διαγωνιοποιήσιμος,
β) το m διαιρεί το $p(\lambda) = (\lambda^2 - 4\lambda + 1)(\lambda + 1)$, το οποίο έχει όλες του τις ρίζες πραγματικές και διακριτές άρα A διαγωνιοποιήσιμος,
γ) το m διαιρεί το $p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3$ και άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν A διαγωνιοποιήσιμος (η μόνο περίπτωση να είναι συμβαίνει όταν $m(\lambda) = \lambda - 1$ αλλά δεν μπορούμε να το αποφανθούμε χωρίς να ξέρουμε τον A),
δ) πολλαπλασιάζοντα με 2^n και τα δύο μέλη έχουμε ότι $0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} A^k = (A + 2I)^n$, άρα το m είναι κάποιος από τους διαιρέτες του $p(\lambda) = (\lambda + 2)^n$ και άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν A διαγωνιοποιήσιμος.

Πρόβλημα 4. Έστω πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $AB = BA$. Αν ο A έχει όλες τις ιδιοτιμές του διαφορετικούς πραγματικούς αριθμούς να δείξετε ότι A και B έχουν τα ίδια ακριβώς ιδιοδιανύσματα. Συμπεράνετε ότι και ο A και ο B είναι διαγωνιοποιήσιμοι.

Λύση.
Πρώτα από όλα, εφόσον ο A έχει διακριτές ιδιοτιμές είναι διαγωνιοποιήσιμος και επιπρόσθετα η γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής είναι 1 (ίση με την αλγεβρική). Αυτό σημαίνει ότι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i είναι της μορφής $\operatorname{span}\{v_i\} \setminus \{0\}$ για κάποιο v_i. Τώρα έχουμε ότι αν u ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή λ_i ισχύει πρώτα ότι $u = cv_i$ και επιπρόσθετα

$$Au = \lambda_i u \Rightarrow BAu = B(\lambda_i u) \Rightarrow ABu = \lambda_i (Bu)$$

το οποίο μεταφράζεται στο εξής: είτε $Bu = 0$, είτε Bu ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή λ_i. Το πρώτο σημαίνει ότι το u είναι ιδιοδιάνυσμα του B με αντίστοιχη ιδιοτιμή την ιδιοτιμή 0, ενώ το δεύτερο σημαίνει ότι

$$Bu \in \operatorname{span}\{v_i\} \setminus \{0\} \Rightarrow \exists d \in \mathbb{R} : Bu = dv_i.$$

Όμως είπαμε ότι $u = cv_i$ άρα $Bu = (d/c)u$ και άρα u είναι ιδιοδιάνυσμα και του πίνακα B.

Άρα κάθε ιδιοδιάνυσμα του A είναι κα ιδιοδιάνυσμα του B. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι η ιδιοτιμή στην οποία αντιστοιχεί είναι ίδια, ο B μπορεί να έχει τελείως άλλες ιδιοτιμές από τον A. Εφόσον A διαγωνιοποιήσιμος τα ιδιοδιανύσματα του A παράγουν όλο τον $\mathbb{R}^n$ άρα και τα ιδιοδιανύσματα του B, εφόσον είναι τα ίδια, παράγουν όλο τον $\mathbb{R}^n$, άρα και B διαγωνιοποιήσιμος. Εδώ χρησιμοποιήσαμε το θέωρημα που λέει ότι ένας $n \times n$ πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν τα ιδιοδιανύσματά του παράγουν όλον τον $\mathbb{R}^n$ [3].

[3] Ήταν το Θέωρημα της Διάλεξης 18 που έλεγε ότι ένας πίνακα είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν υπάρχει μια βάση του $\mathbb{R}^n$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A. Ωστόσο, οι διατυπώσεις είναι ιδοσύναμες διότι αν ένας χώρος διανυσμάτων παράγει τον $\mathbb{R}^n$ τότε σίγουρα έχει μια βάση, η οποία είναι και μεγέθους n, η οποία παράγει τον $\mathbb{R}^n$, όπως έχουμε πει.