Πρόβλημα 1. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

α) Να βρεθούν, εφόσον υπάρχουν, οι αντίστροφοι των AB και BA.
β) Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει πίνακας $C \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ ώστε CA να είναι αντιστρέψιμος. Υπόδειξη: Μπορείτε να το κάνετε χωρίς καμία πράξη.

Πρόβλημα 2. Να βρεθεί μία βάση του μηδενοχώρου $\mathrm{Null}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

Ποια είναι η διάσταση του μηδενοχώρου;

Υπενθύμιση: Γράψτε τις παραμετρικές εξισώσεις που ικανοποιεί κάθε $x \in \mathrm{Null}(A)$, εν συνεχεία εκφράστε το x ως συνάρτηση των ελεύθερων μεταβλητών και γράψτε το σαν γραμμικό συνδυασμό κάποιων κατάλληλων διανυσμάτων.

Πρόβλημα 3. Να βρεθούν τα λ για τα οποία ο πίνακας $A - \lambda I$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

δεν είναι αντιστρέψιμος. Υπόδειξη: Υπολογίστε την ορίζουσα.

Πρόβλημα 4. Λέμε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι συμμετρικός όταν $A = A^T$ και αντισυμμετρικός όταν $A = -A^T$. Να δειχθεί ότι για κάθε πίνακα A ο πίνακας $A + A^T$ είναι συμμετρικός και ο πίνακας $A - A^T$ είναι αντισυμμετρικός. Να δείχθει ότι ο A μπορεί να γραφτεί πάντα ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

Πρόβλημα 5. Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορίζουμε το *ίχνος* του ως το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του, δηλαδή $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$. Να δειχθεί ότι $tr(A^T A) = tr(AA^T)$ και ότι είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων όλων των στοιχείων του A.

Πρόβλημα 6. Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορίζουμε το *ίχνος* του ως το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του, δηλαδή $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$. Έστω $W := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | tr(A) = 0\}$. Να δείξετε ότι το W είναι διανυσματικός χώρος και να βρείτε τη διάστασή του. Υπόδειξη: Να βρεθεί μία βάση του, δηλαδή μία συλλογή γραμμικών ανεξάρτητων πινάκων στο W που παράγουν όλους τους πίνακες στο W.

Πρόβλημα 7. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $A^2 + A^T = I$ $(\star)$. Να δειχθεί ότι $A^4 - 2A^2 + A = 0$. Δείξτε ότι δεν γίνεται και οι τέσσερις πίνακες A, $(A - I)$, $(A - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} I)$, $(A - \frac{-1-\sqrt{5}}{2} I)$ να είναι αντιστρέψιμοι.

Πρόβλημα 8. Αν για μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι $\ker(T) \subseteq \mathrm{Range}(T)$ τότε $dim \ker(T) \leq \frac{n}{2}$. Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα της διάλεξης 15.