1.

Να λυθεί το XOR σύστημα $Ax=0$ με:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1&1\\1&0&0&1&1\\1&1&1&0&1\end{bmatrix}$$

Λύση:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1&1\\1&0&0&1&1\\1&1&1&0&1\end{bmatrix}\xLeftrightarrow{\Gamma_1\leftrightarrow\Gamma_2}\begin{bmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&0&1&1\\1&1&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xLeftrightarrow{\Gamma_3:=\Gamma_3\oplus\Gamma_1}\begin{bmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&0&1&1\\0&1&1&1&0\end{bmatrix}\xLeftrightarrow{\Gamma_3:=\Gamma_3\oplus\Gamma_2}\begin{bmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&1\end{bmatrix}$$

$Ax=0$

οπότε $(1\cdot x_1)\oplus(0\cdot x_2)\oplus(0\cdot x_3)\oplus(1\cdot x_4)\oplus(1\cdot x_5)=0$

$$\begin{cases}x_1\oplus x_4\oplus x_5=0\\x_2\oplus x_4\oplus x_5=0\\x_3\oplus x_5=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x_1=-x_4+(-x_5)=x_4\oplus x_5\\x_2=x_4\oplus x_5\\x_3=x_5\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_4\oplus x_5\\x_4\oplus x_5\\x_5\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_4\\x_4\\0\\x_4\\0\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}x_5\\x_5\\x_5\\0\\x_5\end{bmatrix}=x_4\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\oplus x_5\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

Άρα $\{x\mid Ax=0\}=\mathrm{span}\{v_1,v_2\}$ με $2^2=4$ διανύσματα

② Έστω V, V' διανυσματικοί χώροι. Να δειχθεί ότι:

$$W := \{v+u \mid v \in V,\ u \in V'\}$$

(α) είναι διανυσματικός χώρος

(β) $V \subseteq W$

$V' \subseteq W$

Λύση:

(α) » Έστω $w, w' \in W$ διανύσματα

$$\left.\begin{array}{l} \circ\ w = v + u \\ \circ\ w' = v' + u' \end{array}\right\} v, v' \in V \text{ και } u, u' \in V'$$

$$w + w' = (v+u) + (v'+u') = \underbrace{(v+v')}_{v''} + \underbrace{(u+u')}_{u''} =$$

$$= v'' + u'', \quad v'' \in V \text{ και } u'' \in V'$$

Άρα $w + w' \in W$

» $\circ\ w = v + u$

$$\lambda w = \lambda(v+u) = \underbrace{\lambda v}_{v'} + \underbrace{\lambda u}_{u'} \Rightarrow \lambda w = v' + u' \in W$$

» Σίγουρα $0 \in V$ και $0 \in V'$, άρα $0 = 0 + 0 \in W$

» Θ.δ.ο $\forall w = v + u$ ισχύει $-v - u = -w \in W$

$$-w = \underbrace{(-v)}_{v'} + \underbrace{(-u)}_{u'} = v' + u' \in W$$

(β) $V \subseteq W$

αρκεί $\forall\, v \in V$ να ισχύει ότι $v \in W$

Ισχύει $v = v + 0$, $v \in V$, $0 \in V'$ άρα $v \in W$

Ομοίως για u.