I. Έστω $V := \{x \mid Ax=0\}$ για κάποιο $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και $K=\mathbb{R}$. Είναι το V διανυσματικός χώρος; Το $V' := \{x \mid Ax=b\}$ για $b\in\mathbb{R}^m$, $b\neq 0$;

① Θέλουμε να ελέγξουμε αν $x\in V$ και $y\in V \Rightarrow x+y\in V$:

$$\left.\begin{array}{l}Ax=0\\ Ay=0\end{array}\right\} \xRightarrow{\oplus} A(x+y)=0$$

άρα $x+y\in V$

② Αν $x\in V \Rightarrow \lambda x\in V$, διότι

$Ax=0 \xRightarrow{\cdot\lambda} A(\lambda x)=\lambda\cdot 0=0$ άρα $\lambda x\in V$.

③ $x\in V \Rightarrow -x\in V$, διότι

$Ax=0 \xRightarrow{\cdot(-1)} A(-x)=0 \Rightarrow -1\cdot 0=0$ άρα $-x\in V$

④ $0\in V$, διότι

$A\cdot 0=0$

→ Το V' δεν είναι διανυσματικός χώρος, διότι:

- $A\cdot 0\neq b$ άρα $0\notin V'$, άρα δεν ικανοποιείται η συνθήκη "$0\in V$"

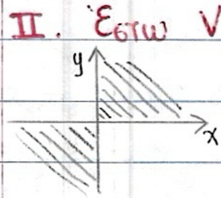
ή

- $$\left.\begin{array}{l}Ax=b\\ Ay=b\end{array}\right\} \xRightarrow{+} A(x+y)=2b\neq b$$ δεν ικανοποιείται το "$x,y\in V \Rightarrow (x+y)\in V$"

ή

- $Ax=b \xRightarrow{\cdot 2} A(2x)=2b\neq b$ άρα $2x\notin V$

II. Έστω $V=\left\{(x,y) \;\begin{array}{l} x\geq 0 \text{ και } y\geq 0 \\ x\leq 0 \overset{\acute{\eta}}{\text{ και }} y\leq 0\end{array}\right\}$, $K=\mathbb{R}$. Είναι το V διανυσματικός χώρος;



$\underset{\in V}{(3,2)} + \underset{\in V}{(-2,-7)} = \underset{\notin V}{(1,-5)}$, άρα το V δεν είναι διανυσματικός χώρος.

III. Έστω $x, y \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Να δειχθεί ότι

$$\det\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det(x) \quad (*)$$

Παράδειγμα για $n=2$:

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα για $n=1$:

έχω $\det\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x$

Λύση (για $n=2$)

Αναπτύσσω ως προς την τελευταία γραμμή

$$\det\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (-1)^{4+4}\cdot 1 \cdot \det\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

πάλι ως προς την τελευταία γραμμή

$$= (-1)^{3+3}\cdot 1 \cdot \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \checkmark$$

▷ Γενικά, για να αποδείξω την $*$ παίρνω συνέχεια ανάπτυγμα ως προς την τελευταία γραμμή έως ότου μείνει μόνο ο πίνακας X. Στην i-οστή επανάληψη η ορίζουσα του πίνακα ισούται με $(-1)^{(2n-i)(2n-i)} \cdot 1 \cdot$ (ορίζουσα του πίνακα που απομένει) έως ότου φύγουν οι στήλες και οι γραμμές και μείνει μόνο η ορίζουσα του X, ίση με $\det(x)$.

IV. Για $A, B \in \mathbb{B}^{n\times n}$ να δειχθεί ότι $\det\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A-B)\cdot\det(A+B)$.

προσθέτωντας τη γραμμή i, $1 \le i \le n$ στη γραμμή $i+n$

$$\det\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array}\right] = \det\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B+A & A+B \end{array}\right] = \det\left[\begin{array}{c|c} A-B & B \\ \hline 0 & A+B \end{array}\right] =$$

αφαιρώντας τη στήλη i, $n+1 \le i \le 2n$ από την στήλη $i-n$. $\{\Sigma_{i-n} \leftarrow \Sigma_{i-n} - \Sigma_i.\}$

απαλοιφή Gauss

$$= \det(A+B)\cdot\det\left[\begin{array}{c|c} A-B & B \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$ αν αντιστρέψιμος ο $A+B$.