Γραμμική Άλγεβρα

Όγδοη Διαλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αντίστροφος Πίνακα

Αντίστροφος ενός πίνακα A: μία έννοια που γενικεύει την έννοια του αντίστροφου ενός αριθμούς a.

Αντίστροφος Πίνακα

Αντίστροφος ενός πίνακα A: μία έννοια που γενικεύει την έννοια του αντίστροφου ενός αριθμούς a.

Για πραγματικούς αριθμούς $a \neq 0, b$ έχουμε

$$ax = b \Rightarrow x = a^{-1}b.$$

Αντίστροφος Πίνακα

Αντίστροφος ενός πίνακα A: μία έννοια που γενικεύει την έννοια του αντίστροφου ενός αριθμούς a.

Για πραγματικούς αριθμούς $a \neq 0, b$ έχουμε

$$ax = b \Rightarrow x = a^{-1}b.$$

Υπάρχει κάτι αντίστοιχο για πίνακες ;

Αντίστροφος Πίνακα

Αντίστροφος ενός πίνακα A: μία έννοια που γενικεύει την έννοια του αντίστροφου ενός αριθμούς a.

Για πραγματικούς αριθμούς $a \neq 0, b$ έχουμε

$$ax = b \Rightarrow x = a^{-1}b.$$

Υπάρχει κάτι αντίστοιχο για πίνακες ;
Μπορούμε δηλαδή να βρούμε έναν πίνακα, ας τον πούμε A^{-1} ώστε

$$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

Αντίστροφος Πίνακα

Αντίστροφος ενός πίνακα A: μία έννοια που γενικεύει την έννοια του αντίστροφου ενός αριθμούς a.

Για πραγματικούς αριθμούς $a \neq 0, b$ έχουμε

$$ax = b \Rightarrow x = a^{-1}b.$$

Υπάρχει κάτι αντίστοιχο για πίνακες ;
Μπορούμε δηλαδή να βρούμε έναν πίνακα, ας τον πούμε A^{-1} ώστε

$$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

και αν ναι, πότε υπάρχει τέτοιος πίνακας και πως τον βρίσκουμε ;

Αντίστροφος Πίνακα

Μας ενδιαφέρουν οι τετραγωνικοί πίνακες ($m = n$).

Αντίστροφος Πίνακα

Μας ενδιαφέρουν οι τετραγωνικοί πίνακες $(m = n)$.Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Αντίστροφος Πίνακα

Μας ενδιαφέρουν οι τετραγωνικοί πίνακες $(m = n)$.Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

⋆ Ο $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται *αριστερός* αντίστροφος αν $BA = I$.

Αντίστροφος Πίνακα

Μας ενδιαφέρουν οι τετραγωνικοί πίνακες $(m = n)$.Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

$\star$ Ο $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται *αριστερός* αντίστροφος αν $BA = I$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -14 & -3 & -6 \\ -5 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αντίστροφος Πίνακα

Μας ενδιαφέρουν οι τετραγωνικοί πίνακες $(m = n)$. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

⋆ O $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται *αριστερός* αντίστροφος αν $BA = I$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -14 & -3 & -6 \\ -5 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αντίστροφος Πίνακας.

⋆ Ο C λέγεται *δεξιός* αντίστροφος αν $AC = I$.

Αντίστροφος Πίνακας.

⋆ Ο C λέγεται *δεξιός αντίστροφος* αν $AC = I$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -14 & -3 & -6 \\ -5 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αντίστροφος Πίνακας.

⋆ Ο C λέγεται *δεξιός αντίστροφος* αν $AC = I$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -14 & -3 & -6 \\ -5 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AC = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⋆ Ο C λέγεται *δεξιός αντίστροφος* αν $AC = I$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -14 & -3 & -6 \\ -5 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AC = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -14 & -3 & -6 \\ -5 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -14 & -3 & -6 \\ -5 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αντίστροφος Πίνακας.

⋆ Ο C λέγεται *δεξιός αντίστροφος* αν $AC = I$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -14 & -3 & -6 \\ -5 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AC = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -14 & -3 & -6 \\ -5 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -14 & -3 & -6 \\ -5 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Γιατί οι B και C είναι ίδιοι;

Σχέση δεξιού και αριστερού αντιστρόφου.

Εάν ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ έχει αριστερό αντίστροφο B $(BA = I)$ τότε έχει και δεξιό αντίστροφο C $(AC = I)$.

Σχέση δεξιού και αριστερού αντιστρόφου.

Εάν ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ έχει αριστερό αντίστροφο B $(BA = I)$ τότε έχει και δεξιό αντίστροφο C $(AC = I)$. Επιπρόσθετα, ο αριστερός αντίστροφος είναι μοναδικός και είναι ο ίδιος ο B, δηλαδή $B = C$!

Σχέση δεξιού και αριστερού αντιστρόφου.

Εάν ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει αριστερό αντίστροφο B $(BA = I)$ τότε έχει και δεξιό αντίστροφο C $(AC = I)$. Επιπρόσθετα, ο αριστερός αντίστροφος είναι μοναδικός και είναι ο ίδιος ο B, δηλαδή $B = C$!

$\star$ Το αντίστοιχο ισχύει αν ο A έχει δεξιό αντίστροφο.

Σχέση δεξιού και αριστερού αντιστρόφου.

Εάν ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει αριστερό αντίστροφο B $(BA = I)$ τότε έχει και δεξιό αντίστροφο C $(AC = I)$. Επιπρόσθετα, ο αριστερός αντίστροφος είναι μοναδικός και είναι ο ίδιος ο B, δηλαδή $B = C$!

⋆ Το αντίστοιχο ισχύει αν ο A έχει δεξιό αντίστροφο.

Άρα μπορούμε να ορίσουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ως τον **μοναδικό** -αν υπάρχει- πίνακα A^{-1} που ικανοποιεί

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Σχέση δεξιού και αριστερού αντιστρόφου.

Εάν ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει αριστερό αντίστροφο B $(BA = I)$ τότε έχει και δεξιό αντίστροφο C $(AC = I)$. Επιπρόσθετα, ο αριστερός αντίστροφος είναι μοναδικός και είναι ο ίδιος ο B, δηλαδή $B = C$!

$\star$ Το αντίστοιχο ισχύει αν ο A έχει δεξιό αντίστροφο.

Άρα μπορούμε να ορίσουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ως τον **μοναδικό** -αν υπάρχει- πίνακα A^{-1} που ικανοποιεί

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Προσοχή: Δεν έχουν όλοι οι πίνακες αντίστροφο

Σχέση δεξιού και αριστερού αντιστρόφου.

Εάν ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει αριστερό αντίστροφο B $(BA = I)$ τότε έχει και δεξιό αντίστροφο C $(AC = I)$. Επιπρόσθετα, ο αριστερός αντίστροφος είναι μοναδικός και είναι ο ίδιος ο B, δηλαδή $B = C$!

$\star$ Το αντίστοιχο ισχύει αν ο A έχει δεξιό αντίστροφο.

Άρα μπορούμε να ορίσουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ως τον **μοναδικό** -αν υπάρχει- πίνακα A^{-1} που ικανοποιεί

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Προσοχή: Δεν έχουν όλοι οι πίνακες αντίστροφο (πχ αν A έχει μόνο μηδενικά δεν υπάρχει B ώστε $AB = I$ διότι $AB = 0 \cdot B = 0$)

Σχέση δεξιού και αριστερού αντιστρόφου.

Εάν ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει αριστερό αντίστροφο B $(BA = I)$ τότε έχει και δεξιό αντίστροφο C $(AC = I)$. Επιπρόσθετα, ο αριστερός αντίστροφος είναι μοναδικός και είναι ο ίδιος ο B, δηλαδή $B = C$!

⋆ Το αντίστοιχο ισχύει αν ο A έχει δεξιό αντίστροφο.

Άρα μπορούμε να ορίσουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ως τον **μοναδικό** -αν υπάρχει- πίνακα A^{-1} που ικανοποιεί

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Προσοχή: Δεν έχουν όλοι οι πίνακες αντίστροφο (πχ αν A έχει μόνο μηδενικά δεν υπάρχει B ώστε $AB = I$ διότι $AB = 0 \cdot B = 0$)

Τι σημαίνει αν υπάρχει αντίστροφος;

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $Ax = b$ με A αντιστρέψιμο.

Τι σημαίνει αν υπάρχει αντίστροφος;

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $Ax = b$ με A αντιστρέψιμο.

$$Ax = b \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

Τι σημαίνει αν υπάρχει αντίστροφος;

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $Ax = b$ με A αντιστρέψιμο.

$$Ax = b \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow I \cdot x = A^{-1}b$$

Τι σημαίνει αν υπάρχει αντίστροφος;

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $Ax = b$ με A αντιστρέψιμο.

$$Ax = b \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow I \cdot x = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

Τι σημαίνει αν υπάρχει αντίστροφος;

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $Ax = b$ με A αντιστρέψιμο.

$$Ax = b \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow I \cdot x = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την $x = A^{-1}b$.

Τι σημαίνει αν υπάρχει αντίστροφος;

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $Ax = b$ με A αντιστρέψιμο.

$$Ax = b \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow I \cdot x = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την $x = A^{-1}b$.

Πότε ένα σύστημα με n εξισώσεις και n αγνώστους έχει μοναδική λύση;

Τι σημαίνει αν υπάρχει αντίστροφος;

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $Ax = b$ με A αντιστρέψιμο.

$$Ax = b \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow I \cdot x = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την $x = A^{-1}b$.

Πότε ένα σύστημα με n εξισώσεις και n αγνώστους έχει μοναδική λύση;

όταν υπάρχουν n βασικές και καμία ελεύθερη μεταβλητή $\Leftrightarrow$ Όταν η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα φτιάχνει τέλεια σκάλα

Τι σημαίνει αν υπάρχει αντίστροφος;

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $Ax = b$ με A αντιστρέψιμο.

$$Ax = b \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow I \cdot x = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την $x = A^{-1}b$.

Πότε ένα σύστημα με n εξισώσεις και n αγνώστους έχει μοναδική λύση;

όταν υπάρχουν n βασικές και καμία ελεύθερη μεταβλητή $\Leftrightarrow$ Όταν η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα φτιάχνει τέλεια σκάλα

Σχέση δεξιού και αριστερού αντιστρόφου.

Πριν είχαμε τρεις δηλώσεις:

1. Αν υπάρχουν B, C ώστε $BA = I$ τότε υπάρχει και C ώστε $AC = I$, και αντίστροφα.

Σχέση δεξιού και αριστερού αντιστρόφου.

Πριν είχαμε τρεις δηλώσεις:

1. Αν υπάρχουν B, C ώστε $BA = I$ τότε υπάρχει και C ώστε $AC = I$, και αντίστροφα. Χωρίς απόδειξη!

Σχέση δεξιού και αριστερού αντιστρόφου.

Πριν είχαμε τρεις δηλώσεις:

1. Αν υπάρχουν B, C ώστε $BA = I$ τότε υπάρχει και C ώστε $AC = I$, και αντίστροφα. Χωρίς απόδειξη!
2. Υπάρχει **μοναδικός** αριστερός αντίστροφος και **μοναδικός** δεξιός αντίστροφος.

Σχέση δεξιού και αριστερού αντιστρόφου.

Πριν είχαμε τρεις δηλώσεις:

1. Αν υπάρχουν B, C ώστε $BA = I$ τότε υπάρχει και C ώστε $AC = I$, και αντίστροφα. Χωρίς απόδειξη!
2. Υπάρχει **μοναδικός** αριστερός αντίστροφος και **μοναδικός** δεξιός αντίστροφος.(απόδειξη σε λιγάκι)

Σχέση δεξιού και αριστερού αντιστρόφου.

Πριν είχαμε τρεις δηλώσεις:

1. Αν υπάρχουν B, C ώστε $BA = I$ τότε υπάρχει και C ώστε $AC = I$, και αντίστροφα. Χωρίς απόδειξη!
2. Υπάρχει **μοναδικός** αριστερός αντίστροφος και **μοναδικός** δεξιός αντίστροφος.(απόδειξη σε λιγάκι)
3. (δεξιός αντίστροφος $=$ αριστερός αντίστροφος) Αν $BA = AC = I$ τότε $B = C$.

Σχέση δεξιού και αριστερού αντιστρόφου.

Πριν είχαμε τρεις δηλώσεις:

1. Αν υπάρχουν B, C ώστε $BA = I$ τότε υπάρχει και C ώστε $AC = I$, και αντίστροφα. Χωρίς απόδειξη!
2. Υπάρχει **μοναδικός** αριστερός αντίστροφος και **μοναδικός** δεξιός αντίστροφος.(απόδειξη σε λιγάκι)
3. (δεξιός αντίστροφος = αριστερός αντίστροφος) Αν $BA = AC = I$ τότε $B = C$.
   ⋆ Απόδειξη:

$$B = B \cdot I =$$

Σχέση δεξιού και αριστερού αντιστρόφου.

Πριν είχαμε τρεις δηλώσεις:

1. Αν υπάρχουν B, C ώστε $BA = I$ τότε υπάρχει και C ώστε $AC = I$, και αντίστροφα. Χωρίς απόδειξη!
2. Υπάρχει **μοναδικός** αριστερός αντίστροφος και **μοναδικός** δεξιός αντίστροφος.(απόδειξη σε λιγάκι)
3. (δεξιός αντίστροφος = αριστερός αντίστροφος) Αν $BA = AC = I$ τότε $B = C$.
   $\star$ Απόδειξη:

$$B = B \cdot I = B(AC) =$$

Σχέση δεξιού και αριστερού αντιστρόφου.

Πριν είχαμε τρεις δηλώσεις:

1. Αν υπάρχουν B, C ώστε $BA = I$ τότε υπάρχει και C ώστε $AC = I$, και αντίστροφα. Χωρίς απόδειξη!
2. Υπάρχει **μοναδικός** αριστερός αντίστροφος και **μοναδικός** δεξιός αντίστροφος.(απόδειξη σε λιγάκι)
3. (δεξιός αντίστροφος $=$ αριστερός αντίστροφος) Αν $BA = AC = I$ τότε $B = C$.
   ⋆ Απόδειξη:

$$B = B \cdot I = B(AC) = (BA)C =$$

Σχέση δεξιού και αριστερού αντιστρόφου.

Πριν είχαμε τρεις δηλώσεις:

1. Αν υπάρχουν B, C ώστε $BA = I$ τότε υπάρχει και C ώστε $AC = I$, και αντίστροφα. Χωρίς απόδειξη!
2. Υπάρχει **μοναδικός** αριστερός αντίστροφος και **μοναδικός** δεξιός αντίστροφος.(απόδειξη σε λιγάκι)
3. (δεξιός αντίστροφος = αριστερός αντίστροφος) Αν $BA = AC = I$ τότε $B = C$.
   $\star$ Απόδειξη:

$$B = B \cdot I = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

Τι σημαίνει η ύπαρξη δεξιού αντιστρόφου;

Έστω $A, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ώστε $AC = I$ και c_1, c_2, c_3 οι στήλες του C.

Τι σημαίνει η ύπαρξη δεξιού αντιστρόφου;

Έστω $A, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ώστε $AC = I$ και c_1, c_2, c_3 οι στήλες του C.

$$AC = I \Rightarrow$$

Τι σημαίνει η ύπαρξη δεξιού αντιστρόφου;

Έστω $A, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ώστε $AC = I$ και c_1, c_2, c_3 οι στήλες του C.

$$AC = I \Rightarrow Ac_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{e_1}$$

Τι σημαίνει η ύπαρξη δεξιού αντιστρόφου;

Έστω $A, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ώστε $AC = I$ και c_1, c_2, c_3 οι στήλες του C.

$$AC = I \Rightarrow Ac_1 = \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}_{e_1}, Ac_2 = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}_{e_2}$$

Τι σημαίνει η ύπαρξη δεξιού αντιστρόφου;

Έστω $A, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ώστε $AC = I$ και c_1, c_2, c_3 οι στήλες του C.

$$AC = I \Rightarrow Ac_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{e_1}, Ac_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{e_2}, Ac_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{e_3}$$

Τι σημαίνει η ύπαρξη δεξιού αντιστρόφου;

Έστω $A, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ώστε $AC = I$ και c_1, c_2, c_3 οι στήλες του C.

$$AC = I \Rightarrow Ac_1 = \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}_{e_1}, Ac_2 = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}_{e_2}, Ac_3 = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{e_3}$$

Άρα με γραμμικούς συνδυασμούς των στηλών του A μπορώ να φτιάξω καθένα από τα e_1, e_2, e_3,

Τι σημαίνει η ύπαρξη δεξιού αντιστρόφου;

Έστω $A, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ώστε $AC = I$ και c_1, c_2, c_3 οι στήλες του C.

$$AC = I \Rightarrow Ac_1 = \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}_{e_1}, Ac_2 = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}_{e_2}, Ac_3 = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{e_3}$$

Άρα με γραμμικούς συνδυασμούς των στηλών του A μπορώ να φτιάξω καθένα από τα e_1, e_2, e_3,και εφόσον με τα e_1, e_2, e_3 μπορώ να φτιάξω κάθε διάνυσμα στον $\mathbb{R}^3$

Τι σημαίνει η ύπαρξη δεξιού αντιστρόφου;

Έστω $A, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ώστε $AC = I$ και c_1, c_2, c_3 οι στήλες του C.

$$AC = I \Rightarrow Ac_1 = \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}_{e_1}, Ac_2 = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}_{e_2}, Ac_3 = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{e_3}$$

Άρα με γραμμικούς συνδυασμούς των στηλών του A μπορώ να φτιάξω καθένα από τα e_1, e_2, e_3,και εφόσον με τα e_1, e_2, e_3 μπορώ να φτιάξω κάθε διάνυσμα στον $\mathbb{R}^3$, άρα το ίδιο ισχύει και για τις στήλες του A

Τι σημαίνει η ύπαρξη δεξιού αντιστρόφου;

Έστω $A, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ώστε $AC = I$ και c_1, c_2, c_3 οι στήλες του C.

$$AC = I \Rightarrow Ac_1 = \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}_{e_1}, Ac_2 = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}_{e_2}, Ac_3 = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{e_3}$$

Άρα με γραμμικούς συνδυασμούς των στηλών του A μπορώ να φτιάξω καθένα από τα e_1, e_2, e_3,και εφόσον με τα e_1, e_2, e_3 μπορώ να φτιάξω κάθε διάνυσμα στον $\mathbb{R}^3$, άρα το ίδιο ισχύει και για τις στήλες του A

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}_{e_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}_{e_2} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{e_3} =$$

Τι σημαίνει η ύπαρξη δεξιού αντιστρόφου;

Έστω $A, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ώστε $AC = I$ και c_1, c_2, c_3 οι στήλες του C.

$$AC = I \Rightarrow Ac_1 = \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}_{e_1}, Ac_2 = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}_{e_2}, Ac_3 = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{e_3}$$

Άρα με γραμμικούς συνδυασμούς των στηλών του A μπορώ να φτιάξω καθένα από τα e_1, e_2, e_3,και εφόσον με τα e_1, e_2, e_3 μπορώ να φτιάξω κάθε διάνυσμα στον $\mathbb{R}^3$, άρα το ίδιο ισχύει και για τις στήλες του A

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = x_1\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}_{e_1} + x_2\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}_{e_2} + x_3\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{e_3} = x_1(Ac_1) + x_2(Ac_2) + x_3(Ac_3) =$$

Τι σημαίνει η ύπαρξη δεξιού αντιστρόφου;

Έστω $A, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ώστε $AC = I$ και c_1, c_2, c_3 οι στήλες του C.

$$AC = I \Rightarrow Ac_1 = \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}_{e_1}, Ac_2 = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}_{e_2}, Ac_3 = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{e_3}$$

Άρα με γραμμικούς συνδυασμούς των στηλών του A μπορώ να φτιάξω καθένα από τα e_1, e_2, e_3,και εφόσον με τα e_1, e_2, e_3 μπορώ να φτιάξω κάθε διάνυσμα στον $\mathbb{R}^3$, άρα το ίδιο ισχύει και για τις στήλες του A

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}_{e_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}_{e_2} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{e_3} = x_1(Ac_1) + x_2(Ac_2) + x_3(Ac_3) = Ax'$$

Τι σημαίνει η ύπαρξη δεξιού αντιστρόφου;

Έστω $A, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ώστε $AC = I$ και c_1, c_2, c_3 οι στήλες του C.

$$AC = I \Rightarrow Ac_1 = \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}_{e_1}, Ac_2 = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}_{e_2}, Ac_3 = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{e_3}$$

Άρα με γραμμικούς συνδυασμούς των στηλών του A μπορώ να φτιάξω καθένα από τα e_1, e_2, e_3,και εφόσον με τα e_1, e_2, e_3 μπορώ να φτιάξω κάθε διάνυσμα στον $\mathbb{R}^3$, άρα το ίδιο ισχύει και για τις στήλες του A

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}_{e_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}_{e_2} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{e_3} = x_1(Ac_1) + x_2(Ac_2) + x_3(Ac_3) = Ax'$$

Οπότε οι στήλες του A είναι **γραμμικώς ανεξάρτητες**.

Τι σημαίνει η ύπαρξη αριστερού αντιστρόφου;

Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $BA = I$.

Τι σημαίνει η ύπαρξη αριστερού αντιστρόφου;

Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $BA = I$.

$$BA = I \Rightarrow$$

Τι σημαίνει η ύπαρξη αριστερού αντιστρόφου;

Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $BA = I$.

$$BA = I \Rightarrow (BA)^T = I^T \Rightarrow$$

Τι σημαίνει η ύπαρξη αριστερού αντιστρόφου;

Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $BA = I$.

$$BA = I \Rightarrow (BA)^T = I^T \Rightarrow A^T B^T = I$$

Τι σημαίνει η ύπαρξη αριστερού αντιστρόφου;

Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $BA = I$.

$$BA = I \Rightarrow (BA)^T = I^T \Rightarrow A^T B^T = I$$

άρα ο A^T έχει δεξιό αντίστροφο,

Τι σημαίνει η ύπαρξη αριστερού αντιστρόφου;

Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $BA = I$.

$$BA = I \Rightarrow (BA)^T = I^T \Rightarrow A^T B^T = I$$

άρα ο A^T έχει δεξιό αντίστροφο, άρα οι στήλες του A^T είναι γραμμικώς ανεξάρτητες,

Τι σημαίνει η ύπαρξη αριστερού αντιστρόφου;

Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $BA = I$.

$$BA = I \Rightarrow (BA)^T = I^T \Rightarrow A^T B^T = I$$

άρα ο A^T έχει δεξιό αντίστροφο, άρα οι στήλες του A^T είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, άρα οι **γραμμές** του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Απόδειξη αυτού που υποσχεθήκαμε.

⋆ Αν υπάρχει δεξιός αντίστροφος τότε είναι και μοναδικός.

Απόδειξη αυτού που υποσχεθήκαμε.

⋆ Αν υπάρχει δεξιός αντίστροφος τότε είναι και μοναδικός.
Απόδειξη: Έστω δύο πίνακες C, C' ώστε $AC = AC' = I$.

Απόδειξη αυτού που υποσχεθήκαμε.

⋆ Αν υπάρχει δεξιός αντίστροφος τότε είναι και μοναδικός.
Απόδειξη: Έστω δύο πίνακες C, C' ώστε $AC = AC' = I$.Τότε
$A(C - C') = AC - AC' = 0$.

Απόδειξη αυτού που υποσχεθήκαμε.

⋆ Αν υπάρχει δεξιός αντίστροφος τότε είναι και μοναδικός.
Απόδειξη: Έστω δύο πίνακες C, C' ώστε $AC = AC' = I$.Τότε
$A(C - C') = AC - AC' = 0.$
Η σχέση πινάκων $A(C - C') = 0$ αντιστοιχεί στις n σχέσεις

Απόδειξη αυτού που υποσχεθήκαμε.

⋆ Αν υπάρχει δεξιός αντίστροφος τότε είναι και μοναδικός.
Απόδειξη: Έστω δύο πίνακες C, C' ώστε $AC = AC' = I$. Τότε $A(C - C') = AC - AC' = 0$.
Η σχέση πινάκων $A(C - C') = 0$ αντιστοιχεί στις n σχέσεις

$$A(c_1 - c_1') = 0, A(c_2 - c_2'), \ldots, A(c_n - c_n') = 0,$$

όπου $c_1, c_2, \ldots$ οι στήλες του C και $c_1', c_2', \ldots$ οι στήλες του C'.

Απόδειξη αυτού που υποσχεθήκαμε.

⋆ Αν υπάρχει δεξιός αντίστροφος τότε είναι και μοναδικός.
Απόδειξη: Έστω δύο πίνακες C, C' ώστε $AC = AC' = I$. Τότε $A(C - C') = AC - AC' = 0$.
Η σχέση πινάκων $A(C - C') = 0$ αντιστοιχεί στις n σχέσεις

$$A(c_1 - c_1') = 0, A(c_2 - c_2'), \ldots, A(c_n - c_n') = 0,$$

όπου $c_1, c_2, \ldots$ οι στήλες του C και $c_1', c_2', \ldots$ οι στήλες του C'. Όμως, εφόσον A έχει δεξιό αντίστροφο, οι στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες,

Απόδειξη αυτού που υποσχεθήκαμε.

⋆ Αν υπάρχει δεξιός αντίστροφος τότε είναι και μοναδικός.
Απόδειξη: Έστω δύο πίνακες C, C' ώστε $AC = AC' = I$.Τότε
$A(C - C') = AC - AC' = 0$.
Η σχέση πινάκων $A(C - C') = 0$ αντιστοιχεί στις n σχέσεις

$$A(c_1 - c_1') = 0, A(c_2 - c_2'), \ldots, A(c_n - c_n') = 0,$$

όπου $c_1, c_2, \ldots$ οι στήλες του C και $c_1', c_2', \ldots$ οι στήλες του C'.Όμως, εφόσον A έχει δεξιό αντίστροφο, οι στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες,άρα η εξίσωση $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$

Απόδειξη αυτού που υποσχεθήκαμε.

⋆ Αν υπάρχει δεξιός αντίστροφος τότε είναι και μοναδικός.
Απόδειξη: Έστω δύο πίνακες C, C' ώστε $AC = AC' = I$.Τότε $A(C - C') = AC - AC' = 0.$
Η σχέση πινάκων $A(C - C') = 0$ αντιστοιχεί στις n σχέσεις

$$A(c_1 - c_1') = 0, A(c_2 - c_2'), \ldots, A(c_n - c_n') = 0,$$

όπου $c_1, c_2, \ldots$ οι στήλες του C και $c_1', c_2', \ldots$ οι στήλες του C'.Όμως, εφόσον A έχει δεξιό αντίστροφο, οι στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες,άρα η εξίσωση $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$ άρα $c_1 - c_1' = 0, \ldots, c_n - c_n' = 0,$

Απόδειξη αυτού που υποσχεθήκαμε.

⋆ Αν υπάρχει δεξιός αντίστροφος τότε είναι και μοναδικός.
Απόδειξη: Έστω δύο πίνακες C, C' ώστε $AC = AC' = I$.Τότε $A(C - C') = AC - AC' = 0$.
Η σχέση πινάκων $A(C - C') = 0$ αντιστοιχεί στις n σχέσεις

$$A(c_1 - c_1') = 0, A(c_2 - c_2'), \ldots, A(c_n - c_n') = 0,$$

όπου $c_1, c_2, \ldots$ οι στήλες του C και $c_1', c_2', \ldots$ οι στήλες του C'.Όμως, εφόσον A έχει δεξιό αντίστροφο, οι στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες,άρα η εξίσωση $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$ άρα $c_1 - c_1' = 0, \ldots, c_n - c_n' = 0$,δηλαδή $C = C'$.

Απόδειξη αυτού που υποσχεθήκαμε.

⋆ Αν υπάρχει δεξιός αντίστροφος τότε είναι και μοναδικός.
Απόδειξη: Έστω δύο πίνακες C, C' ώστε $AC = AC' = I$.Τότε $A(C - C') = AC - AC' = 0$.
Η σχέση πινάκων $A(C - C') = 0$ αντιστοιχεί στις n σχέσεις

$$A(c_1 - c_1') = 0, A(c_2 - c_2'), \dots, A(c_n - c_n') = 0,$$

όπου $c_1, c_2, \dots$ οι στήλες του C και $c_1', c_2', \dots$ οι στήλες του C'.Όμως, εφόσον A έχει δεξιό αντίστροφο, οι στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες,άρα η εξίσωση $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$ άρα $c_1 - c_1' = 0, \dots, c_n - c_n' = 0$,δηλαδή $C = C'$.

⋆ Αν υπάρχει αριστερός αντίστροφος τότε είναι και μοναδικός.

Απόδειξη αυτού που υποσχεθήκαμε.

⋆ Αν υπάρχει δεξιός αντίστροφος τότε είναι και μοναδικός.
Απόδειξη: Έστω δύο πίνακες C, C' ώστε $AC = AC' = I$.Τότε $A(C - C') = AC - AC' = 0$.
Η σχέση πινάκων $A(C - C') = 0$ αντιστοιχεί στις n σχέσεις

$$A(c_1 - c_1') = 0, A(c_2 - c_2'), \dots, A(c_n - c_n') = 0,$$

όπου $c_1, c_2, \dots$ οι στήλες του C και $c_1', c_2', \dots$ οι στήλες του C'.Όμως, εφόσον A έχει δεξιό αντίστροφο, οι στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες,άρα η εξίσωση $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$ άρα $c_1 - c_1' = 0, \dots, c_n - c_n' = 0$,δηλαδή $C = C'$.

⋆ Αν υπάρχει αριστερός αντίστροφος τότε είναι και μοναδικός.
Απόδειξη: Κάθε αριστερός αντίστροφος του A είναι δεξιός αντίστροφος του A^T και το αντίστροφο,

Απόδειξη αυτού που υποσχεθήκαμε.

$\star$ Αν υπάρχει δεξιός αντίστροφος τότε είναι και μοναδικός.
Απόδειξη: Έστω δύο πίνακες C, C' ώστε $AC = AC' = I$.Τότε $A(C - C') = AC - AC' = 0$.
Η σχέση πινάκων $A(C - C') = 0$ αντιστοιχεί στις n σχέσεις

$$A(c_1 - c_1') = 0, A(c_2 - c_2'), \ldots, A(c_n - c_n') = 0,$$

όπου $c_1, c_2, \ldots$ οι στήλες του C και $c_1', c_2', \ldots$ οι στήλες του C'.Όμως, εφόσον A έχει δεξιό αντίστροφο, οι στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες,άρα η εξίσωση $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$ άρα $c_1 - c_1' = 0, \ldots, c_n - c_n' = 0$,δηλαδή $C = C'$.

$\star$ Αν υπάρχει αριστερός αντίστροφος τότε είναι και μοναδικός.
Απόδειξη: Κάθε αριστερός αντίστροφος του A είναι δεξιός αντίστροφος του A^T και το αντίστροφο,άρα από το προηγούμενο θα είναι και μοναδικός.

Ισοδυναμίες.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. Υπάρχει πίνακας $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Ισοδυναμίες.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. Υπάρχει πίνακας $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
2. Οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Ισοδυναμίες.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

1. Υπάρχει πίνακας $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
2. Οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
3. Οι γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Ισοδυναμίες.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

1. Υπάρχει πίνακας $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
2. Οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
3. Οι γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
4. Η εξίσωση $Ax = b$ έχει πάντα μοναδική λύση

Ισοδυναμίες.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. Υπάρχει πίνακας $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
2. Οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
3. Οι γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
4. Η εξίσωση $Ax = b$ έχει πάντα μοναδική λύση, την $x = A^{-1}b$.

Ισοδυναμίες.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. Υπάρχει πίνακας $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
2. Οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
3. Οι γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
4. Η εξίσωση $Ax = b$ έχει πάντα μοναδική λύση, την $x = A^{-1}b$.
5. Η απεικόνιση $T(x) = Ax$ είναι 1-1

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. Υπάρχει πίνακας $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
2. Οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
3. Οι γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
4. Η εξίσωση $Ax = b$ έχει πάντα μοναδική λύση, την $x = A^{-1}b$.
5. Η απεικόνιση $T(x) = Ax$ είναι 1-1 , διότι

$$T(x) = T(x') \Rightarrow$$

Ισοδυναμίες.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. Υπάρχει πίνακας $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
2. Οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
3. Οι γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
4. Η εξίσωση $Ax = b$ έχει πάντα μοναδική λύση, την $x = A^{-1}b$.
5. Η απεικόνιση $T(x) = Ax$ είναι 1-1 , διότι

$$T(x) = T(x') \Rightarrow Ax = Ax' \Rightarrow$$

Ισοδυναμίες.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. Υπάρχει πίνακας $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
2. Οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
3. Οι γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
4. Η εξίσωση $Ax = b$ έχει πάντα μοναδική λύση, την $x = A^{-1}b$.
5. Η απεικόνιση $T(x) = Ax$ είναι 1-1 , διότι

$$T(x) = T(x') \Rightarrow Ax = Ax' \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}Ax'$$

Ισοδυναμίες.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. Υπάρχει πίνακας $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
2. Οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
3. Οι γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
4. Η εξίσωση $Ax = b$ έχει πάντα μοναδική λύση, την $x = A^{-1}b$.
5. Η απεικόνιση $T(x) = Ax$ είναι 1-1 , διότι

$$T(x) = T(x') \Rightarrow Ax = Ax' \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}Ax' \Rightarrow x = x'.$$

Πως μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο (αν υπάρχει);

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -7 \end{bmatrix},$$

Πως μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο (αν υπάρχει);

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -7 \end{bmatrix},$$

Αν a_1', a_2', a_3' οι στήλες του A^{-1} τότε

$$AA^{-1} = I \Rightarrow$$

Πως μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο (αν υπάρχει);

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -7 \end{bmatrix},$$

Αν a'_1, a'_2, a'_3 οι στήλες του A^{-1} τότε

$$AA^{-1} = I \Rightarrow Aa'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Πως μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο (αν υπάρχει);

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -7 \end{bmatrix},$$

Αν a_1', a_2', a_3' οι στήλες του A^{-1} τότε

$$AA^{-1} = I \Rightarrow Aa_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Aa_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Πως μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο (αν υπάρχει);

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -7 \end{bmatrix},$$

Αν a'_1, a'_2, a'_3 οι στήλες του A^{-1} τότε

$$AA^{-1} = I \Rightarrow Aa'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Aa'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, Aa'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Πως μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο (αν υπάρχει);

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -7 \end{bmatrix},$$

Αν a'_1, a'_2, a'_3 οι στήλες του A^{-1} τότε

$$AA^{-1} = I \Rightarrow Aa'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Aa'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, Aa'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

άρα έχουμε να λύσουμε τρία γραμμικά συστήματα με τον ίδιο πίνακα συντελεστών A!

Πως μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο (αν υπάρχει);

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -7 \end{bmatrix},$$

Αν a'_1, a'_2, a'_3 οι στήλες του A^{-1} τότε

$$AA^{-1} = I \Rightarrow Aa'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Aa'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, Aa'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

άρα έχουμε να λύσουμε τρία γραμμικά συστήματα με τον ίδιο πίνακα συντελεστών A!

Πως μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο (αν υπάρχει);

$$Aa'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Aa'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, Aa'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Πως μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο (αν υπάρχει);

$$Aa_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Aa_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, Aa_3' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

Πως μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο (αν υπάρχει);

$$Aa_1' = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, Aa_2' = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, Aa_3' = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

Φέρνουμε τον επαυξημένο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow_{\texttt{απαλοιφή Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} {\color{red}1} & 0 & 0 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & {\color{red}1} & 0 & -7 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & {\color{red}1} & -2 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow_{\text{απαλοιφή Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Διαβάζουμε τα a'_1, a'_2, a'_3 ως την πρώτη, δεύτερη και τρίτη στήλη, δηλαδή

$$a'_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix}, a'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a'_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Συνέχεια Παραδείγματος.

Κι αν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, τι θα συμβεί;

Συνέχεια Παραδείγματος.

Κι αν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, τι θα συμβεί;Όπως είπαμε, αν δεν είναι αντιστρέψιμος τότε οι στήλες του θα είναι γραμμικώς εξαρτημένες,

Συνέχεια Παραδείγματος.

Κι αν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, τι θα συμβεί;Όπως είπαμε, αν δεν είναι αντιστρέψιμος τότε οι στήλες του θα είναι γραμμικώς εξαρτημένες,άρα αρκεί να ελέγξουμε αν το σύστημα $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση:

Συνέχεια Παραδείγματος.

Κι αν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, τι θα συμβεί;Όπως είπαμε, αν δεν είναι αντιστρέψιμος τότε οι στήλες του θα είναι γραμμικώς εξαρτημένες,άρα αρκεί να ελέγξουμε αν το σύστημα $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση:

- $Ax = 0$ μοναδική λύση $\Leftrightarrow$ γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες $\Leftrightarrow$ A αντιστρέψιμος.

Κι αν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, τι θα συμβεί;Όπως είπαμε, αν δεν είναι αντιστρέψιμος τότε οι στήλες του θα είναι γραμμικώς εξαρτημένες,άρα αρκεί να ελέγξουμε αν το σύστημα $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση:

- $Ax = 0$ μοναδική λύση $\Leftrightarrow$ γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες $\Leftrightarrow$ A αντιστρέψιμος.
- $Ax = 0$ **μη** μοναδική λύση $\Leftrightarrow$ γραμμικώς εξαρτημένες στήλες $\Leftrightarrow$ A **μη** αντιστρέψιμος.

Συνέχεια Παραδείγματος.

Κι αν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, τι θα συμβεί;Όπως είπαμε, αν δεν είναι αντιστρέψιμος τότε οι στήλες του θα είναι γραμμικώς εξαρτημένες,άρα αρκεί να ελέγξουμε αν το σύστημα $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση:

- $Ax = 0$ μοναδική λύση $\Leftrightarrow$ γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες $\Leftrightarrow$ A αντιστρέψιμος.
- $Ax = 0$ **μη** μοναδική λύση $\Leftrightarrow$ γραμμικώς εξαρτημένες στήλες $\Leftrightarrow$ A **μη** αντιστρέψιμος.

Εναλλακτικά, κατά την απαλοιφή Gauss θα μας προέκυπτε μια **μηδενική** γραμμή στον πίνακα συντελεστών.

Συνέχεια Παραδείγματος.

Κι αν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, τι θα συμβεί;Όπως είπαμε, αν δεν είναι αντιστρέψιμος τότε οι στήλες του θα είναι γραμμικώς εξαρτημένες,άρα αρκεί να ελέγξουμε αν το σύστημα $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση:

- $Ax = 0$ μοναδική λύση $\Leftrightarrow$ γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες $\Leftrightarrow$ A αντιστρέψιμος.
- $Ax = 0$ **μη** μοναδική λύση $\Leftrightarrow$ γραμμικώς εξαρτημένες στήλες $\Leftrightarrow$ A **μη** αντιστρέψιμος.

Εναλλακτικά, κατά την απαλοιφή Gauss θα μας προέκυπτε μια **μηδενική** γραμμή στον πίνακα συντελεστών.

Συνέχεια Παραδείγματος.

Για παράδειγμα, αν θέλαμε να αντιστρέψουμε τον

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Συνέχεια Παραδείγματος.

Για παράδειγμα, αν θέλαμε να αντιστρέψουμε τον

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

θα είχαμε

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Συνέχεια Παραδείγματος.

Για παράδειγμα, αν θέλαμε να αντιστρέψουμε τον

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

θα είχαμε

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow_{\text{απαλοιφή Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Συνέχεια Παραδείγματος.

Για παράδειγμα, αν θέλαμε να αντιστρέψουμε τον

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

θα είχαμε

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow_{\text{απαλοιφή Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

άρα μη αντιστρέψιμος!

Γενικός Κανόνας για Αντιστροφή Πίνακα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε φτιάχνουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\left[A \mid I\right],$$

και φέρνουμε τον πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή με απαλοιφή Gauss. Αν προκύψει μια γραμμή όλη μηδενικά,
δηλαδή δεν δημιουργείται τέλεια σκάλα, τότε ο A **δεν** είναι αντιστρέψιμος.

Αλλιώς, μπορούμε να φέρουμε τον επαυξημένο στη μορφή

$$\left[I \mid B\right],$$

για κάποιον πίνακα B. Τότε ο A^{-1} ισούται με τον B.

Τι μάθαμε και τι πρέπει να ξέρουμε.

1. Ποιος είναι ο ορισμός του αντιστρέψιμου πίνακας A^{-1}, και ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον A για να λύσουμε εξισώσεις της μορφής $Ax = b$.
2. Πως βρίσκουμε τον αντίστροφο πίνακα.
3. Ότι αντιστρεψιμότητα ισοδυναμεί με γραμμική ανεξαρτησία στηλών του.
4. Ότι αντιστρεψιμότητα ισοδυναμεί με γραμμική ανεξαρτησία γραμμών.

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!