Γραμμική Άλγεβρα

Έκτη Διαλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Προσοχη: Από εδώ και εμπρός τα διανύσματα θα συμβολίζονται **χωρίς βέλος** πάνω από το όνομά τους. Άρα το $a \in \mathbb{R}^3$ είναι ένα διάνυσμα μήκους 3, και δεν θα χρησιμοποιούμε ποια τον συμβολισμό $\vec{a}$ (ο οποίος είναι προσαρμοσμένος στα λυκειακά μαθηματικά).

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

Θα ασχοληθούμε με *απεικονίσεις* (μετασχηματισμούς, συναρτήσεις) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

Θα ασχοληθούμε με *απεικονίσεις* (μετασχηματισμούς, συναρτήσεις) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

- Μια απεικόνιση 'στέλνει' ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ σε ένα διάνυσμα $\mathbb{R}^m$, για την ακρίβεια στο $T(x)$.

Θα ασχοληθούμε με *απεικονίσεις* (μετασχηματισμούς, συναρτήσεις) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

- Μια απεικόνιση 'στέλνει' ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ σε ένα διάνυσμα $\mathbb{R}^m$, για την ακρίβεια στο $T(x)$.
- Ενδεχομένως να αναφερόμαστε στο $T(x)$ ως την *εικόνα* του x υπό την T.
- Το $\mathbb{R}^n$ λέγεται πεδίο ορισμού και το $\mathbb{R}^m$ πεδίο τιμών.

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

Θα ασχοληθούμε με *απεικονίσεις* (μετασχηματισμούς, συναρτήσεις) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

- Μια απεικόνιση 'στέλνει' ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ σε ένα διάνυσμα $\mathbb{R}^m$, για την ακρίβεια στο $T(x)$.
- Ενδεχομένως να αναφερόμαστε στο $T(x)$ ως την *εικόνα* του x υπό την T.
- Το $\mathbb{R}^n$ λέγεται πεδίο ορισμού και το $\mathbb{R}^m$ πεδίο τιμών.
- Το σύνολο τιμών της T είναι όλα τα $b \in \mathbb{R}^m$ για τα οποία υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.
- $b \in \mathbb{R}^m$ ανήκει στο σύνολο τιμών του $T \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε $T(x) = b$.

Η T λέγεται *Γραμμική Απεικόνιση* αν έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

Η T λέγεται *Γραμμική Απεικόνιση* αν έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

1. $T(x+y) = T(x) + T(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. $T(\lambda x) = \lambda \cdot T(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$

Η T λέγεται *Γραμμική Απεικόνιση* αν έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

1. $T(x+y) = T(x) + T(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. $T(\lambda x) = \lambda \cdot T(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$

Εναλλακτικά:

$$(3) \quad T(\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot T(x) + \mu \cdot T(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

Η T λέγεται *Γραμμική Απεικόνιση* αν έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

1. $T(x+y) = T(x) + T(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. $T(\lambda x) = \lambda \cdot T(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$

Εναλλακτικά:

$$(3) \quad T(\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot T(x) + \mu \cdot T(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$\star$ Έχουμε επίσης ότι $T(x+y+z) = T(x) + T(y) + T(z)$,

Η T λέγεται *Γραμμική Απεικόνιση* αν έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

1. $T(x+y) = T(x) + T(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. $T(\lambda x) = \lambda \cdot T(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$

Εναλλακτικά:

$$(3) \quad T(\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot T(x) + \mu \cdot T(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$\star$ Έχουμε επίσης ότι $T(x+y+z) = T(x) + T(y) + T(z)$, διότι

$T(x+y+z) =$

Η T λέγεται *Γραμμική Απεικόνιση* αν έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

1. $T(x+y) = T(x) + T(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. $T(\lambda x) = \lambda \cdot T(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$

Εναλλακτικά:

$$(3) \quad T(\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot T(x) + \mu \cdot T(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

⋆ Έχουμε επίσης ότι $T(x+y+z) = T(x) + T(y) + T(z)$, διότι

$$T(x+y+z) = T((x+y)+z) =$$

Η T λέγεται *Γραμμική Απεικόνιση* αν έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

1. $T(x+y) = T(x) + T(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. $T(\lambda x) = \lambda \cdot T(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$

Εναλλακτικά:

$$(3) \quad T(\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot T(x) + \mu \cdot T(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

⋆ Έχουμε επίσης ότι $T(x+y+z) = T(x) + T(y) + T(z)$, διότι

$$T(x+y+z) = T((x+y)+z) = T(x+y) + T(z) =$$

Η T λέγεται *Γραμμική Απεικόνιση* αν έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

1. $T(x+y) = T(x) + T(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. $T(\lambda x) = \lambda \cdot T(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$

Εναλλακτικά:

$$(3) \quad T(\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot T(x) + \mu \cdot T(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$\star$ Έχουμε επίσης ότι $T(x+y+z) = T(x) + T(y) + T(z)$, διότι

$$T(x+y+z) = T((x+y)+z) = T(x+y) + T(z) = (T(x)+T(y)) + T(z)$$

Η T λέγεται *Γραμμική Απεικόνιση* αν έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

1. $T(x+y) = T(x) + T(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. $T(\lambda x) = \lambda \cdot T(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$

Εναλλακτικά:

$$(3) \quad T(\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot T(x) + \mu \cdot T(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

⋆ Έχουμε επίσης ότι $T(x+y+z) = T(x) + T(y) + T(z)$, διότι

$$T(x+y+z) = T((x+y)+z) = T(x+y) + T(z) = (T(x)+T(y)) + T(z)$$

και ακόμη

$$T(x-y) = T(x+(-y)) =$$

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

Η T λέγεται *Γραμμική Απεικόνιση* αν έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

1. $T(x+y) = T(x) + T(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. $T(\lambda x) = \lambda \cdot T(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$

Εναλλακτικά:

$$(3) \quad T(\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot T(x) + \mu \cdot T(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

⋆ Έχουμε επίσης ότι $T(x+y+z) = T(x) + T(y) + T(z)$, διότι

$$T(x+y+z) = T((x+y)+z) = T(x+y) + T(z) = (T(x)+T(y)) + T(z)$$

και ακόμη

$$T(x-y) = T(x+(-y)) = T(x) + T(-y) =$$

Η T λέγεται *Γραμμική Απεικόνιση* αν έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

1. $T(x+y) = T(x) + T(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. $T(\lambda x) = \lambda \cdot T(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$

Εναλλακτικά:

$$(3) \quad T(\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot T(x) + \mu \cdot T(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$\star$ Έχουμε επίσης ότι $T(x+y+z) = T(x) + T(y) + T(z)$, διότι

$$T(x+y+z) = T((x+y)+z) = T(x+y) + T(z) = (T(x) + T(y)) + T(z)$$

και ακόμη

$$T(x-y) = T(x+(-y)) = T(x) + T(-y) = T(x) - T(y)$$

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓
   Ισχύει ότι
   $T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) =$

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓
   Ισχύει ότι
   $T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) =$

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓
   Ισχύει ότι
   $T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda(2x_1 + x_2) = \lambda T(x_1, x_2)$
   και

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓
   Ισχύει ότι
   $T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda(2x_1 + x_2) = \lambda T(x_1, x_2)$
   και
   $T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) =$

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓
   Ισχύει ότι
   $T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda(2x_1 + x_2) = \lambda T(x_1, x_2)$
   και
   $T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) =$

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓
   Ισχύει ότι
   $T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda(2x_1 + x_2) = \lambda T(x_1, x_2)$
   και
   $T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) =$
   $\underbrace{(2x_1 + x_2)}_{T(x_1,x_2)} + \underbrace{(2y_1 + y_2)}_{T(y_1,y_2)} =$

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓
   Ισχύει ότι
   $T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda(2x_1 + x_2) = \lambda T(x_1, x_2)$
   και
   $T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) =$
   $\underbrace{(2x_1 + x_2)}_{T(x_1,x_2)} + \underbrace{(2y_1 + y_2)}_{T(y_1,y_2)} = T(x) + T(y).$

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓
   Ισχύει ότι
   $T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda(2x_1 + x_2) = \lambda T(x_1, x_2)$
   και
   $T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) =$
   $\underbrace{(2x_1 + x_2)}_{T(x_1,x_2)} + \underbrace{(2y_1 + y_2)}_{T(y_1,y_2)} = T(x) + T(y).$
2. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $T(x) = 2x + 3$.

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓
   Ισχύει ότι
   $T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda(2x_1 + x_2) = \lambda T(x_1, x_2)$
   και
   $T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) =$
   $\underbrace{(2x_1 + x_2)}_{T(x_1,x_2)} + \underbrace{(2y_1 + y_2)}_{T(y_1,y_2)} = T(x) + T(y).$
2. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $T(x) = 2x + 3$. ✗

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓
   Ισχύει ότι
   $T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda(2x_1 + x_2) = \lambda T(x_1, x_2)$
   και
   $T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) =$
   $\underbrace{(2x_1 + x_2)}_{T(x_1,x_2)} + \underbrace{(2y_1 + y_2)}_{T(y_1,y_2)} = T(x) + T(y).$
2. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $T(x) = 2x + 3$. ✗
   Διότι για $x = 0$ έχουμε $T(0) = 3$,

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓
   Ισχύει ότι
   $T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda(2x_1 + x_2) = \lambda T(x_1, x_2)$
   και
   $T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) =$
   $\underbrace{(2x_1 + x_2)}_{T(x_1,x_2)} + \underbrace{(2y_1 + y_2)}_{T(y_1,y_2)} = T(x) + T(y).$
2. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $T(x) = 2x + 3$. ✗
   Διότι για $x = 0$ έχουμε $T(0) = 3$, ενώ θα έπρεπε $T(0) = 0$

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓
   Ισχύει ότι
   $T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda(2x_1 + x_2) = \lambda T(x_1, x_2)$
   και
   $T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) =$
   $\underbrace{(2x_1 + x_2)}_{T(x_1,x_2)} + \underbrace{(2y_1 + y_2)}_{T(y_1,y_2)} = T(x) + T(y).$

2. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $T(x) = 2x + 3$. ✗
   Διότι για $x = 0$ έχουμε $T(0) = 3$, ενώ θα έπρεπε $T(0) = 0$ διότι
   $T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0) = 2T(0) \Rightarrow T(0) = 0.$

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓
   Ισχύει ότι
   $T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda(2x_1 + x_2) = \lambda T(x_1, x_2)$
   και
   $T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) =$
   $\underbrace{(2x_1 + x_2)}_{T(x_1,x_2)} + \underbrace{(2y_1 + y_2)}_{T(y_1,y_2)} = T(x) + T(y).$

2. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $T(x) = 2x + 3$. ✗
   Διότι για $x = 0$ έχουμε $T(0) = 3$, ενώ θα έπρεπε $T(0) = 0$ διότι
   $T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0) = 2T(0) \Rightarrow T(0) = 0.$

⋆ Γενικός Κανόνας: Ένα γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ικανοποιεί πάντα $T(0) = 0$.

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. ✗
   $T(1,0,0) = 1, T(-1,0,0) = 1$ και άρα θα έπρεπε

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. ✗
   $T(1,0,0) = 1, T(-1,0,0) = 1$ και άρα θα έπρεπε

$$0 = T(0,0,0) = T(1,0,0) + T(-1,0,0) = 1 + 1 = 2,$$

   αδύνατο!

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. ✗
   $T(1,0,0) = 1, T(-1,0,0) = 1$ και άρα θα έπρεπε

   $$0 = T(0,0,0) = T(1,0,0) + T(-1,0,0) = 1 + 1 = 2,$$

   αδύνατο!

2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $T(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \\ -3 \end{bmatrix}.$

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. ✗
   $T(1,0,0) = 1, T(-1,0,0) = 1$ και άρα θα έπρεπε

   $$0 = T(0,0,0) = T(1,0,0) + T(-1,0,0) = 1 + 1 = 2,$$

   αδύνατο!
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $T(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \\ -3 \end{bmatrix}$. ✗

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. ✗
   $T(1,0,0) = 1, T(-1,0,0) = 1$ και άρα θα έπρεπε
   $$0 = T(0,0,0) = T(1,0,0) + T(-1,0,0) = 1 + 1 = 2,$$
   αδύνατο!
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $T(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \\ -3 \end{bmatrix}$. ✗
   Όχι γιατί $T(0,0,0)$ δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα όπως θα έπρεπε.

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. ✗
   $T(1,0,0) = 1, T(-1,0,0) = 1$ και άρα θα έπρεπε
   $$0 = T(0,0,0) = T(1,0,0) + T(-1,0,0) = 1 + 1 = 2,$$
   αδύνατο!
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $T(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \\ -3 \end{bmatrix}$. ✗
   Όχι γιατί $T(0,0,0)$ δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα όπως θα έπρεπε. Εναλλακτικά, δεν ισχύει ότι $T(x+y) = T(x) + T(y)$

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. ✗
   $T(1,0,0) = 1, T(-1,0,0) = 1$ και άρα θα έπρεπε
   $$0 = T(0,0,0) = T(1,0,0) + T(-1,0,0) = 1 + 1 = 2,$$
   αδύνατο!
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $T(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \\ -3 \end{bmatrix}$. ✗
   Όχι γιατί $T(0,0,0)$ δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα όπως θα έπρεπε. Εναλλακτικά, δεν ισχύει ότι $T(x+y) = T(x) + T(y)$ (λόγω τρίτης συντεταγμένης).

Είναι το πιο κάτω γραμμικός μετασχηματισμός;

$T = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **με** $T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} (x_1+1)^2 - x_1^2 - 1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix}$

Είναι το πιο κάτω γραμμικός μετασχηματισμός;

$T = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **με** $T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} (x_1+1)^2 - x_1^2 - 1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix}$ ✓

Είναι το πιο κάτω γραμμικός μετασχηματισμός;

$T = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} (x_1+1)^2 - x_1^2 - 1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix}$ ✓

Έχουμε ότι

$$T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix}$$

Είναι το πιο κάτω γραμμικός μετασχηματισμός;

$T = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} (x_1+1)^2 - x_1^2 - 1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix}$ ✓

Έχουμε ότι

$$T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix}$$

και ισχύει ότι

$$T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) =$$

Είναι το πιο κάτω γραμμικός μετασχηματισμός;

$T = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} (x_1+1)^2 - x_1^2 - 1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix}$ ✓

Έχουμε ότι

$$T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix}$$

και ισχύει ότι

$$T(x+y) = T(x_1+y_1, x_2+y_2) = \begin{bmatrix} 2(x_1+y_1) + (x_2+y_2) \\ -(x_2+y_2) + (x_1+y_1) \end{bmatrix} =$$

Είναι το πιο κάτω γραμμικός μετασχηματισμός;

$T = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} (x_1+1)^2 - x_1^2 - 1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix}$ ✓

Έχουμε ότι

$$T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix}$$

και ισχύει ότι

$$T(x+y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = \begin{bmatrix} 2(x_1+y_1) + (x_2+y_2) \\ -(x_2+y_2) + (x_1+y_1) \end{bmatrix} =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix}}_{T(x_1,x_2)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2y_1 + y_2 \\ -y_2 + y_1 \end{bmatrix}}_{T(y_1,y_2)} = T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2)$$

Είναι το πιο κάτω γραμμικός μετασχηματισμός;

$T = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} (x_1+1)^2 - x_1^2 - 1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix}$ ✓

Έχουμε ότι

$$T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix}$$

και ισχύει ότι

$$T(x+y) = T(x_1+y_1, x_2+y_2) = \begin{bmatrix} 2(x_1+y_1) + (x_2+y_2) \\ -(x_2+y_2) + (x_1+y_1) \end{bmatrix} =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix}}_{T(x_1,x_2)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2y_1 + y_2 \\ -y_2 + y_1 \end{bmatrix}}_{T(y_1,y_2)} = T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2)$$

Όμοια ελέγχουμε και την ιδιότητα $T(\lambda x) = \lambda T(x)$.

Κάποιες καλές ιδιότητες των γραμμικών μετασχηματισμών.

Έστω $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^m$. Τότε

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = x_1 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_2 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_3 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

Κάποιες καλές ιδιότητες των γραμμικών μετασχηματισμών.

Έστω $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^m$. Τότε

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = x_1 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_2 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_3 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right),$$

άρα αρκεί να ξέρουμε τι διάνυσμα επιστρέφει ο T για **μόνο** τρία διανύσματα για να βρούμε οποιοδήποτε άλλο.

Κάποιες καλές ιδιότητες των γραμμικών μετασχηματισμών.

Έστω $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^m$. Τότε

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = x_1 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_2 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_3 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right),$$

άρα αρκεί να ξέρουμε τι διάνυσμα επιστρέφει ο T για **μόνο** τρία διανύσματα για να βρούμε οποιοδήποτε άλλο.

$\star$ Γενικότερα για διανύσματα $a_1, a_2, \ldots a_r \in \mathbb{R}^m$ και αριθμούς $c_1, c_2 \ldots, c_r \in \mathbb{R}$ έχουμε

Κάποιες καλές ιδιότητες των γραμμικών μετασχηματισμών.

Έστω $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^m$. Τότε

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = x_1 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + x_2 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + x_3 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right),$$

άρα αρκεί να ξέρουμε τι διάνυσμα επιστρέφει ο T για **μόνο** τρία διανύσματα για να βρούμε οποιοδήποτε άλλο.

$\star$ Γενικότερα για διανύσματα $a_1, a_2, \ldots a_r \in \mathbb{R}^m$ και αριθμούς $c_1, c_2 \ldots, c_r \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$T(c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots c_r a_r) = c_1 T(a_1) + c_2 T(a_2) + \ldots c_r T(a_r)$$

Οι πίνακες σαν γραμμικές απεικονίσεις.

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Τότε η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με $T(x) = Ax$ είναι γραμμική.

⋆ Απόδειξη: Ισχύει ότι

$$T(x + y) =$$

Οι πίνακες σαν γραμμικές απεικονίσεις.

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Τότε η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με $T(x) = Ax$ είναι γραμμική.

⋆ Απόδειξη: Ισχύει ότι

$$T(x+y) = A(x+y) =$$

Οι πίνακες σαν γραμμικές απεικονίσεις.

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. *Τότε η απεικόνιση* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *με* $T(x) = Ax$ *είναι γραμμική.*

⋆ Απόδειξη: Ισχύει ότι

$$T(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay =$$

Οι πίνακες σαν γραμμικές απεικονίσεις.

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. *Τότε η απεικόνιση* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *με* $T(x) = Ax$ *είναι γραμμική.*

⋆ Απόδειξη: Ισχύει ότι

$$T(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = T(x) + T(y) \checkmark$$

και

$$T(\lambda x) =$$

Οι πίνακες σαν γραμμικές απεικονίσεις.

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Τότε η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με $T(x) = Ax$ είναι γραμμική.

⋆ Απόδειξη: Ισχύει ότι

$$T(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = T(x) + T(y)\checkmark$$

και

$$T(\lambda x) = A(\lambda x) =$$

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Τότε η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με $T(x) = Ax$ είναι γραμμική.

⋆ Απόδειξη: Ισχύει ότι

$$T(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = T(x) + T(y)\checkmark$$

και

$$T(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) =$$

Οι πίνακες σαν γραμμικές απεικονίσεις.

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Τότε η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με $T(x) = Ax$ είναι γραμμική.

⋆ Απόδειξη: Ισχύει ότι

$$T(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = T(x) + T(y)\checkmark$$

και

$$T(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda \cdot T(x)\checkmark$$

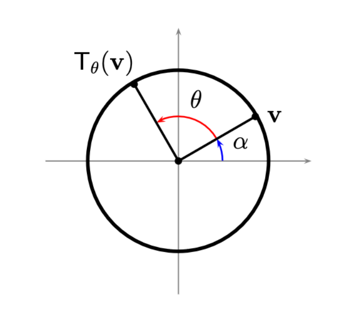
άρα ικανοποιούνται και οι δύο απαιτήσεις της γραμμικής απεικόνισης.

Στροφή διανύσματος.

Έστω η απεικόνιση $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η οποία στρίβει ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ κατά γωνία θ αντίθετα με τη φορά του ρολογιού.

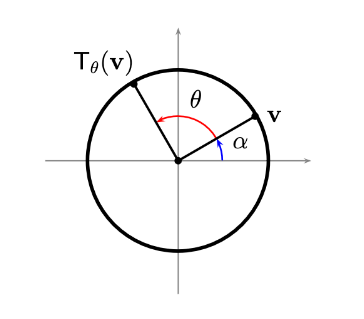
Στροφή διανύσματος.

Έστω η απεικόνιση $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η οποία στρίβει ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ κατά γωνία θ αντίθετα με τη φορά του ρολογιού.



Στροφή διανύσματος.

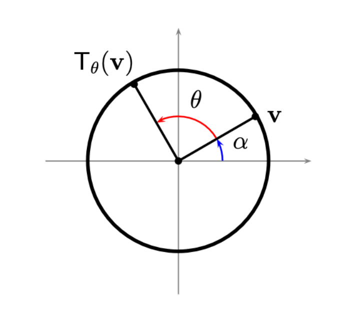
Έστω η απεικόνιση $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η οποία στρίβει ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ κατά γωνία θ αντίθετα με τη φορά του ρολογιού.



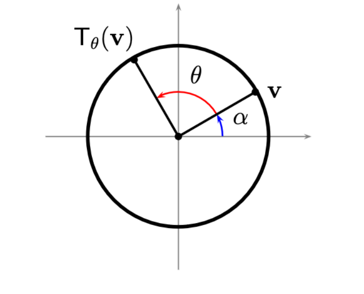
Είναι το T γραμμικός μετασχηματισμός;

Στροφή διανύσματος.

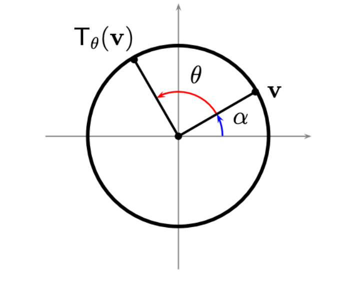
Έστω η απεικόνιση $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η οποία στρίβει ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ κατά γωνία θ αντίθετα με τη φορά του ρολογιού.



Είναι το T γραμμικός μετασχηματισμός;

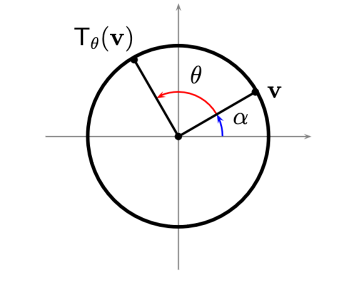


Είναι το T γραμμικός μετασχηματισμός;



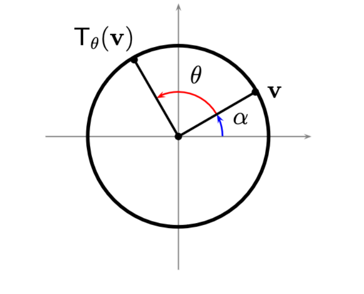
Είναι το T γραμμικός μετασχηματισμός;

Αν $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} =$



Είναι το T γραμμικός μετασχηματισμός;

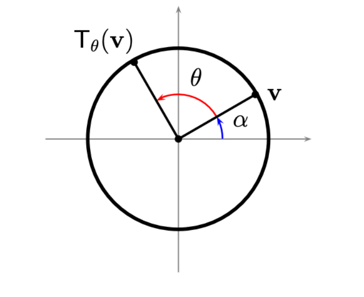
$$\text{Αν } v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |v|\text{συν}(\alpha) \\ |v|\text{ημ}(\alpha) \end{bmatrix}$$



Είναι το T γραμμικός μετασχηματισμός;

$$\text{Αν } v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |v|\text{συν}(\alpha) \\ |v|\text{ημ}(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$T_\theta(v) = \begin{bmatrix} |v| \cdot \text{συν}(\alpha + \theta) \\ |v| \cdot \text{ημ}(\alpha + \theta) \end{bmatrix}$$



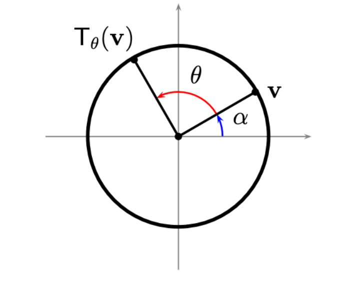
Είναι το T γραμμικός μετασχηματισμός;

$$\text{Αν } v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |v|\text{συν}(\alpha) \\ |v|\text{ημ}(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$T_\theta(v) = \begin{bmatrix} |v| \cdot \text{συν}(\alpha+\theta) \\ |v| \cdot \text{ημ}(\alpha+\theta) \end{bmatrix}$$

Μπορούμε με λίγη τριγωνομετρία να αποδείξουμε ότι $T_\theta(v) = Av$ για

$$A = \begin{bmatrix} \text{συν}(\theta) & -\text{ημ}(\theta) \\ \text{ημ}(\theta) & \text{συν}(\theta) \end{bmatrix}$$



Είναι το T γραμμικός μετασχηματισμός;

$$\text{Αν } v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |v|\text{συν}(\alpha) \\ |v|\text{ημ}(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$T_\theta(v) = \begin{bmatrix} |v| \cdot \text{συν}(\alpha+\theta) \\ |v| \cdot \text{ημ}(\alpha+\theta) \end{bmatrix}$$

Μπορούμε με λίγη τριγωνομετρία να αποδείξουμε ότι $T_\theta(v) = Av$ για

$$A = \begin{bmatrix} \text{συν}(\theta) & -\text{ημ}(\theta) \\ \text{ημ}(\theta) & \text{συν}(\theta) \end{bmatrix}$$

Γραμμικές απεικονίσεις οι οποίες είναι επί.

$\star$ Μια (γραμμική) απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ λέγεται επί (επιμορφισμός) αν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.

Γραμμικές απεικονίσεις οι οποίες είναι επί.

⋆ Μια (γραμμική) απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ λέγεται επί (επιμορφισμός) αν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.

Θεώρημα

⋆ *Έστω $T : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^m$ μια γραμμική απεικόμιση με $T(x) = Ax$. Τότε η T είναι επί αν και μόνο αν η γραμμική θήκη των στηλών του A είναι όλο το $\mathbb{R}^m$.*

Απόδειξη του: 'T είναι επί $\Rightarrow$ γραμμική θήκη των στηλών του $A = \mathbb{R}^m$ '.

Γραμμικές απεικονίσεις οι οποίες είναι επί.

⋆ Μια (γραμμική) απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ λέγεται επί (επιμορφισμός) αν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.

Θεώρημα

⋆ *Έστω $T : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^m$ μια γραμμική απεικόμιση με $T(x) = Ax$. Τότε η T είναι επί αν και μόνο αν η γραμμική θήκη των στηλών του A είναι όλο το $\mathbb{R}^m$.*

Απόδειξη του: 'T είναι επί $\Rightarrow$ γραμμική θήκη των στηλών του $A = \mathbb{R}^m$ '.
Εφόσον η T είναι επί, για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει x ώστε $b = T(x) = Ax$.

Γραμμικές απεικονίσεις οι οποίες είναι επί.

⋆ Μια (γραμμική) απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ λέγεται επί (επιμορφισμός) αν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.

Θεώρημα

⋆ Έστω $T : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^m$ μια γραμμική απεικόμιση με $T(x) = Ax$. Τότε η T είναι επί αν και μόνο αν η γραμμική θήκη των στηλών του A είναι όλο το $\mathbb{R}^m$.

Απόδειξη του: 'T είναι επί $\Rightarrow$ γραμμική θήκη των στηλών του $A = \mathbb{R}^m$ '.
Εφόσον η T είναι επί, για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει x ώστε $b = T(x) = Ax$.
Όμως το Ax είναι ένας *γραμμικός συνδυασμός* των στηλών του A,

Γραμμικές απεικονίσεις οι οποίες είναι επί.

⋆ Μια (γραμμική) απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ λέγεται επί (επιμορφισμός) αν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.

Θεώρημα

⋆ *Έστω $T : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^m$ μια γραμμική απεικόμιση με $T(x) = Ax$. Τότε η T είναι επί αν και μόνο αν η γραμμική θήκη των στηλών του A είναι όλο το $\mathbb{R}^m$.*

Απόδειξη του: 'T είναι επί $\Rightarrow$ γραμμική θήκη των στηλών του $A = \mathbb{R}^m$ '.
Εφόσον η T είναι επί, για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει x ώστε $b = T(x) = Ax$.
Όμως το Ax είναι ένας *γραμμικός συνδυασμός* των στηλών του A,
οπότε το b είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A,

Γραμμικές απεικονίσεις οι οποίες είναι επί.

⋆ Μια (γραμμική) απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ λέγεται επί (επιμορφισμός) αν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.

Θεώρημα

⋆ *Έστω $T : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^m$ μια γραμμική απεικόμιση με $T(x) = Ax$. Τότε η T είναι επί αν και μόνο αν η γραμμική θήκη των στηλών του A είναι όλο το $\mathbb{R}^m$.*

Απόδειξη του: 'T είναι επί $\Rightarrow$ γραμμική θήκη των στηλών του $A = \mathbb{R}^m$ '. Εφόσον η T είναι επί, για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει x ώστε $b = T(x) = Ax$. Όμως το Ax είναι ένας *γραμμικός συνδυασμός* των στηλών του A, οπότε το b είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A,άρα ανήκει και στη γραμμική θήκη των στηλών του.

Γραμμικές απεικονίσεις οι οποίες είναι επί.

⋆ Μια (γραμμική) απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ λέγεται επί (επιμορφισμός) αν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.

Θεώρημα

⋆ *Έστω $T : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^m$ μια γραμμική απεικόμιση με $T(x) = Ax$. Τότε η T είναι επί αν και μόνο αν η γραμμική θήκη των στηλών του A είναι όλο το $\mathbb{R}^m$.*

Απόδειξη του: 'T είναι επί $\Rightarrow$ γραμμική θήκη των στηλών του $A = \mathbb{R}^m$ '. Εφόσον η T είναι επί, για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει x ώστε $b = T(x) = Ax$. Όμως το Ax είναι ένας *γραμμικός συνδυασμός* των στηλών του A, οπότε το b είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A,άρα ανήκει και στη γραμμική θήκη των στηλών του.Εφόσον αυτό ισχύει για **κάθε** $b \in \mathbb{R}^m$ το ζητούμενο έπεται.

Ισοδυναμία διατυπώσεων.

- Η γραμμική απεικόνιση $T(x) = Ax$ με $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ είναι επί.
- Για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $Ax = b$.
- Ο βαθμός (πλήθος βασικών μεταβλητών) του A ισούται με m.
- Η γραμμική θήκη των στηλών του A είναι το $\mathbb{R}^m$.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T(x) = Ax$ *με* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. *Αν η* T *είναι επί τότε* $m \leq n$.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T(x) = Ax$ *με* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. *Αν η* T *είναι επί τότε* $m \leq n$.

$\star$ Απόδειξη: Για να είναι επί η T αρκεί ο βαθμός του A (πλήθος βασικών μεταβλητών) να ισούται με m.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T(x) = Ax$ *με* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. *Αν η* T *είναι επί τότε* $m \leq n$.

$\star$ Απόδειξη: Για να είναι επί η T αρκεί ο βαθμός του A (πλήθος βασικών μεταβλητών) να ισούται με m. Άρα $m =$ πλήθος βασικών μεταβλητών $\leq$ πλήθος στηλών $= n$.

Γραμμικές απεικονίσεις οι οποίες είναι $1-1$.

Μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι $1-1$ (μονομορφισμός) αν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει το πολύ ένα $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.

Μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι $1-1$ (μονομορφισμός) αν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει το πολύ ένα $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.

Θεώρημα

Η γραμμική απεικόνιση T είναι $1-1$ αν και μόνο αν $T(x) = 0$ έχει μόνο τη λύση $x = 0$.

Απόδειξη:

Γραμμικές απεικονίσεις οι οποίες είναι $1-1$.

Μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι $1-1$ (μονομορφισμός) αν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει το πολύ ένα $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.

Θεώρημα

Η γραμμική απεικόνιση T είναι $1-1$ αν και μόνο αν $T(x) = 0$ έχει μόνο τη λύση $x = 0$.

Απόδειξη:
$T(x) = 0$ έχει μοναδική λύση $\Rightarrow$ T είνα $1-1$.

Γραμμικές απεικονίσεις οι οποίες είναι $1-1$.

Μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι $1-1$ (μονομορφισμός) αν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει το πολύ ένα $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.

Θεώρημα

Η γραμμική απεικόνιση T είναι $1-1$ αν και μόνο αν $T(x) = 0$ έχει μόνο τη λύση $x = 0$.

Απόδειξη:
$T(x) = 0$ έχει μοναδική λύση $\Rightarrow$ T είνα $1-1$.
Έστω ότι έχουμε μοναδική λύση για την $T(x) = 0$ και η T δεν είναι $1-1$.

Γραμμικές απεικονίσεις οι οποίες είναι $1-1$.

Μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι $1-1$ (μονομορφισμός) αν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει το πολύ ένα $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.

Θεώρημα

Η γραμμική απεικόνιση T είναι $1-1$ αν και μόνο αν $T(x) = 0$ έχει μόνο τη λύση $x = 0$.

Απόδειξη:
$T(x) = 0$ έχει μοναδική λύση $\Rightarrow T$ είνα $1-1$.
Έστω ότι έχουμε μοναδική λύση για την $T(x) = 0$ και η T δεν είναι $1-1$. Άρα έχουμε δύο διαφορετικά y, z με $T(y) = T(z)$,

Γραμμικές απεικονίσεις οι οποίες είναι $1-1$.

Μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι $1-1$ (μονομορφισμός) αν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει το πολύ ένα $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.

Θεώρημα

Η γραμμική απεικόνιση T είναι $1-1$ αν και μόνο αν $T(x) = 0$ έχει μόνο τη λύση $x = 0$.

Απόδειξη:
$T(x) = 0$ έχει μοναδική λύση $\Rightarrow$ T είνα $1-1$.
Έστω ότι έχουμε μοναδική λύση για την $T(x) = 0$ και η T δεν είναι $1-1$. Άρα έχουμε δύο διαφορετικά y, z με $T(y) = T(z)$, οπότε
$T(y-z) = T(y) - T(z)$

Γραμμικές απεικονίσεις οι οποίες είναι $1-1$.

Μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι $1-1$ (μονομορφισμός) αν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει το πολύ ένα $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.

Θεώρημα

Η γραμμική απεικόνιση T είναι $1-1$ αν και μόνο αν $T(x) = 0$ έχει μόνο τη λύση $x = 0$.

Απόδειξη:
$T(x) = 0$ έχει μοναδική λύση $\Rightarrow$ T είνα $1-1$.
Έστω ότι έχουμε μοναδική λύση για την $T(x) = 0$ και η T δεν είναι $1-1$. Άρα έχουμε δύο διαφορετικά y, z με $T(y) = T(z)$, οπότε
$T(y-z) = T(y) - T(z) = 0 = T(0)$.

Γραμμικές απεικονίσεις οι οποίες είναι $1-1$.

Μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι $1-1$ (μονομορφισμός) αν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει το πολύ ένα $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.

Θεώρημα

Η γραμμική απεικόνιση T είναι $1-1$ αν και μόνο αν $T(x) = 0$ έχει μόνο τη λύση $x = 0$.

Απόδειξη:
$T(x) = 0$ έχει μοναδική λύση $\Rightarrow$ T είνα $1-1$.
Έστω ότι έχουμε μοναδική λύση για την $T(x) = 0$ και η T δεν είναι $1-1$. Άρα έχουμε δύο διαφορετικά y, z με $T(y) = T(z)$, οπότε $T(y-z) = T(y) - T(z) = 0 = T(0)$. Έτσι έχουμε δύο λύσεις στην $T(x) = 0$, το μηδενικό διάνυσμα και το $y - z \neq 0$.

Γραμμικές απεικονίσεις οι οποίες είναι $1-1$.

Μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι $1-1$ (μονομορφισμός) αν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει το πολύ ένα $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.

Θεώρημα

Η γραμμική απεικόνιση T είναι $1-1$ αν και μόνο αν $T(x) = 0$ έχει μόνο τη λύση $x = 0$.

Απόδειξη:
$T(x) = 0$ έχει μοναδική λύση $\Rightarrow$ T είνα $1-1$.
Έστω ότι έχουμε μοναδική λύση για την $T(x) = 0$ και η T δεν είναι $1-1$. Άρα έχουμε δύο διαφορετικά y, z με $T(y) = T(z)$, οπότε $T(y-z) = T(y) - T(z) = 0 = T(0)$. Έτσι έχουμε δύο λύσεις στην $T(x) = 0$, το μηδενικό διάνυσμα και το $y - z \neq 0$.

Κάθε γραμμική απεικόνιση είναι ένας πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Τότε υπάρχει πίνακας* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *ώστε* $T(x) = Ax$.

Κάθε γραμμική απεικόνιση είναι ένας πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*. Τότε υπάρχει πίνακας* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *ώστε* $T(x) = Ax$.

Θυμάστε τον ακόλουθο τύπου είχαμε δείξει;

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = x_1 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_2 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_3 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

Κάθε γραμμική απεικόνιση είναι ένας πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Τότε υπάρχει πίνακας* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *ώστε* $T(x) = Ax$.

Θυμάστε τον ακόλουθο τύπου είχαμε δείξει;

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = x_1 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_2 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_3 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left[T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right), \; T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right), \; T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Κάθε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό πίνακα με διάνυσμα.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Τότε υπάρχει πίνακας* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *ώστε* $T(x) = Ax$.

Κάθε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό πίνακα με διάνυσμα.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Τότε υπάρχει πίνακας* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *ώστε* $T(x) = Ax$.

Απόδειξη:

Κάθε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό πίνακα με διάνυσμα.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Τότε υπάρχει πίνακας* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *ώστε* $T(x) = Ax$.

Απόδειξη: Έστω $e_i \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα που έχει 1 στην i-οστή του θέση και 0 οπουδήποτε αλλού.

Κάθε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό πίνακα με διάνυσμα.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Τότε υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ώστε $T(x) = Ax$.

Απόδειξη: Έστω $e_i \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα που έχει 1 στην i-οστή του θέση και 0 οπουδήποτε αλλού.Τότε
$T(x) = T(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) =$

Κάθε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό πίνακα με διάνυσμα.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Τότε υπάρχει πίνακας* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *ώστε* $T(x) = Ax$.

Απόδειξη: Έστω $e_i \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα που έχει 1 στην i-οστή του θέση και 0 οπουδήποτε αλλού. Τότε
$T(x) = T(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n) = x_1 T(e_1) + \ldots + x_n T(e_n)$.

Κάθε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό πίνακα με διάνυσμα.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Τότε υπάρχει πίνακας* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *ώστε* $T(x) = Ax$.

Απόδειξη: Έστω $e_i \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα που έχει 1 στην i-οστή του θέση και 0 οπουδήποτε αλλού. Τότε
$T(x) = T(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) = x_1T(e_1) + \ldots + x_nT(e_n)$.
Τι είναι το $x_1T(e_1) + \ldots + x_nT(e_n)$;

Κάθε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό πίνακα με διάνυσμα.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Τότε υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ώστε $T(x) = Ax$.

Απόδειξη: Έστω $e_i \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα που έχει 1 στην i-οστή του θέση και 0 οπουδήποτε αλλού. Τότε
$T(x) = T(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) = x_1T(e_1) + \ldots + x_nT(e_n)$.
Τι είναι το $x_1T(e_1) + \ldots + x_nT(e_n)$;
Είναι γραμμικός συνδυασμός n διανυσμάτων, των $T(e_1), \ldots, T(e_n) \in \mathbb{R}^m$.

Κάθε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό πίνακα με διάνυσμα.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Τότε υπάρχει πίνακας* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *ώστε* $T(x) = Ax$.

Απόδειξη: Έστω $e_i \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα που έχει 1 στην i-οστή του θέση και 0 οπουδήποτε αλλού. Τότε
$T(x) = T(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n) = x_1 T(e_1) + \ldots + x_n T(e_n)$.
Τι είναι το $x_1 T(e_1) + \ldots + x_n T(e_n)$;
Είναι γραμμικός συνδυασμός n διανυσμάτων, των $T(e_1), \ldots, T(e_n) \in \mathbb{R}^m$. Άρα είναι ο πολλαπλασιασμός του πίνακα που έχει στήλες τα $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ με το διάνυσμα x.

Κάθε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό πίνακα με διάνυσμα.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Τότε υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ώστε $T(x) = Ax$.

Απόδειξη: Έστω $e_i \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα που έχει 1 στην i-οστή του θέση και 0 οπουδήποτε αλλού. Τότε
$T(x) = T(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) = x_1T(e_1) + \ldots + x_nT(e_n)$.
Τι είναι το $x_1T(e_1) + \ldots + x_nT(e_n)$;
Είναι γραμμικός συνδυασμός n διανυσμάτων, των $T(e_1), \ldots, T(e_n) \in \mathbb{R}^m$. Άρα είναι ο πολλαπλασιασμός του πίνακα που έχει στήλες τα $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ με το διάνυσμα x. Άρα ο A στην περίπτωσή μας είναι ο πίνακας με στήλες τα $T(e_1), \ldots, T(e_n)$. ✓

Επί του πρακτέου.

Αν για μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μπορούμε να υπολογίσουμε τα $T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n)$ και να φτιάξουμε τον πίνακα A με στήλες αυτά τα διανύσματα. Τότε έχουμε έναν τύπο για την T, ο οποίος είναι $T(x) = Ax$.

Επί του πρακτέου.

Αν για μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μπορούμε να υπολογίσουμε τα $T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)$ και να φτιάξουμε τον πίνακα A με στήλες αυτά τα διανύσματα. Τότε έχουμε έναν τύπο για την T, ο οποίος είναι $T(x) = Ax$.

Πως μπορούμε να λύσουμε το παράδειγμα στροφής με αυτή την παρατήρηση;

Στροφή διανύσματος (ξανά).

Έστω η απεικόνιση $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η οποία στρίβει ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ κατά γωνία θ αντίθετα με τη φορά του ρολογιού.

Στροφή διανύσματος (ξανά).

Έστω η απεικόνιση $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η οποία στρίβει ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ κατά γωνία θ αντίθετα με τη φορά του ρολογιού. Που στέλνει η T_θ τα διανύσματα e_1 και e_2, δηλαδή ποια είναι τα $T_\theta(e_1), T_\theta(e_2)$;

Στροφή διανύσματος (ξανά).

Έστω η απεικόνιση $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η οποία στρίβει ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ κατά γωνία θ αντίθετα με τη φορά του ρολογιού. Που στέλνει η T_θ τα διανύσματα e_1 και e_2, δηλαδή ποια είναι τα $T_\theta(e_1), T_\theta(e_2)$;

$$T_\theta\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \text{συν}(\theta) \\ \text{ημ}(\theta) \end{bmatrix},$$

Στροφή διανύσματος (ξανά).

Έστω η απεικόνιση $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η οποία στρίβει ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ κατά γωνία θ αντίθετα με τη φορά του ρολογιού. Που στέλνει η T_θ τα διανύσματα e_1 και e_2, δηλαδή ποια είναι τα $T_\theta(e_1), T_\theta(e_2)$;

$$T_\theta\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\text{συν}(\theta)\\ \text{ημ}(\theta)\end{bmatrix}, T_\theta\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-\text{ημ}(\theta)\\ \text{συν}(\theta)\end{bmatrix}$$

Στροφή διανύσματος (ξανά).

Έστω η απεικόνιση $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η οποία στρίβει ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ κατά γωνία θ αντίθετα με τη φορά του ρολογιού. Που στέλνει η T_θ τα διανύσματα e_1 και e_2, δηλαδή ποια είναι τα $T_\theta(e_1), T_\theta(e_2)$;

$$T_\theta\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \text{συν}(\theta) \\ \text{ημ}(\theta) \end{bmatrix}, T_\theta\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\text{ημ}(\theta) \\ \text{συν}(\theta) \end{bmatrix}$$

Άρα $T_\theta(x) = Ax$ με

$$A = \begin{bmatrix} \text{συν}(\theta) & -\text{ημ}(\theta) \\ \text{ημ}(\theta) & \text{συν}(\theta) \end{bmatrix}$$

Τι μάθαμε και τι πρέπει να ξέρουμε.

1. Τον ορισμό της γραμμική απεικόνισης.
2. Ότι κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ με διάνυσμα.
3. Ότι μπορούμε να βρούμε αυτόν τον πίνακα αυτόν απλά αποτιμώντας την T στα διανύσματα $e_1, e_2, \ldots, e_n$ και φτιάχνοντας τον πίνακα με στήλες τα $T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n)$.

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!