Γραμμική Άλγεβρα

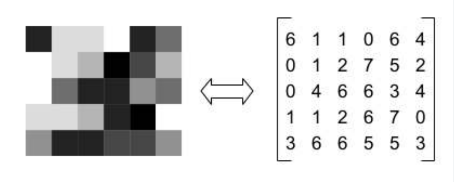
Τέταρτη Διαλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

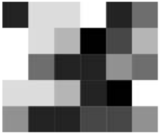
Τα διανύσματα και οι πίνακες δεν εκφράζουν μόνο γεωμετρικά αντικείμενα.

Οι εικόνες στον υπολογιστή αποθηκεύονται σαν πίνακες.



Τα διανύσματα και οι πίνακες δεν εκφράζουν μόνο γεωμετρικά αντικείμενα.

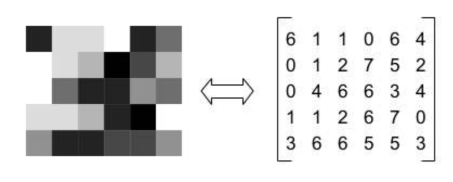
Οι εικόνες στον υπολογιστή αποθηκεύονται σαν πίνακες.



$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 6 & 7 & 0 \\ 3 & 6 & 6 & 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Τα διανύσματα και οι πίνακες δεν εκφράζουν μόνο γεωμετρικά αντικείμενα.

Οι εικόνες στον υπολογιστή αποθηκεύονται σαν πίνακες.



Η επεξεργασία εικόνας και άλλες υπολογιστικές διαδικασίες γίνεται με διάφορες γραμμοαλγεβρικές πράξεις - η συμπίεση εικόνας γίνεται (και) με χρήση εννοιών και εργαλείων Γραμμικής Άλγεβρας.

Τι είναι η γραμμική θήκη (ξανά)

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ συμβολίζεται με

$$\mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$$

και

Τι είναι η γραμμική θήκη (ξανά)

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ συμβολίζεται με

$$\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$$

και

- είναι ένα σύνολο **διανυσμάτων**.

Τι είναι η γραμμική θήκη (ξανά)

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ συμβολίζεται με

$$\operatorname{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$$

και

- είναι ένα σύνολο **διανυσμάτων**.
- ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ περιέχεται σε αυτό το σύνολο αν μπορεί να γραφτεί ως $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots c_n\vec{a}_n$ για κάποιους πραγματικούς αριθμούς $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Τι είναι η γραμμική θήκη (ξανά)

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ συμβολίζεται με

$$\operatorname{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$$

και

- είναι ένα σύνολο **διανυσμάτων**.
- ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ περιέχεται σε αυτό το σύνολο αν μπορεί να γραφτεί ως $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots c_n\vec{a}_n$ για κάποιους πραγματικούς αριθμούς $c_1, c_2, \ldots, c_n$.
- περιέχει κάθε *γραμμικό συνδυασμό* των $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n$ (και τίποτα παραπάνω).

Τι είναι η γραμμική θήκη (ξανά)

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ συμβολίζεται με

$$\operatorname{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$$

και

- είναι ένα σύνολο **διανυσμάτων**.
- ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ περιέχεται σε αυτό το σύνολο αν μπορεί να γραφτεί ως $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots c_n\vec{a}_n$ για κάποιους πραγματικούς αριθμούς $c_1, c_2, \ldots, c_n$.
- περιέχει κάθε *γραμμικό συνδυασμό* των $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n$ (και τίποτα παραπάνω).

⋆ Μπορεί να υπάρχουν πάνω από ένας τρόποι ένα διάνυσμα να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

Παραδείγματα.

$$2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 5\vec{a}_3 \in \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

Παραδείγματα.

$$2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 5\vec{a}_3 \in \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$-\vec{a}_1 - \vec{a}_3 \in \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

Παραδείγματα.

$$2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 5\vec{a}_3 \in \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$-\vec{a}_1 - \vec{a}_3 \in \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$\vec{0} \in \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\}$$

Παραδείγματα.

$$2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 5\vec{a}_3 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$-\vec{a}_1 - \vec{a}_3 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$\vec{0} \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\}$$

$$\vec{a}_3 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

Παραδείγματα.

$$2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 5\vec{a}_3 \in \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$-\vec{a}_1 - \vec{a}_3 \in \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$\vec{0} \in \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\}$$

$$\vec{a}_3 \in \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$-\vec{a}_1 \in \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

Παραδείγματα.

$$2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 5\vec{a}_3 \in \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$-\vec{a}_1 - \vec{a}_3 \in \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$\vec{0} \in \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\}$$

$$\vec{a}_3 \in \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$-\vec{a}_1 \in \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$\vec{a}_2 \in \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\}???$$

Παραδείγματα.

$$2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 5\vec{a}_3 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$-\vec{a}_1 - \vec{a}_3 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$\vec{0} \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\}$$

$$\vec{a}_3 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$-\vec{a}_1 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$\vec{a}_2 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\}???$$

Όχι απαραίτητα, εξαρτάται από ποια είναι τα $\vec{a}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_3$.

Πάλι ευθείες και επίπεδα.

Έστω $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$ (διανύσματα με m εγγραφές).

Πάλι ευθείες και επίπεδα.

Έστω $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$ (διανύσματα με m εγγραφές).

1. Το $\mathrm{span}\{\vec{a}_1\} = \{c\vec{a}_1 | c \in \mathbb{R}\}$ είναι μια ευθεία στον $\mathbb{R}^m$,

Πάλι ευθείες και επίπεδα.

Έστω $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$ (διανύσματα με m εγγραφές).

1. Το $\text{span}\{\vec{a}_1\} = \{c\vec{a}_1 | c \in \mathbb{R}\}$ είναι μια ευθεία στον $\mathbb{R}^m$, η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων.

Πάλι ευθείες και επίπεδα.

Έστω $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$ (διανύσματα με m εγγραφές).

1. Το $\mathrm{span}\{\vec{a}_1\} = \{c\vec{a}_1 | c \in \mathbb{R}\}$ είναι μια ευθεία στον $\mathbb{R}^m$, η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων.
2. Το $\mathrm{span}\{\vec{a}_1\} + \vec{v} = \{c\vec{a}_1 + \vec{v} | c \in \mathbb{R}\}$ είναι μια ευθεία στον $\mathbb{R}^m$.

Πάλι ευθείες και επίπεδα.

Έστω $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$ (διανύσματα με m εγγραφές).

1. Το $\mathrm{span}\{\vec{a}_1\} = \{c\vec{a}_1 | c \in \mathbb{R}\}$ είναι μια ευθεία στον $\mathbb{R}^m$, η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων.
2. Το $\mathrm{span}\{\vec{a}_1\} + \vec{v} = \{c\vec{a}_1 + \vec{v} | c \in \mathbb{R}\}$ είναι μια ευθεία στον $\mathbb{R}^m$.
3. Το $\mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^m$

Πάλι ευθείες και επίπεδα.

Έστω $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$ (διανύσματα με m εγγραφές).

1. Το $\text{span}\{\vec{a}_1\} = \{c\vec{a}_1 | c \in \mathbb{R}\}$ είναι μια ευθεία στον $\mathbb{R}^m$, η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων.
2. Το $\text{span}\{\vec{a}_1\} + \vec{v} = \{c\vec{a}_1 + \vec{v} | c \in \mathbb{R}\}$ είναι μια ευθεία στον $\mathbb{R}^m$.
3. Το $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^m$ το οποίο περνάει από την αρχή των αξόνων,

Πάλι ευθείες και επίπεδα.

Έστω $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$ (διανύσματα με m εγγραφές).

1. Το $\text{span}\{\vec{a}_1\} = \{c\vec{a}_1 | c \in \mathbb{R}\}$ είναι μια ευθεία στον $\mathbb{R}^m$, η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων.
2. Το $\text{span}\{\vec{a}_1\} + \vec{v} = \{c\vec{a}_1 + \vec{v} | c \in \mathbb{R}\}$ είναι μια ευθεία στον $\mathbb{R}^m$.
3. Το $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^m$ το οποίο περνάει από την αρχή των αξόνων, εκτός αν τα $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ είναι συγγραμικά στην οποία περίπτωση είναι ευθεία!

Πάλι ευθείες και επίπεδα.

Έστω $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$ (διανύσματα με m εγγραφές).

1. Το $\text{span}\{\vec{a}_1\} = \{c\vec{a}_1 | c \in \mathbb{R}\}$ είναι μια ευθεία στον $\mathbb{R}^m$, η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων.
2. Το $\text{span}\{\vec{a}_1\} + \vec{v} = \{c\vec{a}_1 + \vec{v} | c \in \mathbb{R}\}$ είναι μια ευθεία στον $\mathbb{R}^m$.
3. Το $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^m$ το οποίο περνάει από την αρχή των αξόνων, εκτός αν τα $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ είναι συγγραμικά στην οποία περίπτωση είναι ευθεία!

$\star$ Είπαμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε μια ευθεία στον χώρο ως τομή δύο επιπέδων.

$\Leftrightarrow$

Πάλι ευθείες και επίπεδα.

Έστω $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$ (διανύσματα με m εγγραφές).

1. Το $\text{span}\{\vec{a}_1\} = \{c\vec{a}_1 | c \in \mathbb{R}\}$ είναι μια ευθεία στον $\mathbb{R}^m$, η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων.
2. Το $\text{span}\{\vec{a}_1\} + \vec{v} = \{c\vec{a}_1 + \vec{v} | c \in \mathbb{R}\}$ είναι μια ευθεία στον $\mathbb{R}^m$.
3. Το $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^m$ το οποίο περνάει από την αρχή των αξόνων, εκτός αν τα $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ είναι συγγραμικά στην οποία περίπτωση είναι ευθεία!

$\star$ Είπαμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε μια ευθεία στον χώρο ως τομή δύο επιπέδων.

$$\Leftrightarrow$$

Λύση σύστηματος Εξισώσεων με 3 αγνώστους και 2 μεταβλητές.

$$\Leftrightarrow$$

Πάλι ευθείες και επίπεδα.

Έστω $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$ (διανύσματα με m εγγραφές).

1. Το $\text{span}\{\vec{a}_1\} = \{c\vec{a}_1 | c \in \mathbb{R}\}$ είναι μια ευθεία στον $\mathbb{R}^m$, η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων.
2. Το $\text{span}\{\vec{a}_1\} + \vec{v} = \{c\vec{a}_1 + \vec{v} | c \in \mathbb{R}\}$ είναι μια ευθεία στον $\mathbb{R}^m$.
3. Το $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^m$ το οποίο περνάει από την αρχή των αξόνων, εκτός αν τα $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ είναι συγγραμικά στην οποία περίπτωση είναι ευθεία!

$\star$ Είπαμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε μια ευθεία στον χώρο ως τομή δύο επιπέδων.

$\Leftrightarrow$

Λύση σύστηματος Εξισώσεων με 3 αγνώστους και 2 μεταβλητές.

$\Leftrightarrow$

Γραμμική Θήκη κάποιου διανύσματος

Πάλι ευθείες και επίπεδα.

Έστω $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$ (διανύσματα με m εγγραφές).

1. Το $\text{span}\{\vec{a}_1\} = \{c\vec{a}_1 | c \in \mathbb{R}\}$ είναι μια ευθεία στον $\mathbb{R}^m$, η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων.
2. Το $\text{span}\{\vec{a}_1\} + \vec{v} = \{c\vec{a}_1 + \vec{v} | c \in \mathbb{R}\}$ είναι μια ευθεία στον $\mathbb{R}^m$.
3. Το $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^m$ το οποίο περνάει από την αρχή των αξόνων, εκτός αν τα $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ είναι συγγραμικά στην οποία περίπτωση είναι ευθεία!

$\star$ Είπαμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε μια ευθεία στον χώρο ως τομή δύο επιπέδων.

$\Leftrightarrow$

Λύση σύστηματος Εξισώσεων με 3 αγνώστους και 2 μεταβλητές.

$\Leftrightarrow$

Γραμμική Θήκη κάποιου διανύσματος (μετατοπισμένη κατά ένα διάνυσμα).

Το Παράδειγμα του Φροντιστηρίου.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 7 & 2 & -5 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

Το Παράδειγμα του Φροντιστηρίου.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 7 & 2 & -5 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

Όλες οι λύσεις είναι της μορφής

$$c_1 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 19 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{a}_1} + c_2 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -31 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{a}_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} -89 \\ -17 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{a}_3}$$

για οποιαδήποτε επιλογή των c_1, c_2.

Το Παράδειγμα του Φροντιστηρίου.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 7 & 2 & -5 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

Όλες οι λύσεις είναι της μορφής

$$c_1 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 19 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{a}_1} + c_2 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -31 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{a}_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} -89 \\ -17 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{a}_3}$$

για οποιαδήποτε επιλογή των c_1, c_2. Άρα οι λύσεις είναι ακριβώς το σύνολο $\mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} + \vec{a}_3$.

Γενικός Κανόνας.

Έστω ένα σύστημα εξισώσεων με r ελεύθερες μεταβλητές. Τότε

Γενικός Κανόνας.

Έστω ένα σύστημα εξισώσεων με r ελεύθερες μεταβλητές. Τότε υπάρχουν διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_r, \vec{w}$ έτσι ώστε το σύνολο λύσεων του να είναι της μορφής

$$\operatorname{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_r\} + \vec{w},$$

Γενικός Κανόνας.

Έστω ένα σύστημα εξισώσεων με r ελεύθερες μεταβλητές. Τότε υπάρχουν διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_r, \vec{w}$ έτσι ώστε το σύνολο λύσεων του να είναι της μορφής

$$\mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_r\} + \vec{w},$$

ή με άλλα λόγια κάθε λύση του συστήματος είναι της μορφής

$$\underbrace{c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots c_r\vec{a}_r}_{\text{γραμμικός συνδυασμός}} + \vec{w}$$

για κάποια $c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$

Γενικός Κανόνας.

Έστω ένα σύστημα εξισώσεων με r ελεύθερες μεταβλητές. Τότε υπάρχουν διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_r, \vec{w}$ έτσι ώστε το σύνολο λύσεων του να είναι της μορφής

$$\mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_r\} + \vec{w},$$

ή με άλλα λόγια κάθε λύση του συστήματος είναι της μορφής

$$\underbrace{c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots c_r\vec{a}_r}_{\text{γραμμικός συνδυασμός}} + \vec{w}$$

για κάποια $c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$ και αντίστροφα κάθε διάνυσμα της μορφής

$$\underbrace{c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots c_r\vec{a}_r}_{\text{γραμμικός συνδυασμός}} + \vec{w}$$

είναι λύση του συστήματος.

Παράδειγμα.

Ας λύσουμε το σύστημα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & 1 \end{array}\right]$$

Παράδειγμα.

Ας λύσουμε το σύστημα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow_{\texttt{απαλοιφή Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \color{red}{1} & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

που αντιστοιχεί στις εξισώσεις $\color{red}{x_1} = 2\color{blue}{x_3} + 1, \color{red}{x_2} = 3\color{blue}{x_3} - 1.$

Παράδειγμα.

Ας λύσουμε το σύστημα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow_{\texttt{απαλοιφή Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} {\color{red}1} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & {\color{red}1} & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

που αντιστοιχεί στις εξισώσεις ${\color{red}x_1} = 2{\color{blue}x_3} + 1, {\color{red}x_2} = 3{\color{blue}x_3} - 1$.Άρα

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

Παράδειγμα.

Ας λύσουμε το σύστημα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow_{\texttt{απαλοιφή Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

που αντιστοιχεί στις εξισώσεις $x_1 = 2x_3 + 1, x_2 = 3x_3 - 1$.Άρα

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 + 1 \\ 3x_3 - 1 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

Παράδειγμα.

Ας λύσουμε το σύστημα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow_{\texttt{απαλοιφή Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \color{red}{1} & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

που αντιστοιχεί στις εξισώσεις $\color{red}{x_1} = 2\color{blue}{x_3} + 1, \color{red}{x_2} = 3\color{blue}{x_3} - 1$.Άρα

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 + 1 \\ 3x_3 - 1 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{a}_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{w}}$$

Παράδειγμα.

Ας λύσουμε το σύστημα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow_{\texttt{απαλοιφή Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

που αντιστοιχεί στις εξισώσεις $x_1 = 2x_3 + 1, x_2 = 3x_3 - 1$.Άρα

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 + 1 \\ 3x_3 - 1 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{a}_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{w}} \in \operatorname{span}\{\vec{a}_1\} + w$$

Παράδειγμα.

Ας λύσουμε το σύστημα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow_{\text{απαλοιφή Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

που αντιστοιχεί στις εξισώσεις $x_1 = 2x_3 + 1, x_2 = 3x_3 - 1$.Άρα

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 + 1 \\ 3x_3 - 1 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{a}_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{w}} \in \operatorname{span}\{\vec{a}_1\} + w$$

Υπενθύμιση: Βαθμός Πίνακα είναι το **πλήθος** των βασικών μεταβλητών το.

Παράδειγμα.

Ας λύσουμε το σύστημα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow_{\texttt{απαλοιφή Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

που αντιστοιχεί στις εξισώσεις $x_1 = 2x_3 + 1, x_2 = 3x_3 - 1.$Άρα

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 + 1 \\ 3x_3 - 1 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{a}_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{w}} \in \operatorname{span}\{\vec{a}_1\} + w$$

Υπενθύμιση: Βαθμός Πίνακα είναι το **πλήθος** των βασικών μεταβλητών το. Ο χώρος λύσεων ενός συστήματος (αν έχει λύση) με βαθμό r είναι η γραμμική θήκη $n - r$ διανυσμάτων μετατοπισμένη κατά ένα διάνυσμα.

Εσωτερικό γινομένο

Εσωτερικό Γινόμενο διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Εσωτερικό γινομένο

Εσωτερικό Γινόμενο διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Εσωτερικό γινομένο

Εσωτερικό Γινόμενο διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$\langle \vec{u} \ , \ \vec{v} \rangle := u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

Εσωτερικό γινομένο

Εσωτερικό Γινόμενο διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$\langle \vec{u} \ , \ \vec{v} \rangle := u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

Εκφράζει το *πόσο* το διάνυσμα u δείχνει στην κατεύθυνση του v (και το αντίστροφο).

Εσωτερικό γινομένο

Εσωτερικό Γινόμενο διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$\langle \vec{u}\ ,\ \vec{v} \rangle := u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

Εκφράζει το *πόσο* το διάνυσμα u δείχνει στην κατεύθυνση του v (και το αντίστροφο).

Παραδείγματα:

$$\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 1 + y \cdot 0 = x,$$

Παραδείγματα:

$$\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 1 + y \cdot 0 = x, \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 0 + y \cdot 1 = y$$

και

Παραδείγματα:

$$\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 1 + y \cdot 0 = x, \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 0 + y \cdot 1 = y$$

και

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0,$$

Παραδείγματα:

$$\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 1 + y \cdot 0 = x, \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 0 + y \cdot 1 = y$$

και

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0, \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = -2 \cdot 1 + -1 \cdot -1 = -1$$

και

Παραδείγματα:

$$\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 1 + y \cdot 0 = x, \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 0 + y \cdot 1 = y$$

και

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0, \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = -2 \cdot 1 + -1 \cdot -1 = -1$$

και

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 = 3,$$

Παραδείγματα:

$$\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 1 + y \cdot 0 = x, \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 0 + y \cdot 1 = y$$

και

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0, \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = -2 \cdot 1 + -1 \cdot -1 = -1$$

και

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 = 3,$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

Παραδείγματα:

$$\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 1 + y \cdot 0 = x, \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 0 + y \cdot 1 = y$$

και

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0, \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = -2 \cdot 1 + -1 \cdot -1 = -1$$

και

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 = 3,$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

$\star$ $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$ είναι **κάθετα**.

Πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (m γραμμές και n στήλες) και $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (m γραμμές και n στήλες) και $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
Ορίζω τον πολλαπλασιασμό του A με το διάνυσμα $\vec{x}$ ως

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (m γραμμές και n στήλες) και $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
Ορίζω τον πολλαπλασιασμό του A με το διάνυσμα $\vec{x}$ ως

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

- Το γινόμενο $A\vec{x}$ με $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα *διάνυσμα* μήκους m.

Πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (m γραμμές και n στήλες) και $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
Ορίζω τον πολλαπλασιασμό του A με το διάνυσμα $\vec{x}$ ως

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

- Το γινόμενο $A\vec{x}$ με $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα *διάνυσμα* μήκους m.
- Το **διάνυσμα** $A\vec{x}$ περιέχει στην i-οστή του εγγραφή το **εσωτερικό γινόμενο** της i-οστής γραμμής του A με το διάνυσμα $\vec{x}$.

Πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (m γραμμές και n στήλες) και $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
Ορίζω τον πολλαπλασιασμό του A με το διάνυσμα $\vec{x}$ ως

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

- Το γινόμενο $A\vec{x}$ με $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα *διάνυσμα* μήκους m.
- Το **διάνυσμα** $A\vec{x}$ περιέχει στην i-οστή του εγγραφή το **εσωτερικό γινόμενο** της i-οστής γραμμής του A με το διάνυσμα $\vec{x}$.

⋆ Με τον από πάνω ορισμό η διανυσματική εξίσωση και τα γραμμικά συστήματα γράφονται ως $A\vec{x} = \vec{\beta}$.

Παράδειγμα πολλαπλασιασμού πίνακα με διάνυσμα.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

Παράδειγμα πολλαπλασιασμού πίνακα με διάνυσμα.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (0) \cdot (-1) \end{bmatrix} =$$

Παράδειγμα πολλαπλασιασμού πίνακα με διάνυσμα.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (0) \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα πολλαπλασιασμού πίνακα με διάνυσμα.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (0) \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Πόσους πολλαπλασιασμούς και προσθέσεις πρέπει να κάνω για να υπολογίσω το γινόμενο $A\vec{x}$ με $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$;

Παράδειγμα πολλαπλασιασμού πίνακα με διάνυσμα.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (0) \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Πόσους πολλαπλασιασμούς και προσθέσεις πρέπει να κάνω για να υπολογίσω το γινόμενο $A\vec{x}$ με $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$;

$\star$ Για κάθε γραμμή του A έχω n πολλαπλασιασμούς και $n-1$ προσθέσεις.

Παράδειγμα πολλαπλασιασμού πίνακα με διάνυσμα.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (0) \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Πόσους πολλαπλασιασμούς και προσθέσεις πρέπει να κάνω για να υπολογίσω το γινόμενο $A\vec{x}$ με $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$;

⋆ Για κάθε γραμμή του A έχω n πολλαπλασιασμούς και $n-1$ προσθέσεις.

⋆ Άρα συνολικά $m \cdot n$ πολλαπλασιασμούς και $m \cdot (n-1)$ προσθέσεις.

Λίγο διαφήμιση.


THE TOP 10 LIST
1946: The Metropolis Algorithm
1947: Simplex Method
1950: Krylov Subspace Method
1951: The Decompositional Approach to Matrix Computations
1957: The Fortran Optimizing Compiler
1959: QR Algorithm
1962: Quicksort
1965: Fast Fourier Transform
1977: Integer Relation Detection
1987: Fast Multipole Method
Dantzig
von Neumann
Hestenes
Householder
Backus
Hoare
Greengard

Διαφορετικές αναγνώσεις.

Υπενθύμιση: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \vec{x} \in \mathbb{R}^{n}$ **και άρα** $Ax \in \mathbb{R}^{m}$.

Διαφορετικές αναγνώσεις.

Υπενθύμιση: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \vec{x} \in \mathbb{R}^{n}$ και άρα $Ax \in \mathbb{R}^{m}$.
Έστω $\vec{a}_i$ η i-οστή στήλη και $\vec{r}_i$ η i-οστή γραμμή του A.

Διαφορετικές αναγνώσεις.

Υπενθύμιση: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \vec{x} \in \mathbb{R}^{n}$ και άρα $Ax \in \mathbb{R}^{m}$.
Έστω $\vec{a}_i$ η i-οστή στήλη και $\vec{r}_i$ η i-οστή γραμμή του A.

1. (Κατά γραμμή ανάγνωση). Η i-οστη συντεταγμένη του $A\vec{x}$ ισούται με $\langle r_i, \vec{x} \rangle$. Εσωτερικό γινόμενο κάθε **γραμμής** του A με το $\vec{x}$.

Διαφορετικές αναγνώσεις.

Υπενθύμιση: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \vec{x} \in \mathbb{R}^{n}$ και άρα $Ax \in \mathbb{R}^{m}$.
Έστω $\vec{a}_i$ η i-οστή στήλη και $\vec{r}_i$ η i-οστή γραμμή του A.

1. (Κατά γραμμή ανάγνωση). Η i-οστη συντεταγμένη του $A\vec{x}$ ισούται με $\langle r_i, \vec{x} \rangle$. Εσωτερικό γινόμενο κάθε **γραμμής** του A με το $\vec{x}$.
2. (Κατά στήλη ανάγνωση). $A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots x_n\vec{a}_n$. Γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A με συντελεστές τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Διαφορετικές αναγνώσεις.

Υπενθύμιση: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \vec{x} \in \mathbb{R}^{n}$ και άρα $Ax \in \mathbb{R}^{m}$.
Έστω $\vec{a}_i$ η i-οστή στήλη και $\vec{r}_i$ η i-οστή γραμμή του A.

1. (Κατά γραμμή ανάγνωση). Η i-οστη συντεταγμένη του $A\vec{x}$ ισούται με $\langle r_i, \vec{x} \rangle$. Εσωτερικό γινόμενο κάθε **γραμμής** του A με το $\vec{x}$.
2. (Κατά στήλη ανάγνωση). $A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots x_n\vec{a}_n$. Γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A με συντελεστές τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$$A\vec{x} = \vec{\beta} \Leftrightarrow x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{\beta}$$

Παράδειγμα.

⋆ Υπολογίζουμε με την κατά γραμμή ανάγνωση.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 7 \\ 0 \cdot 4 + (-5) \cdot 3 + 3 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα.

⋆ Υπολογίζουμε με την κατά γραμμή ανάγνωση.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 7 \\ 0 \cdot 4 + (-5) \cdot 3 + 3 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

⋆ Υπολογίζουμε και με την κατά στήλη ανάγνωση.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Πίσω στη γραμμική θήκη.

Υπενθύμιση: Δοθέντων διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ ποια είναι τα $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$ τα οποία δύναται να προκύψουν ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$;

Πίσω στη γραμμική θήκη.

Υπενθύμιση: Δοθέντων διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ ποια είναι τα $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$ τα οποία δύναται να προκύψουν ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$;

Το ίδιο ερώτημα με άλλα λόγια:

Πίσω στη γραμμική θήκη.

Υπενθύμιση: Δοθέντων διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ ποια είναι τα $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$ τα οποία δύναται να προκύψουν ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$;

Το ίδιο ερώτημα με άλλα λόγια:
Ποια είναι τα $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^n$ για τα οποία υπάρχει $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ώστε $A\vec{x} = \vec{\beta}$; όπου ο A είναι ο πίνακας του οποίου η i-οστή στήλη είναι το $\vec{a}_i$.

Αλγεβρικές ιδιότητες γινομένου πίνακα με διάνυσμα.

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^{n}, c \in \mathbb{R}.$

- Επιμεριστική ιδιότητα:

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$$

Αλγεβρικές ιδιότητες γινομένου πίνακα με διάνυσμα.

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^{n}, c \in \mathbb{R}$.

- Επιμεριστική ιδιότητα:

$$A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$$

- Προσεταιριστική ιδιότητα με βαθμωτό.

$$A(c\vec{u}) = c(A\vec{u})$$

Παράδειγμα

$$
\begin{aligned}
&A(2\vec{u} + 3\vec{v}) - A(2\vec{v} + 5\vec{u}) \\
&= 2A\vec{u} + 3A\vec{v} - 2A\vec{v} - 5A\vec{u} \\
&= -3A\vec{u} + A\vec{v} \\
&= A(\vec{v} - 3\vec{u})
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα

$$
\begin{aligned}
&A(2\vec{u} + 3\vec{v}) - A(2\vec{v} + 5\vec{u}) \\
&= 2A\vec{u} + 3A\vec{v} - 2A\vec{v} - 5A\vec{u} \\
&= -3A\vec{u} + A\vec{v} \\
&= A(\vec{v} - 3\vec{u})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&A(\vec{u} - \vec{v}) - A(-\vec{v} + \vec{u}) \\
&= A\vec{u} - A\vec{v} + A\vec{v} - A\vec{u} \\
&\vec{0}
\end{aligned}
$$

Οι αποδείξεις των ανωτέρων.

Έστω $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ οι στήλες του A.

$$
\begin{aligned}
&A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}, \text{ διότι} \\
&A(\vec{u}+\vec{v}) = (\text{λόγω ανάγνωσης κατά στήλη}) \\
&(u_1+v_1)\vec{a}_1 + (u_2+v_2)\vec{a}_2 + \ldots + (u_n+v_n)\vec{a}_n = \\
&(u_1\vec{a}_1 + \ldots u_n\vec{a}_n) + (v_1\vec{a}_1 + \ldots v_n\vec{a}_n) = \\
&A\vec{u} + A\vec{v}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&A(c\vec{u}) = c(A\vec{u}), \text{ διότι} \\
&A(c\vec{u}) = (cu_1)\vec{a}_1 + (cu_2)\vec{a}_2 + \ldots + (cu_n)\vec{a}_n = \\
&(cu_1)\vec{a}_1 + (cu_2)\vec{a}_2 + \ldots + (cu_n)\vec{a}_n = \\
&c(A\vec{u})
\end{aligned}
$$

Ας επανέλθουμε.

Ισοδυναμία διατυπώσεων.

- Γραμμικό Σύστημα με m εξισώσεις και n αγνώστους.

Ας επανέλθουμε.

Ισοδυναμία διατυπώσεων.

- Γραμμικό Σύστημα με m εξισώσεις και n αγνώστους.
- Επαυξημένος πίνακας με m γραμμές και $n + 1$ στήλες.

Ας επανέλθουμε.

Ισοδυναμία διατυπώσεων.

- Γραμμικό Σύστημα με m εξισώσεις και n αγνώστους.
- Επαυξημένος πίνακας με m γραμμές και $n+1$ στήλες.
- Διανυσματική εξίσωση $x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{\beta}$ με $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$ και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

Ας επανέλθουμε.

Ισοδυναμία διατυπώσεων.

- Γραμμικό Σύστημα με m εξισώσεις και n αγνώστους.
- Επαυξημένος πίνακας με m γραμμές και $n+1$ στήλες.
- Διανυσματική εξίσωση $x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{\beta}$ με $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$ και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$
- Εξίσωση πίνακα $A\vec{x} = \vec{\beta}$.

Ας επανέλθουμε.

Ισοδυναμία διατυπώσεων.

- Γραμμικό Σύστημα με m εξισώσεις και n αγνώστους.
- Επαυξημένος πίνακας με m γραμμές και $n+1$ στήλες.
- Διανυσματική εξίσωση $x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{\beta}$ με $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$ και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$
- Εξίσωση πίνακα $A\vec{x} = \vec{\beta}$.
- $\vec{\beta} \in \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$;

Ας επανέλθουμε.

Ισοδυναμία διατυπώσεων.

- Γραμμικό Σύστημα με m εξισώσεις και n αγνώστους.
- Επαυξημένος πίνακας με m γραμμές και $n+1$ στήλες.
- Διανυσματική εξίσωση $x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{\beta}$ με $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$ και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$
- Εξίσωση πίνακα $A\vec{x} = \vec{\beta}$.
- $\vec{\beta} \in \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$;

Ας επανέλθουμε.

Ισοδυναμία διατυπώσεων.

- Γραμμικό Σύστημα με m εξισώσεις και n αγνώστους.
- Επαυξημένος πίνακας με m γραμμές και $n+1$ στήλες.
- Διανυσματική εξίσωση $x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{\beta}$ με $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$ και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$
- Εξίσωση πίνακα $A\vec{x} = \vec{\beta}$.
- $\vec{\beta} \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$;

Όλα τα παραπάνω εκφράζουν ακριβώς το ίδιο πράγμα και άρα έχουν τις ίδιες λύσεις!

Επακόλουθα.

Τα κατώθι είναι ισοδύναμα.

- Για κάθε $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$ η εξίσωση $A\vec{x} = \vec{\beta}$ έχει λύση.

Επακόλουθα.

Τα κατώθι είναι ισοδύναμα.

- Για κάθε $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$ η εξίσωση $A\vec{x} = \vec{\beta}$ έχει λύση.
- Κάθε $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A.

Επακόλουθα.

Τα κατώθι είναι ισοδύναμα.

- Για κάθε $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$ η εξίσωση $A\vec{x} = \vec{\beta}$ έχει λύση.
- Κάθε $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A.
- $\mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^m$, όπου $a_1, a_2, \ldots, a_n$ στήλες του A.

Επακόλουθα.

Τα κατώθι είναι ισοδύναμα.

- Για κάθε $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$ η εξίσωση $A\vec{x} = \vec{\beta}$ έχει λύση.
- Κάθε $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A.
- $\mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^m$, όπου $a_1, a_2, \ldots, a_n$ στήλες του A.
- Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A έχει οδηγό σε κάθε μία από τις m γραμμές.

Επακόλουθα.

Τα κατώθι είναι ισοδύναμα.

- Για κάθε $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$ η εξίσωση $A\vec{x} = \vec{\beta}$ έχει λύση.
- Κάθε $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A.
- $\mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^m$, όπου $a_1, a_2, \ldots, a_n$ στήλες του A.
- Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A έχει οδηγό σε κάθε μία από τις m γραμμές.
- Υπάρχουν m βασικές μεταβλητές στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα

Επακόλουθα.

Τα κατώθι είναι ισοδύναμα.

- Για κάθε $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$ η εξίσωση $A\vec{x} = \vec{\beta}$ έχει λύση.
- Κάθε $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A.
- $\mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^m$, όπου $a_1, a_2, \ldots, a_n$ στήλες του A.
- Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A έχει οδηγό σε κάθε μία από τις m γραμμές.
- Υπάρχουν m βασικές μεταβλητές στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα (όταν $m = n$ αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τέλεια σκάλα).

Παράδειγμα.

Λύστε το σύστημα $A\vec{x} = \vec{\beta}$ με

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & -7 & -6 \end{bmatrix}, \vec{\beta} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα.

Λύστε το σύστημα $A\vec{x} = \vec{\beta}$ με

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & -7 & -6 \end{bmatrix}, \vec{\beta} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Φτιάχνουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & 4 \\ -3 & -7 & -6 & 12 \end{array}\right]$$

και λύνουμε όπως πριν.

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!