Γραμμική Άλγεβρα

Εικοστή Διαλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Διάφορες Βάσεις στον $\mathbb{R}^2$.

Και τα δύο ακόλουθα ζεύγη διανυσμάτων

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Διάφορες Βάσεις στον $\mathbb{R}^2$.

Και τα δύο ακόλουθα ζεύγη διανυσμάτων

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Διάφορες Βάσεις στον $\mathbb{R}^2$.

Και τα δύο ακόλουθα ζεύγη διανυσμάτων

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

απότελούν βάσεις στο $\mathbb{R}^2$,

Διάφορες Βάσεις στον $\mathbb{R}^2$.

Και τα δύο ακόλουθα ζεύγη διανυσμάτων

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

απότελούν βάσεις στο $\mathbb{R}^2$, δηλαδή κάθε $x \in \mathbb{R}^2$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός και των u, u' και των v, v'.

Διάφορες Βάσεις στον $\mathbb{R}^2$.

Και τα δύο ακόλουθα ζεύγη διανυσμάτων

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

απότελούν βάσεις στο $\mathbb{R}^2$, δηλαδή κάθε $x \in \mathbb{R}^2$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός και των u, u' και των v, v'.

Είναι εύκολο να γράψουμε κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ σαν γραμμικό συνδυασμό των u, u' (της κανονικής βάσης)

Διάφορες Βάσεις στον $\mathbb{R}^2$.

Και τα δύο ακόλουθα ζεύγη διανυσμάτων

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

απότελούν βάσεις στο $\mathbb{R}^2$, δηλαδή κάθε $x \in \mathbb{R}^2$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός και των u, u' και των v, v'.

Είναι εύκολο να γράψουμε κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ σαν γραμμικό συνδυασμό των u, u' (της κανονικής βάσης)αλλά πως θα ως γραμμικό συνδυασμό των v, v' ;

Διάφορες Βάσεις στον $\mathbb{R}^2$.

Και τα δύο ακόλουθα ζεύγη διανυσμάτων

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

απότελούν βάσεις στο $\mathbb{R}^2$, δηλαδή κάθε $x \in \mathbb{R}^2$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός και των u, u' και των v, v'.

Είναι εύκολο να γράψουμε κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ σαν γραμμικό συνδυασμό των u, u' (της κανονικής βάσης)αλλά πως θα ως γραμμικό συνδυασμό των v, v' ; Και γιατί να θέλουμε κάτι τέτοιο ;

Βάσεις στον $\mathbb{R}^n$ και άλλους χώρους.

Πιο συχνά ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ εκφράζεται στην βάση των $e_1, e_2, \ldots, e_n$

Βάσεις στον $\mathbb{R}^n$ και άλλους χώρους.

Πιο συχνά ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ εκφράζεται στην βάση των $e_1, e_2, \ldots, e_n$, δηλαδή $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$.

Βάσεις στον $\mathbb{R}^n$ και άλλους χώρους.

Πιο συχνά ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ εκφράζεται στην βάση των $e_1, e_2, \ldots, e_n$, δηλαδή $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$. Άλλες φορές μπορεί να χρειαστεί να εκφράσουμε το x σε κάποια άλλη βάση.

Βάσεις στον $\mathbb{R}^n$ και άλλους χώρους.

Πιο συχνά ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ εκφράζεται στην βάση των $e_1, e_2, \ldots, e_n$, δηλαδή $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$. Άλλες φορές μπορεί να χρειαστεί να εκφράσουμε το x σε κάποια άλλη βάση.Πως το κάνουμε αυτό;

Βάσεις στον $\mathbb{R}^n$ και άλλους χώρους.

Πιο συχνά ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ εκφράζεται στην βάση των $e_1, e_2, \ldots, e_n$, δηλαδή $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$. Άλλες φορές μπορεί να χρειαστεί να εκφράσουμε το x σε κάποια άλλη βάση.Πως το κάνουμε αυτό;

Παραδείγματος χάριν, δύο βάσεις του χώρου πολυωνύμων βαθμου το πολύ 2 είναι οι

$$\left\{1, t, t^2\right\},$$

Βάσεις στον $\mathbb{R}^n$ και άλλους χώρους.

Πιο συχνά ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ εκφράζεται στην βάση των $e_1, e_2, \ldots, e_n$, δηλαδή $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$. Άλλες φορές μπορεί να χρειαστεί να εκφράσουμε το x σε κάποια άλλη βάση.Πως το κάνουμε αυτό;

Παραδείγματος χάριν, δύο βάσεις του χώρου πολυωνύμων βαθμου το πολύ 2 είναι οι

$$\left\{1, t, t^2\right\}, \left\{(t-2)(t-3), (t-1)(t-3), (t-1)(t-2)\right\}$$

Βάσεις στον $\mathbb{R}^n$ και άλλους χώρους.

Πιο συχνά ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ εκφράζεται στην βάση των $e_1, e_2, \ldots, e_n$, δηλαδή $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$. Άλλες φορές μπορεί να χρειαστεί να εκφράσουμε το x σε κάποια άλλη βάση.Πως το κάνουμε αυτό;

Παραδείγματος χάριν, δύο βάσεις του χώρου πολυωνύμων βαθμου το πολύ 2 είναι οι

$$\left\{1, t, t^2\right\}, \left\{(t-2)(t-3), (t-1)(t-3), (t-1)(t-2)\right\}$$

και για παράδειγμα

$$0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 1 \cdot t^2 = \frac{1}{2}(t-2)(t-3) - 4(t-1)(t-3) + \frac{9}{2}(t-1)(t-2).$$

Βάσεις στον $\mathbb{R}^n$ και άλλους χώρους.

Πιο συχνά ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ εκφράζεται στην βάση των $e_1, e_2, \ldots, e_n$, δηλαδή $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$. Άλλες φορές μπορεί να χρειαστεί να εκφράσουμε το x σε κάποια άλλη βάση.Πως το κάνουμε αυτό;

Παραδείγματος χάριν, δύο βάσεις του χώρου πολυωνύμων βαθμου το πολύ 2 είναι οι

$$\left\{1, t, t^2\right\}, \left\{(t-2)(t-3), (t-1)(t-3), (t-1)(t-2)\right\}$$

και για παράδειγμα

$$0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 1 \cdot t^2 = \frac{1}{2}(t-2)(t-3) - 4(t-1)(t-3) + \frac{9}{2}(t-1)(t-2).$$

Υπάρχει κάποιος συγκεκριμένος τρόπος να βρούμε τη δεύτερη γραφή;

Ορισμός: Έστω μια βάση $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ενός διανυσματικού χώρου V. Οι συντεταγμένες του $x \in V$ ως προς τη βάση V είναι οι μοναδικοί αριθμοί (στο αντίστοιχο) σώμα K ώστε

$$x = c_1 v_1 + \dots c_n v_n,$$

Ορισμός: Έστω μια βάση $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ενός διανυσματικού χώρου V. Οι συντεταγμένες του $x \in V$ ως προς τη βάση V είναι οι μοναδικοί αριθμοί (στο αντίστοιχο) σώμα K ώστε

$$x = c_1 v_1 + \ldots c_n v_n,$$

και αυτό δίνει το διάνυσμα *συντεταγμένων* του x ως προς την $\mathcal{B}$.

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα.

Να βρεθεί το διάνυσμα συντεταγμένων του

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ως προς τη βάση

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Παράδειγμα.

Να βρεθεί το διάνυσμα συντεταγμένων του

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ως προς τη βάση

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Ψάχνουμε c_1, c_2 ώστε $x = c_1 v_1 + c_2 v_2$,

Παράδειγμα.

Να βρεθεί το διάνυσμα συντεταγμένων του

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ως προς τη βάση

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Ψάχνουμε c_1, c_2 ώστε $x = c_1 v_1 + c_2 v_2$, το οποίο μας δίνει το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα.

Να βρεθεί το διάνυσμα συντεταγμένων του

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ως προς τη βάση

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Ψάχνουμε c_1, c_2 ώστε $x = c_1 v_1 + c_2 v_2$, το οποίο μας δίνει το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

και άρα $c_1 = 2, c_2 = -1$.

Γενίκευση.

Έστω $x \in K^n$ και έστω $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ μια βάση του V.

Γενίκευση.

Έστω $x \in K^n$ και έστω $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ μια βάση του V. Για να βρούμε το $[x]_{\mathcal{B}}$ αρκεί να λύσουμε τη διανυσματική εξίσωση

$$x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n$$

Γενίκευση.

Έστω $x \in K^n$ και έστω $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ μια βάση του V. Για να βρούμε το $[x]_{\mathcal{B}}$ αρκεί να λύσουμε τη διανυσματική εξίσωση

$$x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n,$$

η οποία αντιστοιχεί στο γραμμικό σύστημα

$$Pc = x, \quad P = [v_1, v_2, \ldots, v_n].$$

Γενίκευση.

Έστω $x \in K^n$ και έστω $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ μια βάση του V. Για να βρούμε το $[x]_{\mathcal{B}}$ αρκεί να λύσουμε τη διανυσματική εξίσωση

$$x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n,$$

η οποία αντιστοιχεί στο γραμμικό σύστημα

$$Pc = x, \quad P = [v_1, v_2, \ldots, v_n].$$

Εφόσον τα $v_1, v_2, \ldots$ αποτελούν βάση του K^n τότε ο P είναι αντιστρέψιμος, άρα

Γενίκευση.

Έστω $x \in K^n$ και έστω $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ μια βάση του V. Για να βρούμε το $[x]_{\mathcal{B}}$ αρκεί να λύσουμε τη διανυσματική εξίσωση

$$x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n,$$

η οποία αντιστοιχεί στο γραμμικό σύστημα

$$Pc = x, \quad P = [v_1, v_2, \ldots, v_n].$$

Εφόσον τα $v_1, v_2, \ldots$ αποτελούν βάση του K^n τότε ο P είναι αντιστρέψιμος, άρα

$$c = P^{-1} x.$$

Παράδειγμα.

Να βρεθεί το $[x]_\mathcal{B}$ όπου

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Παράδειγμα.

Να βρεθεί το $[x]_{\mathcal{B}}$ όπου

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{x}$$

Άλλο παράδειγμα.

Να βρεθεί το $[x]_{\mathcal{B}}$ στον διανυσματικό χώρο $V = \mathbb{F}_2^3$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Άλλο παράδειγμα.

Να βρεθεί το $[x]_{\mathcal{B}}$ στον διανυσματικό χώρο $V = \mathbb{F}_2^3$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x}$$

Άλλο παράδειγμα.

Να βρεθεί το $[x]_{\mathcal{B}}$ στον διανυσματικό χώρο $V = \mathbb{F}_2^3$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x}$$

και άρα $c_3 = 1$,

Άλλο παράδειγμα.

Να βρεθεί το $[x]_{\mathcal{B}}$ στον διανυσματικό χώρο $V = \mathbb{F}_2^3$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x}$$

και άρα $c_3 = 1, \ = c_2 = 1,$

Άλλο παράδειγμα.

Να βρεθεί το $[x]_{\mathcal{B}}$ στον διανυσματικό χώρο $V = \mathbb{F}_2^3$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x}$$

και άρα $c_3 = 1, = c_2 = 1, c_1 = 1$, δηλαδή $[x]_{\mathcal{B}} = (1, 1, 1)$.

Αλλαγή Βάσης.

Έστω $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ δύο βάσεις στον K^n και έστω $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ η κλασική βάση στον K^n, δηλαδή

$$\mathcal{E} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix} \ldots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Πως πάμε από το ένα σύστημα συντεταγμένων στο άλλο ; Δηλαδή, αν έχουμε μια γραφή στο $\mathcal{E}$ πως πάμε σε μια γραφή στο $\mathcal{B}$,

Αλλαγή Βάσης.

Έστω $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ δύο βάσεις στον K^n και έστω $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ η κλασική βάση στον K^n, δηλαδή

$$\mathcal{E} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix} \ldots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Πως πάμε από το ένα σύστημα συντεταγμένων στο άλλο ; Δηλαδή, αν έχουμε μια γραφή στο $\mathcal{E}$ πως πάμε σε μια γραφή στο $\mathcal{B}$, πως πάμε από μία στο $\mathcal{B}$ σε μία στο $\mathcal{E}$ και

Έστω $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ δύο βάσεις στον K^n και έστω $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ η κλασική βάση στον K^n, δηλαδή

$$\mathcal{E} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Πως πάμε από το ένα σύστημα συντεταγμένων στο άλλο ; Δηλαδή, αν έχουμε μια γραφή στο $\mathcal{E}$ πως πάμε σε μια γραφή στο $\mathcal{B}$, πως πάμε από μία στο $\mathcal{B}$ σε μία στο $\mathcal{E}$ και αλλάζουμε γραφές ανάμεσα σε $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$;

Τύποι Αλλαγής Βάσης.

Έστω $P_{\mathcal{B}}$ ο πίνακας που έχει σαν στήλες τα διανύσματα στο B, και αντίστοιχα $P_{\mathcal{C}}$ ο πίνακας που έχει σαν στήλες τα διανύσματα στο C.

Τύποι Αλλαγής Βάσης.

Έστω $P_{\mathcal{B}}$ ο πίνακας που έχει σαν στήλες τα διανύσματα στο B, και αντίστοιχα $P_{\mathcal{C}}$ ο πίνακας που έχει σαν στήλες τα διανύσματα στο C.

1. Για να πάμε από $\mathcal{E}$ σε $\mathcal{B}$:

Τύποι Αλλαγής Βάσης.

Έστω $P_{\mathcal{B}}$ ο πίνακας που έχει σαν στήλες τα διανύσματα στο B, και αντίστοιχα $P_{\mathcal{C}}$ ο πίνακας που έχει σαν στήλες τα διανύσματα στο C.

1. Για να πάμε από $\mathcal{E}$ σε $\mathcal{B}$: $[x]_{\mathcal{B}} = P_B^{-1} x$.

Τύποι Αλλαγής Βάσης.

Έστω $P_{\mathcal{B}}$ ο πίνακας που έχει σαν στήλες τα διανύσματα στο B, και αντίστοιχα $P_{\mathcal{C}}$ ο πίνακας που έχει σαν στήλες τα διανύσματα στο C.

1. Για να πάμε από $\mathcal{E}$ σε $\mathcal{B}$: $[x]_{\mathcal{B}} = P_B^{-1}x$.
2. Για να πάμε από $\mathcal{B}$ σε $\mathcal{E}$:

Τύποι Αλλαγής Βάσης.

Έστω $P_{\mathcal{B}}$ ο πίνακας που έχει σαν στήλες τα διανύσματα στο B, και αντίστοιχα $P_{\mathcal{C}}$ ο πίνακας που έχει σαν στήλες τα διανύσματα στο C.

1. Για να πάμε από $\mathcal{E}$ σε $\mathcal{B}$: $[x]_{\mathcal{B}} = P_B^{-1} x$.
2. Για να πάμε από $\mathcal{B}$ σε $\mathcal{E}$: $x = P_B [x]_{\mathcal{B}}$.

Τύποι Αλλαγής Βάσης.

Έστω $P_{\mathcal{B}}$ ο πίνακας που έχει σαν στήλες τα διανύσματα στο B, και αντίστοιχα $P_{\mathcal{C}}$ ο πίνακας που έχει σαν στήλες τα διανύσματα στο C.

1. Για να πάμε από $\mathcal{E}$ σε $\mathcal{B}$: $[x]_{\mathcal{B}} = P_B^{-1}x$.
2. Για να πάμε από $\mathcal{B}$ σε $\mathcal{E}$: $x = P_B[x]_{\mathcal{B}}$.
3. Για να πάμε από $\mathcal{B}$ σε $\mathcal{C}$:

Τύποι Αλλαγής Βάσης.

Έστω $P_{\mathcal{B}}$ ο πίνακας που έχει σαν στήλες τα διανύσματα στο B, και αντίστοιχα $P_{\mathcal{C}}$ ο πίνακας που έχει σαν στήλες τα διανύσματα στο C.

1. Για να πάμε από $\mathcal{E}$ σε $\mathcal{B}$: $[x]_{\mathcal{B}} = P_B^{-1} x$.
2. Για να πάμε από $\mathcal{B}$ σε $\mathcal{E}$: $x = P_B [x]_{\mathcal{B}}$.
3. Για να πάμε από $\mathcal{B}$ σε $\mathcal{C}$: $[x]_{\mathcal{C}} = P_C^{-1} P_B x$.

Τύποι Αλλαγής Βάσης.

Έστω $P_{\mathcal{B}}$ ο πίνακας που έχει σαν στήλες τα διανύσματα στο B, και αντίστοιχα $P_{\mathcal{C}}$ ο πίνακας που έχει σαν στήλες τα διανύσματα στο C.

1. Για να πάμε από $\mathcal{E}$ σε $\mathcal{B}$: $[x]_{\mathcal{B}} = P_B^{-1} x$.
2. Για να πάμε από $\mathcal{B}$ σε $\mathcal{E}$: $x = P_B [x]_{\mathcal{B}}$.
3. Για να πάμε από $\mathcal{B}$ σε $\mathcal{C}$: $[x]_{\mathcal{C}} = P_C^{-1} P_B x$.

Να γραφτεί ο τύπος αλλαγής βάσης για τις βάσεις

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}, \mathcal{C} := \left\{ \begin{bmatrix} -7 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$$

Τύποι Αλλαγής Βάσης.

Έστω $P_{\mathcal{B}}$ ο πίνακας που έχει σαν στήλες τα διανύσματα στο B, και αντίστοιχα $P_{\mathcal{C}}$ ο πίνακας που έχει σαν στήλες τα διανύσματα στο C.

1. Για να πάμε από $\mathcal{E}$ σε $\mathcal{B}$: $[x]_{\mathcal{B}} = P_B^{-1}x$.
2. Για να πάμε από $\mathcal{B}$ σε $\mathcal{E}$: $x = P_B[x]_{\mathcal{B}}$.
3. Για να πάμε από $\mathcal{B}$ σε $\mathcal{C}$: $[x]_{\mathcal{C}} = P_C^{-1}P_Bx$.

Να γραφτεί ο τύπος αλλαγής βάσης για τις βάσεις

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}, \mathcal{C} := \left\{ \begin{bmatrix} -7 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$$

$$[x]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} [x]_{\mathcal{B}}$$

Ένα πιο σύνθετο παράδειγμα.

Έστω ο διανυσματικός χώρος V των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 2 και έστω οι βάσεις

$$\mathcal{E} := \{1, t, t^2\},$$

Ένα πιο σύνθετο παράδειγμα.

Έστω ο διανυσματικός χώρος V των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 2 και έστω οι βάσεις

$$\mathcal{E} := \{1, t, t^2\}, \mathcal{B} := \{(t-2)(t-3), (t-1)(t-3), (t-1)(t-2)\}.$$

Ένα πιο σύνθετο παράδειγμα.

Έστω ο διανυσματικός χώρος V των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 2 και έστω οι βάσεις

$$\mathcal{E} := \{1, t, t^2\}, \mathcal{B} := \{(t-2)(t-3), (t-1)(t-3), (t-1)(t-2)\}.$$

Πως μπορούμε να γράψουμε ένα πολυώνυμο στη βάση $\mathcal{B}$;

Ένα πιο σύνθετο παράδειγμα.

Έστω ο διανυσματικός χώρος V των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 2 και έστω οι βάσεις

$$\mathcal{E} := \{1, t, t^2\}, \mathcal{B} := \{(t-2)(t-3), (t-1)(t-3), (t-1)(t-2)\}.$$

Πως μπορούμε να γράψουμε ένα πολυώνυμο στη βάση $\mathcal{B}$;

⋆ Παρατήρηση I: Σε έναν διαυσματικό χώρο διάστασης n με το που διαλέξουμε μια βάση μπορούμε να διαχειριστούμε τον V σαν τον K^n.

Ένα πιο σύνθετο παράδειγμα.

Έστω ο διανυσματικός χώρος V των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 2 και έστω οι βάσεις

$$\mathcal{E} := \{1, t, t^2\}, \mathcal{B} := \{(t-2)(t-3), (t-1)(t-3), (t-1)(t-2)\}.$$

Πως μπορούμε να γράψουμε ένα πολυώνυμο στη βάση $\mathcal{B}$;

$\star$ Παρατήρηση Ι: Σε έναν διαυσματικό χώρο διάστασης n με το που διαλέξουμε μια βάση μπορούμε να διαχειριστούμε τον V σαν τον K^n.

Για παράδειγμα, κάθε πολυώνυμο $p(t) = a + bt + ct^2$ μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε σε ένα διάνυσμα

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} =$$

Ένα πιο σύνθετο παράδειγμα.

Έστω ο διανυσματικός χώρος V των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 2 και έστω οι βάσεις

$$\mathcal{E} := \{1, t, t^2\}, \mathcal{B} := \{(t-2)(t-3), (t-1)(t-3), (t-1)(t-2)\}.$$

Πως μπορούμε να γράψουμε ένα πολυώνυμο στη βάση $\mathcal{B}$;

⋆ Παρατήρηση I: Σε έναν διαυσματικό χώρο διάστασης n με το που διαλέξουμε μια βάση μπορούμε να διαχειριστούμε τον V σαν τον K^n.

Για παράδειγμα, κάθε πολυώνυμο $p(t) = a + bt + ct^2$ μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε σε ένα διάνυσμα

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ένα πιο σύνθετο παράδειγμα.

Έστω ο διανυσματικός χώρος V των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 2 και έστω οι βάσεις

$$\mathcal{E} := \{1, t, t^2\}, \mathcal{B} := \{(t-2)(t-3), (t-1)(t-3), (t-1)(t-2)\}.$$

Πως μπορούμε να γράψουμε ένα πολυώνυμο στη βάση $\mathcal{B}$;

$\star$ Παρατήρηση I: Σε έναν διαυσματικό χώρο διάστασης n με το που διαλέξουμε μια βάση μπορούμε να διαχειριστούμε τον V σαν τον K^n.

Για παράδειγμα, κάθε πολυώνυμο $p(t) = a + bt + ct^2$ μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε σε ένα διάνυσμα

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και οι πράξεις μεταξύ πολυωνύμων είναι **ολόιδιες** με αυτές που θα κάναμε μεταξύ διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^3$.

Ένα πιο σύνθετο παράδειγμα.

Έστω ο διανυσματικός χώρος V των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 2 και έστω οι βάσεις

$$\mathcal{E} := \{1, t, t^2\}, \mathcal{B} := \{(t-2)(t-3), (t-1)(t-3), (t-1)(t-2)\}.$$

Πως μπορούμε να γράψουμε ένα πολυώνυμο στη βάση $\mathcal{B}$;

⋆ Παρατήρηση Ι: Σε έναν διαυσματικό χώρο διάστασης n με το που διαλέξουμε μια βάση μπορούμε να διαχειριστούμε τον V σαν τον K^n.

Για παράδειγμα, κάθε πολυώνυμο $p(t) = a + bt + ct^2$ μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε σε ένα διάνυσμα

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και οι πράξεις μεταξύ πολυωνύμων είναι **ολόιδιες** με αυτές που θα κάναμε μεταξύ διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^3$.

Ένα άλλο παράδειγμα.

Κάθε $n \times n$ πίνακα μπορώ να το δω σαν ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^{n^2}$, για παράδειγμα

Ένα άλλο παράδειγμα.

Κάθε $n \times n$ πίνακα μπορώ να το δω σαν ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^{n^2}$, για παράδειγμα μπορώ να κάνω την εξής απεικόνιση:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Ένα άλλο παράδειγμα.

Κάθε $n \times n$ πίνακα μπορώ να το δω σαν ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^{n^2}$, για παράδειγμα μπορώ να κάνω την εξής απεικόνιση:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

και έτσι να απεικονίσω κάθε πίνακα 2×2 σε ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^4$.

Ένα άλλο παράδειγμα.

Κάθε $n \times n$ πίνακα μπορώ να το δω σαν ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^{n^2}$, για παράδειγμα μπορώ να κάνω την εξής απεικόνιση:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

και έτσι να απεικονίσω κάθε πίνακα 2×2 σε ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^4$. Οι **γραμμικές σχέσεις μένουν ίδιες**, δηλαδή η προαναφερθείσα απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ είναι γραμμική.

Πιο ενδιαφέρον παράδειγμα.

Μια βάση του χώρου των 2×2 άνω τριγωνικών πινάκων είναι η

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πιο ενδιαφέρον παράδειγμα.

Μια βάση του χώρου των 2×2 άνω τριγωνικών πινάκων είναι η

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και άρα μπορούμε να απεικονίσουμε κάθε άνω τριγωνικό πίνακα 2×2 σε ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^3$ ως

Πιο ενδιαφέρον παράδειγμα.

Μια βάση του χώρου των 2×2 άνω τριγωνικών πινάκων είναι η

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και άρα μπορούμε να απεικονίσουμε κάθε άνω τριγωνικό πίνακα 2×2 σε ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^3$ ως

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Πιο ενδιαφέρον παράδειγμα.

Μια βάση του χώρου των 2×2 άνω τριγωνικών πινάκων είναι η

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και άρα μπορούμε να απεικονίσουμε κάθε άνω τριγωνικό πίνακα 2×2 σε ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^3$ ως

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Τι μας λέει το δεξιά μέλος; Πόσο πρέπει να πάρουμε κάθε στοιχείο της βάσης σε ένα γραμμικό συνδυασμό για να φτιάξουμε τον αντίστοιχο 2×2 πίνακα.

Συμπέρασμα και χρήση.

Με το που επιλέξουμε μια βάση σε ένα διανυσματικό χώρο V τότε αυτό μας επιτρέπει να βάλουμε ‘συντεταγμένες’ στον V,

Συμπέρασμα και χρήση.

Με το που επιλέξουμε μια βάση σε ένα διανυσματικό χώρο V τότε αυτό μας επιτρέπει να βάλουμε ‘συντεταγμένες’ στον V, όπου για $x \in V$ η i-οστή συντεταγμένη εκφράζει πόσο χρησιμοποιούμε το i-οστό στοιχείο της βάσης για να πάραξουμε το x.

Συμπέρασμα και χρήση.

Με το που επιλέξουμε μια βάση σε ένα διανυσματικό χώρο V τότε αυτό μας επιτρέπει να βάλουμε 'συντεταγμένες' στον V, όπου για $x \in V$ η i-οστή συντεταγμένη εκφράζει πόσο χρησιμοποιούμε το i-οστό στοιχείο της βάσης για να πάραξουμε το x.

Με άλλα λόγια, υπάρχει ένας **ισομορφισμός** μεταξύ του V και του $\mathbb{R}^{\dim V}$.

Συμπέρασμα και χρήση.

Με το που επιλέξουμε μια βάση σε ένα διανυσματικό χώρο V τότε αυτό μας επιτρέπει να βάλουμε ‘συντεταγμένες’ στον V, όπου για $x \in V$ η i-οστή συντεταγμένη εκφράζει πόσο χρησιμοποιούμε το i-οστό στοιχείο της βάσης για να πάραξουμε το x.
Με άλλα λόγια, υπάρχει ένας **ισομορφισμός** μεταξύ του V και του $\mathbb{R}^{\dim V}$.

Ισομορφισμός μεταξύ διανυσματικών χώρων λέμε μια *γραμμική* απεικόνιση T η οποία είναι $1-1$ και επί.

Πίσω στα πολυώνυμα.

Επιλέγοντας τη βάση

$$\mathcal{E} := \{1, t, t^2\}$$

για τον διανυσματικό χώρο βαθμού 2 μπορούμε να απεικονίσουμε κάθε πολυώνυμο $p \in V$ ως εξής:

Πίσω στα πολυώνυμα.

Επιλέγοντας τη βάση

$$\mathcal{E} := \{1, t, t^2\}$$

για τον διανυσματικό χώρο βαθμού 2 μπορούμε να απεικονίσουμε κάθε πολυώνυμο $p \in V$ ως εξής:

$$p(t) = a + bt + ct^2 \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = [p]_{\mathcal{E}}$$

Πίσω στα πολυώνυμα.

Επιλέγοντας τη βάση

$$\mathcal{E} := \{1, t, t^2\}$$

για τον διανυσματικό χώρο βαθμού 2 μπορούμε να απεικονίσουμε κάθε πολυώνυμο $p \in V$ ως εξής:

$$p(t) = a + bt + ct^2 \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = [p]_{\mathcal{E}}$$

Αν θέλαμε να γράψουμε το p στην βάση

$$\mathcal{B} = \left\{(t-2)(t-3), (t-1)(t-3), (t-1)(t-2)\right\},$$

τι θα κάναμε;

Ο κανόνας.

Αρκεί να γράψουμε κάθε στοιχείο στο $\mathcal{E}$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του $\mathcal{B}$.

Ο κανόνας.

Αρκεί να γράψουμε κάθε στοιχείο στο $\mathcal{E}$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του $\mathcal{B}$.

Έχουμε

- $(t-2)(t-3) = 6 - 5t + t^2$
- $(t-1)(t-3) = 3 - 4t + t^2$
- $(t-1)(t-2) = 2 - 3t + t^2$

Ο κανόνας.

Αρκεί να γράψουμε κάθε στοιχείο στο $\mathcal{E}$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του $\mathcal{B}$.
Έχουμε

- $(t-2)(t-3) = 6 - 5t + t^2$
- $(t-1)(t-3) = 3 - 4t + t^2$
- $(t-1)(t-2) = 2 - 3t + t^2$

και, εφόσον κάθε βάση του V αντιστοιχεί σε μια απεικονίση στον $\mathbb{R}^3$,

Ο κανόνας.

Αρκεί να γράψουμε κάθε στοιχείο στο $\mathcal{E}$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του $\mathcal{B}$.
Έχουμε

- $(t-2)(t-3) = 6 - 5t + t^2$
- $(t-1)(t-3) = 3 - 4t + t^2$
- $(t-1)(t-2) = 2 - 3t + t^2$

και, εφόσον κάθε βάση του V αντιστοιχεί σε μια απεικονίση στον $\mathbb{R}^3$, τότε από τον τύπο αλλαγής βάσης που έχω ήδη δείξει παίρνω

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} [p]_{\mathcal{E}} =$$

Ο κανόνας.

Αρκεί να γράψουμε κάθε στοιχείο στο $\mathcal{E}$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του $\mathcal{B}$.
Έχουμε

- $(t-2)(t-3) = 6 - 5t + t^2$
- $(t-1)(t-3) = 3 - 4t + t^2$
- $(t-1)(t-2) = 2 - 3t + t^2$

και, εφόσον κάθε βάση του V αντιστοιχεί σε μια απεικονίση στον $\mathbb{R}^3$, τότε από τον τύπο αλλαγής βάσης που έχω ήδη δείξει παίρνω

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} [p]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

αν $p(t) = a + bt + t^2$.

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση.

Η παρατήρηση ότι μπορούμε να δούμε έναν διανυσματικό χώρο σαν διανύσματα στον $\mathbb{R}^{\dim V}$ (με το που διαλέξουμε μια βάση) μπορεί να είναι πολυ βοηθητική.

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση.

Η παρατήρηση ότι μπορούμε να δούμε έναν διανυσματικό χώρο σαν διανύσματα στον $\mathbb{R}^{\dim V}$ (με το που διαλέξουμε μια βάση) μπορεί να είναι πολυ βοηθητική.

Έστω ο υποχώρος $W := \{A \in \mathbb{R}^{5\times 5} : \mathrm{tr}(A) = 0\}$.

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση.

Η παρατήρηση ότι μπορούμε να δούμε έναν διανυσματικό χώρο σαν διανύσματα στον $\mathbb{R}^{\dim V}$ (με το που διαλέξουμε μια βάση) μπορεί να είναι πολυ βοηθητική.

Έστω ο υποχώρος $W := \{A \in \mathbb{R}^{5\times 5} : \mathrm{tr}(A) = 0\}$. Έστω ο υποχώρος $W' = \{A \in \mathbb{R}^{5\times 5} : a_{15} + a_{41} + a_{23} + a_{33} + a_{44} = 0\}$.

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση.

Η παρατήρηση ότι μπορούμε να δούμε έναν διανυσματικό χώρο σαν διανύσματα στον $\mathbb{R}^{\dim V}$ (με το που διαλέξουμε μια βάση) μπορεί να είναι πολυ βοηθητική.

Έστω ο υποχώρος $W := \{A \in \mathbb{R}^{5\times 5} : \mathrm{tr}(A) = 0\}$. Έστω ο υποχώρος $W' = \{A \in \mathbb{R}^{5\times 5} : a_{15} + a_{41} + a_{23} + a_{33} + a_{44} = 0\}$.
Ποιες είναι οι διαστάσεις των W, W' ;

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση.

Η παρατήρηση ότι μπορούμε να δούμε έναν διανυσματικό χώρο σαν διανύσματα στον $\mathbb{R}^{\dim V}$ (με το που διαλέξουμε μια βάση) μπορεί να είναι πολυ βοηθητική.

Έστω ο υποχώρος $W := \{A \in \mathbb{R}^{5\times 5} : \mathrm{tr}(A) = 0\}$. Έστω ο υποχώρος $W' = \{A \in \mathbb{R}^{5\times 5} : a_{15} + a_{41} + a_{23} + a_{33} + a_{44} = 0\}$.
Ποιες είναι οι διαστάσεις των W, W' ;

Μπορύμε να απεικονίσουμε κάθε $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ σε ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^{25}$ με τον τρόπο που κάναμε και πριν.

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση.

Η παρατήρηση ότι μπορούμε να δούμε έναν διανυσματικό χώρο σαν διανύσματα στον $\mathbb{R}^{\dim V}$ (με το που διαλέξουμε μια βάση) μπορεί να είναι πολυ βοηθητική.

Έστω ο υποχώρος $W := \{A \in \mathbb{R}^{5\times 5} : \mathrm{tr}(A) = 0\}$. Έστω ο υποχώρος $W' = \{A \in \mathbb{R}^{5\times 5} : a_{15} + a_{41} + a_{23} + a_{33} + a_{44} = 0\}$.
Ποιες είναι οι διαστάσεις των W, W' ;

Μπορύμε να απεικονίσουμε κάθε $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ σε ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^{25}$ με τον τρόπο που κάναμε και πριν. Η σχέση $\mathrm{tr}(A) = 0$ μεταφράζεται σε μια γραμμική σχέση για τον x.

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση.

Η παρατήρηση ότι μπορούμε να δούμε έναν διανυσματικό χώρο σαν διανύσματα στον $\mathbb{R}^{\dim V}$ (με το που διαλέξουμε μια βάση) μπορεί να είναι πολυ βοηθητική.

Έστω ο υποχώρος $W := \{A \in \mathbb{R}^{5\times 5} : \mathrm{tr}(A) = 0\}$. Έστω ο υποχώρος $W' = \{A \in \mathbb{R}^{5\times 5} : a_{15} + a_{41} + a_{23} + a_{33} + a_{44} = 0\}$.
Ποιες είναι οι διαστάσεις των W, W' ;

Μπορύμε να απεικονίσουμε κάθε $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ σε ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^{25}$ με τον τρόπο που κάναμε και πριν. Η σχέση $\mathrm{tr}(A) = 0$ μεταφράζεται σε μια γραμμική σχέση για τον x. Με άλλα λόγια θέλουμε να βρούμε όλα τα x τα οποία ικανοποιούν μια συγκεκριμένη γραμμική σχέση.

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση.

Η παρατήρηση ότι μπορούμε να δούμε έναν διανυσματικό χώρο σαν διανύσματα στον $\mathbb{R}^{\dim V}$ (με το που διαλέξουμε μια βάση) μπορεί να είναι πολυ βοηθητική.

Έστω ο υποχώρος $W := \{A \in \mathbb{R}^{5\times 5} : \mathrm{tr}(A) = 0\}$. Έστω ο υποχώρος $W' = \{A \in \mathbb{R}^{5\times 5} : a_{15} + a_{41} + a_{23} + a_{33} + a_{44} = 0\}$.
Ποιες είναι οι διαστάσεις των W, W' ;

Μπορούμε να απεικονίσουμε κάθε $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ σε ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^{25}$ με τον τρόπο που κάναμε και πριν. Η σχέση $\mathrm{tr}(A) = 0$ μεταφράζεται σε μια γραμμική σχέση για τον x. Με άλλα λόγια θέλουμε να βρούμε όλα τα x τα οποία ικανοποιούν μια συγκεκριμένη γραμμική σχέση. Τι μας θυμίζει αυτό;

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση.

Η παρατήρηση ότι μπορούμε να δούμε έναν διανυσματικό χώρο σαν διανύσματα στον $\mathbb{R}^{\dim V}$ (με το που διαλέξουμε μια βάση) μπορεί να είναι πολυ βοηθητική.

Έστω ο υποχώρος $W := \{A \in \mathbb{R}^{5\times 5} : \operatorname{tr}(A) = 0\}$. Έστω ο υποχώρος $W' = \{A \in \mathbb{R}^{5\times 5} : a_{15} + a_{41} + a_{23} + a_{33} + a_{44} = 0\}$.
Ποιες είναι οι διαστάσεις των W, W' ;

Μπορύμε να απεικονίσουμε κάθε $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ σε ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^{25}$ με τον τρόπο που κάναμε και πριν. Η σχέση $\operatorname{tr}(A) = 0$ μεταφράζεται σε μια γραμμική σχέση για τον x. Με άλλα λόγια θέλουμε να βρούμε όλα τα x τα οποία ικανοποιούν μια συγκεκριμένη γραμμική σχέση. Τι μας θυμίζει αυτό; Μα ακριβώς το μηδενοχώρο ενός συστήματος με μία εξίσωση.

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση.

Η παρατήρηση ότι μπορούμε να δούμε έναν διανυσματικό χώρο σαν διανύσματα στον $\mathbb{R}^{\dim V}$ (με το που διαλέξουμε μια βάση) μπορεί να είναι πολυ βοηθητική.

Έστω ο υποχώρος $W := \{A \in \mathbb{R}^{5\times 5} : \mathrm{tr}(A) = 0\}$. Έστω ο υποχώρος $W' = \{A \in \mathbb{R}^{5\times 5} : a_{15} + a_{41} + a_{23} + a_{33} + a_{44} = 0\}$.
Ποιες είναι οι διαστάσεις των W, W' ;

Μπορύμε να απεικονίσουμε κάθε $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ σε ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^{25}$ με τον τρόπο που κάναμε και πριν. Η σχέση $\mathrm{tr}(A) = 0$ μεταφράζεται σε μια γραμμική σχέση για τον x. Με άλλα λόγια θέλουμε να βρούμε όλα τα x τα οποία ικανοποιούν μια συγκεκριμένη γραμμική σχέση. Τι μας θυμίζει αυτό; Μα ακριβώς το μηδενοχώρο ενός συστήματος με μία εξίσωση. Τι διάσταση έχει αυτός;

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση.

Η παρατήρηση ότι μπορούμε να δούμε έναν διανυσματικό χώρο σαν διανύσματα στον $\mathbb{R}^{\dim V}$ (με το που διαλέξουμε μια βάση) μπορεί να είναι πολυ βοηθητική.

Έστω ο υποχώρος $W := \{A \in \mathbb{R}^{5\times 5} : \mathrm{tr}(A) = 0\}$. Έστω ο υποχώρος $W' = \{A \in \mathbb{R}^{5\times 5} : a_{15} + a_{41} + a_{23} + a_{33} + a_{44} = 0\}$.
Ποιες είναι οι διαστάσεις των W, W' ;

Μπορύμε να απεικονίσουμε κάθε $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ σε ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^{25}$ με τον τρόπο που κάναμε και πριν. Η σχέση $\mathrm{tr}(A) = 0$ μεταφράζεται σε μια γραμμική σχέση για τον x. Με άλλα λόγια θέλουμε να βρούμε όλα τα x τα οποία ικανοποιούν μια συγκεκριμένη γραμμική σχέση. Τι μας θυμίζει αυτό; Μα ακριβώς το μηδενοχώρο ενός συστήματος με μία εξίσωση. Τι διάσταση έχει αυτός; Όσες και οι ελεύθερες μεταβλητές του, δηλαδή $25 - 1 = 24$ (το -1 διότι έχω **μία** εξίσωση).

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση.

Η παρατήρηση ότι μπορούμε να δούμε έναν διανυσματικό χώρο σαν διανύσματα στον $\mathbb{R}^{\dim V}$ (με το που διαλέξουμε μια βάση) μπορεί να είναι πολυ βοηθητική.

Έστω ο υποχώρος $W := \{A \in \mathbb{R}^{5\times 5} : \mathrm{tr}(A) = 0\}$. Έστω ο υποχώρος $W' = \{A \in \mathbb{R}^{5\times 5} : a_{15} + a_{41} + a_{23} + a_{33} + a_{44} = 0\}$.
Ποιες είναι οι διαστάσεις των W, W' ;

Μπορύμε να απεικονίσουμε κάθε $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ σε ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^{25}$ με τον τρόπο που κάναμε και πριν. Η σχέση $\mathrm{tr}(A) = 0$ μεταφράζεται σε μια γραμμική σχέση για τον x. Με άλλα λόγια θέλουμε να βρούμε όλα τα x τα οποία ικανοποιούν μια συγκεκριμένη γραμμική σχέση. Τι μας θυμίζει αυτό; Μα ακριβώς το μηδενοχώρο ενός συστήματος με μία εξίσωση. Τι διάσταση έχει αυτός; Όσες και οι ελεύθερες μεταβλητές του, δηλαδή $25 - 1 = 24$ (το -1 διότι έχω **μία** εξίσωση). Έτσι $\dim W = \dim W' = 5^2 - 1 = 24$.

Τι μάθαμε και τι πρέπει να ξέρουμε.

- Τύπος αλλαγής βάσης.
- Ότι η βάση σε έναν χώρο V μας επιτρέπει να δούμε τον V σαν ένα σύστημα συντεταγμένων.

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!