Γραμμική Άλγεβρα
Δεύτερη Διαλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Προηγούμενο Μάθημα: Υπενθύμιση και ανακεφαλαίωση

Σκοπός μας είναι να λύσουμε γραμμικά συστήματα. Γενική Στρατηγική:

1. Δημιουργούμε τον *επαυξημένο* πίνακα του συστήματος.

Προηγούμενο Μάθημα: Υπενθύμιση και ανακεφαλαίωση

Σκοπός μας είναι να λύσουμε γραμμικά συστήματα. Γενική Στρατηγική:

1. Δημιουργούμε τον *επαυξημένο* πίνακα του συστήματος.
2. Με γραμμοπράξεις φέρνουμε τον πίνακα σε μία *επιθυμητή* μορφή, η οποία είναι είτε **κλιμακωτή** είτε **ανηγμένη κλιμακωτή μορφή**.

Προηγούμενο Μάθημα: Υπενθύμιση και ανακεφαλαίωση

Σκοπός μας είναι να λύσουμε γραμμικά συστήματα. Γενική Στρατηγική:

1. Δημιουργούμε τον *επαυξημένο* πίνακα του συστήματος.
2. Με γραμμοπράξεις φέρνουμε τον πίνακα σε μία *επιθυμητή* μορφή, η οποία είναι είτε **κλιμακωτή** είτε **ανηγμένη κλιμακωτή μορφή**.
3. Επιλύουμε το γραμμικό σύστημα, σαρώνοντας τις μεταβλητές από τα δεξιά στα αριστερά.

- Γραμμικό Σύστημα $\Leftrightarrow$ Επαυξημένος Πίνακας.

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x-y \qquad = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Γραμμικό Σύστημα $\Leftrightarrow$ Επαυξημένος Πίνακας.

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x-y \qquad =1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Οι γραμμοπράξεις μάς πηγαίνουν από έναν επαυξημένο πίνακα (γραμμικό σύστημα) σε έναν άλλο <u>*ισοδύναμο*</u> επαυξημένο πίνακα (γραμμικό σύστημα),

- Γραμμικό Σύστημα $\Leftrightarrow$ Επαυξημένος Πίνακας.

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x-y \qquad =1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Οι γραμμοπράξεις μάς πηγαίνουν από έναν επαυξημένο πίνακα (γραμμικό σύστημα) σε έναν άλλο *ισοδύναμο* επαυξημένο πίνακα (γραμμικό σύστημα), εώς ότου καταλήξουμε σε ένα γραμμικό σύστημα το οποίο είναι *εύκολα* επιλύσιμο.

- Γραμμικό Σύστημα $\Leftrightarrow$ Επαυξημένος Πίνακας.

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x-y \qquad =1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Οι γραμμοπράξεις μάς πηγαίνουν από έναν επαυξημένο πίνακα (γραμμικό σύστημα) σε έναν άλλο *ισοδύναμο* επαυξημένο πίνακα (γραμμικό σύστημα), εώς ότου καταλήξουμε σε ένα γραμμικό σύστημα το οποίο είναι *εύκολα* επιλύσιμο.

  Στην περίπτωσή μας, *εύκολα επιλύσιμο* θα σημαίνει κλιμακωτή ή ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

Ανηγμένη κλιμακωτή μορφή πίνακα

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 5 \end{array}\right]$$

Ανηγμένη κλιμακωτή μορφή πίνακα

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 5 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \underline{1} & 0 & \mathbf{5} & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \underline{1} & \mathbf{2} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 1 \end{array}\right]$$

⋆ Μόνο τα στοιχεία πάνω από έναν οδηγό πρέπει να είναι 0 για να είμαστε στην ανηγμένη κλιμακωτή.

Κλιμακωτή αλλά όχι ανηγμένη κλιμακωτή.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \mathbf{5} & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή ;

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 11 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή ;

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 11 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Όχι, διότι δεν δημιουργείται σκάλα!

Είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή ;

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 11 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Όχι, διότι δεν δημιουργείται σκάλα!
Θα γίνει ανηγμένη κλιμακωτή βάζοντας την γραμμή με τα μηδενικά στο τέλος (ή πετώντας τη).

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Βασικό Θεώρημα Γραμμοϊσοδυναμίας.

Θεώρημα

Κάθε πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν και μόνο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

Βασικό Θεώρημα Γραμμοϊσοδυναμίας.

Θεώρημα

Κάθε πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν και μόνο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

Πως τον βρίσκουμε;

Υπενθύμιση εννοιών.

⋆ Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής αποκαλείται οδηγός.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 8 & 8 \\ 0 & 3 & 7 & 5/2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Αλγόριθμος (ή απαλοιφή) Gauss

Ο αλγόριθμος Gauss φέρνει έναν επαυξημένο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

Αλγόριθμος (ή απαλοιφή) Gauss

Ο αλγόριθμος Gauss φέρνει έναν επαυξημένο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

Το επιτυγχάνει αυτό δημιουργώντας σταδιακά μια <u>σκάλα</u> χρησιμοποιώντας μια γραμμή του πίνακα κάθε φορά για να **μηδενίσει** τους όρους κάτω από αυτη.

Αλγόριθμος (ή απαλοιφή) Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

Αλγόριθμος (ή απαλοιφή) Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

⊙ *Βήμα 1:* Ανταλλάσουμε γραμμές έτσι ώστε η γραμμή με τον αριστερότερο οδηγό να είναι πρώτη.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

Συνέχεια

⊙ *Βήμα 2:* Με γραμμοπράξεις κάνουμε όλα τα στοιχεία κάτω από τον οδηγό ίσα με 0.

Συνέχεια

⊙ *Βήμα 2:* Με γραμμοπράξεις κάνουμε όλα τα στοιχεία κάτω από τον οδηγό ίσα με 0.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

Δηλαδή, αφαιρούμε τρεις φορές την πρώτη γραμμή από την από κάτω της:

Συνέχεια

⊙ *Βήμα 2:* Με γραμμοπράξεις κάνουμε όλα τα στοιχεία κάτω από τον οδηγό ίσα με 0.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

Δηλαδή, αφαιρούμε τρεις φορές την πρώτη γραμμή από την από κάτω της:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

⊙ *Βήμα 3:* Αγνοοούμε την γραμμή στην οποία δημιουργήσαμε οδηγό (και όσες είναι πάνω από αυτή) και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

⊙ *Βήμα 3:* Αγνοοούμε την γραμμή στην οποία δημιουργήσαμε οδηγό (και όσες είναι πάνω από αυτή) και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

⊙ *Βήμα 3:* Αγνοοούμε την γραμμή στην οποία δημιουργήσαμε οδηγό (και όσες είναι πάνω από αυτή) και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

Αφότου αγνοήσουμε την πρώτη γραμμή, αφαιρούμε την δεύτερη από την τρίτη γραμμή.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

⊙ *Βήμα 3:* Αγνοοούμε την γραμμή στην οποία δημιουργήσαμε οδηγό (και όσες είναι πάνω από αυτή) και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

Αφότου αγνοήσουμε την πρώτη γραμμή, αφαιρούμε την δεύτερη από την τρίτη γραμμή.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Αδύνατο σύστημα!

Συνέχεια απαλοιφής Gauss.

Στο προηγούμενο παράδειγμα φέραμε τον πίνακα σε κλιμακωτή μορφή αλλά *δεν χρειάστηκε* να τον φέρουμε σε ανηγμένη κλιμακωτή,

Συνέχεια απαλοιφής Gauss.

Στο προηγούμενο παράδειγμα φέραμε τον πίνακα σε κλιμακωτή μορφή αλλά *δεν χρειάστηκε* να τον φέρουμε σε ανηγμένη κλιμακωτή, διότι η τελευταία γραμμή αντιστοιχούσε σε *αδύνατη* εξίσωση, οπότε σταματήσαμε εκεί.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Συνέχεια απαλοιφής Gauss.

Στο προηγούμενο παράδειγμα φέραμε τον πίνακα σε κλιμακωτή μορφή αλλά *δεν χρειάστηκε* να τον φέρουμε σε ανηγμένη κλιμακωτή, διότι η τελευταία γραμμή αντιστοιχούσε σε *αδύνατη* εξίσωση, οπότε σταματήσαμε εκεί.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Οπότε ας συνεχίσουμε με ένα άλλο παράδειγμα για να δούμε πως τον φέρουμε σε ανηγμένη κλιμακωτή.

Άλλο Παράδειγμα.

Ο παρακάτω πίνακας είναι ήδη σε κλιμακωτή μορφή και μένει να τον φέρνουμε σε ανηγμένη κλιμακωτή.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & \underline{6} & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & \underline{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Άλλο Παράδειγμα.

Ο παρακάτω πίνακας είναι ήδη σε κλιμακωτή μορφή και μένει να τον φέρνουμε σε ανηγμένη κλιμακωτή.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & \underline{6} & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & \underline{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

⊙ *Βήμα 4:* Αρχίζοντας από το δεξιότερο στοιχείο-οδηγό, πηγαίνοντας αντίστροφα δημιουργούμε 0 πάνω από κάθε οδηγό.

Άλλο Παράδειγμα.

Ο παρακάτω πίνακας είναι ήδη σε κλιμακωτή μορφή και μένει να τον φέρνουμε σε ανηγμένη κλιμακωτή.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \color{red}{3} & -9 & 12 & -9 & \underline{6} & 15 \\ 0 & \color{red}{2} & -4 & 4 & \underline{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & 4 \end{array}\right]$$

⊙ *Βήμα 4:* Αρχίζοντας από το δεξιότερο στοιχείο-οδηγό, πηγαίνοντας αντίστροφα δημιουργούμε 0 πάνω από κάθε οδηγό.
Θα χρησιμοποιήσουμε τον οδηγό της τελευταία γραμμής για να μηδενίσουμε τα υπογραμμισμένα στοιχεία.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \color{red}{3} & -9 & 12 & -9 & 0 & -19 \\ 0 & \color{red}{2} & -4 & 4 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & 4 \end{array}\right]$$

Κλιμακωτή σε Ανηγμένη Κλιμακωτή.

Αφαιρούμε την τρίτη γραμμή 2 φορές από την δεύτερη και 6 φορές από την πρώτη για να κάνουμε τα υπογραμμισμένα στοιχεία ίσα με μηδέν.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \color{red}{3} & -9 & 12 & -9 & \underline{6} & 15 \\ 0 & \color{red}{2} & -4 & 4 & \underline{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} \color{red}{3} & -9 & 12 & -9 & 0 & -19 \\ 0 & \color{red}{2} & -4 & 4 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & 4 \end{array}\right]$$

Κλιμακωτή σε Ανηγμένη Κλιμακωτή.

Αφαιρούμε την τρίτη γραμμή 2 φορές από την δεύτερη και 6 φορές από την πρώτη για να κάνουμε τα υπογραμμισμένα στοιχεία ίσα με μηδέν.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & \underline{6} & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & \underline{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -19 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 \end{array}\right]$$

Διαιρούμε τη δεύτερη γραμμή με 2 έτσι ώστε ο οδηγός να γίνει 1.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -19 \\ 0 & \mathbf{2} & -4 & 4 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -19 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Συνέχεια παραδείγματος.

Προσθέτουμε 9 φορές τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη έτσι ώστε το -9 πάνω από τον οδηγό 1 να γίνει 0. Μετά διαιρούμε και με 3 την πρώτη γραμμή.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & \underline{-9} & 12 & -9 & 0 & -19 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & \frac{44}{3} \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Φτάσαμε σε ανηγμένη κλιμακωτή!

Συνέχεια παραδείγματος.

Προσθέτουμε 9 φορές τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη έτσι ώστε το -9 πάνω από τον οδηγό 1 να γίνει 0. Μετά διαιρούμε και με 3 την πρώτη γραμμή.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & \underline{-9} & 12 & -9 & 0 & -19 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & \frac{44}{3} \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Φτάσαμε σε ανηγμένη κλιμακωτή!

1. Οι οδηγοί σχηματίζουν σκάλα. ✓

Συνέχεια παραδείγματος.

Προσθέτουμε 9 φορές τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη έτσι ώστε το -9 πάνω από τον οδηγό 1 να γίνει 0. Μετά διαιρούμε και με 3 την πρώτη γραμμή.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & \underline{-9} & 12 & -9 & 0 & -19 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & \frac{44}{3} \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Φτάσαμε σε ανηγμένη κλιμακωτή!

1. Οι οδηγοί σχηματίζουν σκάλα. ✓
2. Κάθε οδηγός ισούται με 1. ✓

Συνέχεια παραδείγματος.

Προσθέτουμε 9 φορές τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη έτσι ώστε το -9 πάνω από τον οδηγό 1 να γίνει 0. Μετά διαιρούμε και με 3 την πρώτη γραμμή.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & \underline{-9} & 12 & -9 & 0 & -19 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & \frac{44}{3} \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Φτάσαμε σε ανηγμένη κλιμακωτή!

1. Οι οδηγοί σχηματίζουν σκάλα. ✓
2. Κάθε οδηγός ισούται με 1. ✓
3. Κάθε στοιχείο στήλη με οδηγό έχει 0 οπουδήποτε αλλού εκτος από τον οδηγό. ✓

Απαλοιφή (Αλγόριθμος) Gauss: Σύνοψη

⋆ Προετοιμασία για γραμμοπράξεις.

Απαλοιφή (Αλγόριθμος) Gauss: Σύνοψη

⋆ Προετοιμασία για γραμμοπράξεις.

⊙ *Βήμα 1:* Εξασφαλίζουμε ο αριστερότερος οδηγός βρίσκεται στην πρώτη γραμμή (με αλλαγή γραμμών).

Απαλοιφή (Αλγόριθμος) Gauss: Σύνοψη

⋆ Προετοιμασία για γραμμοπράξεις.

⊙ *Βήμα 1:* Εξασφαλίζουμε ο αριστερότερος οδηγός βρίσκεται στην πρώτη γραμμή (με αλλαγή γραμμών).

⋆ Γραμμοπράξεις και επανάληψη.

Απαλοιφή (Αλγόριθμος) Gauss: Σύνοψη

⋆ Προετοιμασία για γραμμοπράξεις.

⊙ *Βήμα 1:* Εξασφαλίζουμε ο αριστερότερος οδηγός βρίσκεται στην πρώτη γραμμή (με αλλαγή γραμμών).

⋆ Γραμμοπράξεις και επανάληψη.

⊙ *Βήμα 3:* Με γραμμοπράξεις κάνουμε όλα τα στοιχεία κάτω από τον οδηγό 0.

Απαλοιφή (Αλγόριθμος) Gauss: Σύνοψη

⋆ Προετοιμασία για γραμμοπράξεις.

⊙ *Βήμα 1:* Εξασφαλίζουμε ο αριστερότερος οδηγός βρίσκεται στην πρώτη γραμμή (με αλλαγή γραμμών).

⋆ Γραμμοπράξεις και επανάληψη.

⊙ *Βήμα 3:* Με γραμμοπράξεις κάνουμε όλα τα στοιχεία κάτω από τον οδηγό 0.

⊙ *Βήμα 4:* Αγνοοούμε την γραμμή στην οποία δημιουργήσαμε οδηγό (και όσες είναι πάνω από αυτή) και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

Απαλοιφή (Αλγόριθμος) Gauss: Σύνοψη

⋆ Προετοιμασία για γραμμοπράξεις.

⊙ *Βήμα 1:* Εξασφαλίζουμε ο αριστερότερος οδηγός βρίσκεται στην πρώτη γραμμή (με αλλαγή γραμμών).

⋆ Γραμμοπράξεις και επανάληψη.

⊙ *Βήμα 3:* Με γραμμοπράξεις κάνουμε όλα τα στοιχεία κάτω από τον οδηγό 0.

⊙ *Βήμα 4:* Αγνοοούμε την γραμμή στην οποία δημιουργήσαμε οδηγό (και όσες είναι πάνω από αυτή) και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

⋆ Κλιμακωτός $\Rightarrow$ Ανηγμένος Κλιμακωτός

Απαλοιφή (Αλγόριθμος) Gauss: Σύνοψη

⋆ Προετοιμασία για γραμμοπράξεις.

⊙ *Βήμα 1:* Εξασφαλίζουμε ο αριστερότερος οδηγός βρίσκεται στην πρώτη γραμμή (με αλλαγή γραμμών).

⋆ Γραμμοπράξεις και επανάληψη.

⊙ *Βήμα 3:* Με γραμμοπράξεις κάνουμε όλα τα στοιχεία κάτω από τον οδηγό 0.

⊙ *Βήμα 4:* Αγνοοούμε την γραμμή στην οποία δημιουργήσαμε οδηγό (και όσες είναι πάνω από αυτή) και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

⋆ Κλιμακωτός ⇒ Ανηγμένος Κλιμακωτός

⊙ *Βήμα 5:* Αρχίζοντας από το πιο δεξιό στοιχείο-οδηγό, πηγαίνοντας αντίστροφα δημιουργούμε 0 πάνω από κάθε οδηγό (προσθέτοντας στην αντίστοιχη γραμμή το κατάλληλο πολλαπλάσιο της γραμμής στην οποία ανήκει ο οδηγός).

Παρατηρήσεις.

Ο αλγόριθμος έτρεξε σε δύο στάδια.

- Γενική μορφή $\Rightarrow$ κλιμακωτή μορφή: αλλάζουμε τη σειρά των γραμμών και προσθέτουμε κάποιο κατάλληλο πολλαπλάσιο της γραμμής σε γραμμές που είναι <u>αποκλειστικά από κάτω</u>.

Παρατηρήσεις.

Ο αλγόριθμος έτρεξε σε δύο στάδια.

- Γενική μορφή $\Rightarrow$ κλιμακωτή μορφή: αλλάζουμε τη σειρά των γραμμών και προσθέτουμε κάποιο κατάλληλο πολλαπλάσιο της γραμμής σε γραμμές που είναι <u>αποκλειστικά από κάτω</u>.
- Κλιμακωτή $\Rightarrow$ ανηγμένη κλιμακωτή μορφή: προσθέτουμε κάποιο πολλαπλάσιο της εκάστοτε γραμμής σε γραμμές που είναι <u>αποκλειστικά από πάνω</u>.

Κώδικας για Γενική μορφή ⇒ Κλιμακωτή Μορφή

```
h := 1 /* Initialization of the pivot row */
k := 1 /* Initialization of the pivot column */

while h ≤ m and k ≤ n
    /* Find the k-th pivot: */
    i_max := argmax (i = h ... m, abs(A[i, k]))
    if A[i_max, k] = 0
        /* No pivot in this column, pass to next column */
        k := k + 1
    else
        swap rows(h, i_max)
        /* Do for all rows below pivot: */
        for i = h + 1 ... m:
            f := A[i, k] / A[h, k]
            /* Fill with zeros the lower part of pivot column: */
            A[i, k] := 0
            /* Do for all remaining elements in current row: */
            for j = k + 1 ... n:
                A[i, j] := A[i, j] - A[h, j] * f
        /* Increase pivot row and column */
        h := h + 1
        k := k + 1
```

Γεωμετρική Ερμηνεία του αλγορίθμου Gauss.

Ας το δούμε στο επίπεδο για αρχή.

Γεωμετρική Ερμηνεία του αλγορίθμου Gauss.

Ας το δούμε στο επίπεδο για αρχή.

Έχω το σύστημα που αντιστοιχεί σε δύο ευθείς E_1, E_2.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 4y = 15 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 15 \end{array}\right]$$

Γεωμετρική Ερμηνεία του αλγορίθμου Gauss.

Ας το δούμε στο επίπεδο για αρχή.

Έχω το σύστημα που αντιστοιχεί σε δύο ευθείς E_1, E_2.

$$\begin{cases} x + \ \ y = 1 \\ 2x + 4y = 15 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 15 \end{array}\right]$$

Αφαιρώντας από την δεύτερη δύο φορές την πρώτη και παίρνω το σύστημα

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 13 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x + \ \ y = 1 \\ \quad\ \ 2y = 13 \end{cases}$$

Γεωμετρική Ερμηνεία του αλγορίθμου Gauss.

Ας το δούμε στο επίπεδο για αρχή.

Έχω το σύστημα που αντιστοιχεί σε δύο ευθείς E_1, E_2.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 4y = 15 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 15 \end{array}\right]$$

Αφαιρώντας από την δεύτερη δύο φορές την πρώτη και παίρνω το σύστημα

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 13 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 2y = 13 \end{cases}$$

Αυτό που έγινε είναι ότι στρίψαμε την ευθεία E_2 γύρω από το κοινό της σημείο με την E_1,

Γεωμετρική Ερμηνεία του αλγορίθμου Gauss.

Ας το δούμε στο επίπεδο για αρχή.

Έχω το σύστημα που αντιστοιχεί σε δύο ευθείς E_1, E_2.

$$\begin{cases} x + \ \ y = 1 \\ 2x + 4y = 15 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 15 \end{array}\right]$$

Αφαιρώντας από την δεύτερη δύο φορές την πρώτη και παίρνω το σύστημα

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 13 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x + \ \ y = 1 \\ \qquad 2y = 13 \end{cases}$$

Αυτό που έγινε είναι ότι στρίψαμε την ευθεία E_2 γύρω από το κοινό της σημείο με την E_1, εώς ότου το E_1 να γίνει μια ευθεία η οποία είναι *παράλληλη* στον άξονα των x, και συγκεκριμένα η $2y = 13$.

Γεωμετρική Ερμηνεία του αλγορίθμου Gauss.

Ας το δούμε στο επίπεδο για αρχή.

Έχω το σύστημα που αντιστοιχεί σε δύο ευθείς E_1, E_2.

$$\begin{cases} x + \ \ y = 1 \\ 2x + 4y = 15 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 15 \end{array}\right]$$

Αφαιρώντας από την δεύτερη δύο φορές την πρώτη και παίρνω το σύστημα

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 13 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x + \ \ y = 1 \\ \qquad 2y = 13 \end{cases}$$

Αυτό που έγινε είναι ότι στρίψαμε την ευθεία E_2 γύρω από το κοινό της σημείο με την E_1, εώς ότου το E_1 να γίνει μια ευθεία η οποία είναι *παράλληλη* στον άξονα των x, και συγκεκριμένα η $2y = 13$.

$\star$ Με στροφή της E_2 γύρω από το σημείο τομής της με την E_1 παίρνω δύο άλλες ευθείες, που προφανώς έχουν το **ίδιο σημείο τομής με πριν**!

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 15 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5.5 \\ 0 & 1 & 6.5 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 15 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5.5 \\ 0 & 1 & 6.5 \end{array}\right]$$

Άρα ο αλγόριθμος Gauss έστριψε τις αρχικές ευθείες
$x + y = 1, 2x + 4y = 15$ γύρω από το **σημείο τομής τους**,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 15 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5.5 \\ 0 & 1 & 6.5 \end{array}\right]$$

Άρα ο αλγόριθμος Gauss έστριψε τις αρχικές ευθείες $x + y = 1, 2x + 4y = 15$ γύρω από το **σημείο τομής τους**, έτσι ώστε

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 15 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5.5 \\ 0 & 1 & 6.5 \end{array}\right]$$

Άρα ο αλγόριθμος Gauss έστριψε τις αρχικές ευθείες $x + y = 1, 2x + 4y = 15$ γύρω από το **σημείο τομής τους**, έτσι ώστε να γίνουν οι ευθείες $x = -5.5, y = 6.5$ οι οποίες

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 15\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -5.5\\ 0 & 1 & 6.5\end{array}\right]$$

Άρα ο αλγόριθμος Gauss έστριψε τις αρχικές ευθείες $x + y = 1, 2x + 4y = 15$ γύρω από το **σημείο τομής τους**, έτσι ώστε να γίνουν οι ευθείες $x = -5.5, y = 6.5$ οι οποίες

- είναι **κάθετες** μεταξύ τους και
- παράλληλες στους άξονες των ψ και x αντίστοιχα.

Γεωμετρική Ερμηνεία στο χώρο.

Κάθε φορά που αφαιρώ από μία εξίσωση (επίπεδο Π_1) ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης εξίσωσης (επίπεδου Π_2),

Γεωμετρική Ερμηνεία στο χώρο.

Κάθε φορά που αφαιρώ από μία εξίσωση (επίπεδο Π_1) ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης εξίσωσης (επίπεδου Π_2),στρίβω το Π_1 ως προς την ευθεία που αποτελεί την τομή των Π_1, Π_2.

Γεωμετρική Ερμηνεία στο χώρο.

Κάθε φορά που αφαιρώ από μία εξίσωση (επίπεδο Π_1) ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης εξίσωσης (επίπεδου Π_2), στρίβω το Π_1 ως προς την ευθεία που αποτελεί την τομή των Π_1, Π_2.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 8z = 15 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Έχουμε δύο επίπεδα, $\Pi_1 : 2x + 2y + 8z = 15, \Pi_2 : x + y + z = 1.$

Κάθε φορά που αφαιρώ από μία εξίσωση (επίπεδο Π_1) ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης εξίσωσης (επίπεδου Π_2),στρίβω το Π_1 ως προς την ευθεία που αποτελεί την τομή των Π_1, Π_2.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 8z = 15 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Έχουμε δύο επίπεδα, $\Pi_1 : 2x + 2y + 8z = 15, \Pi_2 : x + y + z = 1.$

$\star$ Αν αφαιρέσουμε από την δεύτερη εξίσωση δύο φορές την πρώτη παίρνουμε

$$\begin{cases} \phantom{x + {}} y + 6z = 13 \\ x + y + z = 1 \end{cases},$$

Γεωμετρική Ερμηνεία στο χώρο.

Κάθε φορά που αφαιρώ από μία εξίσωση (επίπεδο Π_1) ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης εξίσωσης (επίπεδου Π_2),στρίβω το Π_1 ως προς την ευθεία που αποτελεί την τομή των Π_1, Π_2.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 8z = 15 \\ \ \ x + \ \ y + \ \ z = 1 \end{cases}$$

Έχουμε δύο επίπεδα, $\Pi_1 : 2x + 2y + 8z = 15, \Pi_2 : x + y + z = 1$.

$\star$ Αν αφαιρέσουμε από την δεύτερη εξίσωση δύο φορές την πρώτη παίρνουμε

$$\begin{cases} \quad\ \ y + 6z = 13 \\ x + y + \ \ z = 1 \end{cases},$$

το οποίο αντιστοιχεί στην στροφή του Π_1 γύρω από την ευθεία που αποτελεί την τομή των Π_1, Π_2,

Γεωμετρική Ερμηνεία στο χώρο.

Κάθε φορά που αφαιρώ από μία εξίσωση (επίπεδο Π_1) ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης εξίσωσης (επίπεδου Π_2),στρίβω το Π_1 ως προς την ευθεία που αποτελεί την τομή των Π_1, Π_2.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 8z = 15 \\ \;\; x + \;\; y + \;\; z = 1 \end{cases}$$

Έχουμε δύο επίπεδα, $\Pi_1 : 2x + 2y + 8z = 15, \Pi_2 : x + y + z = 1$.

⋆ Αν αφαιρέσουμε από την δεύτερη εξίσωση δύο φορές την πρώτη παίρνουμε

$$\begin{cases} \qquad y + 6z = 13 \\ x + y + \;\; z = 1 \end{cases},$$

το οποίο αντιστοιχεί στην στροφή του Π_1 γύρω από την ευθεία που αποτελεί την τομή των Π_1, Π_2, τόσο ώστε το Π_1 να γίνει *παράλληλο* στον άξονα των x.

Γεωμετρική Ερμηνεία στο χώρο.

Κάθε φορά που αφαιρώ από μία εξίσωση (επίπεδο Π_1) ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης εξίσωσης (επίπεδου Π_2),στρίβω το Π_1 ως προς την ευθεία που αποτελεί την τομή των Π_1, Π_2.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 8z = 15 \\ \;\; x + \;\; y + \;\; z = 1 \end{cases}$$

Έχουμε δύο επίπεδα, $\Pi_1 : 2x + 2y + 8z = 15, \Pi_2 : x + y + z = 1.$

$\star$ Αν αφαιρέσουμε από την δεύτερη εξίσωση δύο φορές την πρώτη παίρνουμε

$$\begin{cases} \qquad y + 6z = 13 \\ x + y + \;\; z = 1 \end{cases},$$

το οποίο αντιστοιχεί στην στροφή του Π_1 γύρω από την ευθεία που αποτελεί την τομή των Π_1, Π_2, τόσο ώστε το Π_1 να γίνει *παράλληλο* στον άξονα των x.

Γεωμετρική Ερμηνεία Συνέχεια.

$\star$ Ευθεία τομής των $\Pi_1, \Pi_2 =$ Λύση του Συστήματος.

Γεωμετρική Ερμηνείας Συνέχεια.

⋆ Ευθεία τομής των $\Pi_1, \Pi_2 =$ Λύση του Συστήματος.
Εγώ θέλω να βρω αυτή την ευθεία (την τομή των Π_1, Π_2).

Γεωμετρική Ερμηνείας Συνέχεια.

⋆ Ευθεία τομής των $\Pi_1, \Pi_2 =$ Λύση του Συστήματος.
Εγώ θέλω να βρω αυτή την ευθεία (την τομή των Π_1, Π_2).
$\rightarrow$ Η εν λόγω στροφή αλλάζει ποια είναι τα
επίπεδα αλλά όχι ποια είναι η ευθεία (δηλαδή οι λύσεις του συστήματος)!

Γεωμετρική Ερμηνείας Συνέχεια.

⋆ Ευθεία τομής των Π_1, Π_2 = Λύση του Συστήματος.
Εγώ θέλω να βρω αυτή την ευθεία (την τομή των Π_1, Π_2).
→ Η εν λόγω στροφή αλλάζει ποια είναι τα
επίπεδα αλλά όχι ποια είναι η ευθεία (δηλαδή οι λύσεις του συστήματος)!

⋆ Ο αλγόριθμος Gauss στην προκειμένη περίπτωση ουσιαστικά εκφράζει την ευθεία ως τομή δύο άλλων επιπέδων Π'_1, Π'_2 τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους.

Γεωμετρικής Ερμηνείας Συνέχεια.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Γεωμετρικής Ερμηνείας Συνέχεια.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Ο παραπάνω επαυξημένος πίνακας αντιστοιχεί στην τομή των 3 επιπέδων $x = 4, y = 5, z = 1,$

Γεωμετρικής Ερμηνείας Συνέχεια.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Ο παραπάνω επαυξημένος πίνακας αντιστοιχεί στην τομή των 3 επιπέδων $x = 4, y = 5, z = 1$,τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους!

Γεωμετρικής Ερμηνείας Συνέχεια.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Ο παραπάνω επαυξημένος πίνακας αντιστοιχεί στην τομή των 3 επιπέδων $x = 4, y = 5, z = 1$,τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους!Άρα μέσω στροφών ο αλγόριθμος Gauss προσπαθεί να αντικαταστήσει τα αρχικά επίπεδα με άλλα επίπεδα τα οποία:

Γεωμετρικής Ερμηνείας Συνέχεια.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Ο παραπάνω επαυξημένος πίνακας αντιστοιχεί στην τομή των 3 επιπέδων $x = 4, y = 5, z = 1$,τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους!Άρα μέσω στροφών ο αλγόριθμος Gauss προσπαθεί να αντικαταστήσει τα αρχικά επίπεδα με άλλα επίπεδα τα οποία:

1. Τέμνονται στα ίδια σημεία με τα αρχικά.

Γεωμετρικής Ερμηνείας Συνέχεια.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Ο παραπάνω επαυξημένος πίνακας αντιστοιχεί στην τομή των 3 επιπέδων $x = 4, y = 5, z = 1$,τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους!Άρα μέσω στροφών ο αλγόριθμος Gauss προσπαθεί να αντικαταστήσει τα αρχικά επίπεδα με άλλα επίπεδα τα οποία:

1. Τέμνονται στα ίδια σημεία με τα αρχικά.
2. Είναι κάθετα μεταξύ τους και παράλληλα στους άξονες (όταν το σύστημα έχει ακριβώς μία λύση).

Απαλοιφή Gauss

Ένας *αλγόριθμος* ο οποίος παίρνει σαν είσοδο έναν πίνακα και βρίσκει την **ανηγμένη κλιμακωτή μορφή** του.

Άμεση περιγραφή των λύσεων ενός συστήματος!

Απαλοιφή Gauss

Ένας *αλγόριθμος* ο οποίος παίρνει σαν είσοδο έναν πίνακα και βρίσκει την **ανηγμένη κλιμακωτή μορφή** του.

Άμεση περιγραφή των λύσεων ενός συστήματος!

Γεωμετρική ματιά.
Ξεκινάμε από μία συλλογή υπερεπιπέδων και φτάνουμε σε μια άλλη σύλλογη κάθετων μεταξύ τους υπερεπιπέδων η οποία τέμνεται στα ακριβώς τα ίδια σημεία με την αρχική.

Υπενθύμιση και κάποια ανακεφαλαίωση.

- Δύο συστήματα είναι ισοδύναμα όταν έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.

Υπενθύμιση και κάποια ανακεφαλαίωση.

- Δύο συστήματα είναι ισοδύναμα όταν έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.
- Δύο συστήματα είναι ισοδύναμα όταν έχουν την ίδια ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

Υπενθύμιση και κάποια ανακεφαλαίωση.

- Δύο συστήματα είναι ισοδύναμα όταν έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.
- Δύο συστήματα είναι ισοδύναμα όταν έχουν την ίδια ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.
- Μπορούμε να μεταβούμε από ένα σύστημα (επαυξημένο πίνακα) στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή μέσω γραμμοπράξεων.

Στοιχειώδεις γραμμοπράξεις: Υπενθύμιση

- Αντικατάσταση μιας γραμμής με το άθροισμα του εαυτού της και το πολλαπλάσιο μιας άλλης.
- Ανταλλαγή δύο γραμμών μεταξύ τους.
- Πολλαπλασιασμός μιας γραμμής με μη μηδενική σταθερά.

Γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες: Ο ένας μετασχηματίζεται στον άλλο μέσω γραμμοπράξεων.

Εξαγωγή συμπερασμάτων μέσω ανηγμένου κλιμακωτού.

Απαλοιφή Gauss: Άμεση περιγραφή λύσεων ενός συστήματος.

Εξαγωγή συμπερασμάτων μέσω ανηγμένου κλιμακωτού.

Απαλοιφή Gauss: Άμεση περιγραφή λύσεων ενός συστήματος.

Υπενθύμιση: Κάθε στήλη στον επαυξημένο πίνακα αντιστοιχεί σε μία μεταβλητή.

Εξαγωγή συμπερασμάτων μέσω ανηγμένου κλιμακωτού.

Απαλοιφή Gauss: Άμεση περιγραφή λύσεων ενός συστήματος.

Υπενθύμιση: Κάθε στήλη στον επαυξημένο πίνακα αντιστοιχεί σε μία μεταβλητή.

Βασικές μεταβλητή: Μεταβλητές που αντιστοιχούν σε στήλες με οδηγό.

Ελεύθερες μεταβλητές : Μη-μηδενικές στήλες χωρίς οδηγό.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 12 & -9 & 0 & -19 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Ένα ακόμη παράδειγμα.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Η πρώτη, δεύτερη και πέμπτη στήλη έχουν οδηγό, άρα οι αντίστοιχες μεταβλητές είναι βασικές.
Η τρίτη και τέταρτη στήλη δεν έχουν οδηγό, άρα οι αντίστοιχες μεταβλητές είναι ελεύθερες.

Βασικές: x_1, x_2, x_5, ελεύθερες: x_3, x_4.

Ο πρώτος μας στόχος.

Όπως έχουμε πει, ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει

- **Καμία** λύση
- **Ακριβώς** μία λύση (συμβατό)
- **Άπειρες λύσεις** (υπερ-ορισμένο)

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή για να βρούμε σε ποια περιπτώση ανήκουμε;

Επίλυση μέσω ανηγμένης κλιμακωτής μορφής

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Όλες οι μεταβλητές είναι βασικές!

$$x_1 = 3, x_2 = -7, x_3 = 4$$

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!