Γραμμική Άλγεβρα

Δέκατη Ένατη Διαλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Διαγωνιοποίηση και ιδιοτιμές.

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι διαγωνιοποιήσιμος όταν υπάρχει αντιστρέψιμος $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $A = P\Lambda P^{-1}$ όπου Λ ο πίνακας που έχει τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο και οπουδήποτε αλλού μηδέν.

Διαγωνιοποίηση και ιδιοτιμές.

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι διαγωνιοποιήσιμος όταν υπάρχει αντιστρέψιμος $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $A = P\Lambda P^{-1}$ όπου Λ ο πίνακας που έχει τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο και οπουδήποτε αλλού μηδέν.

$\star$ Αλγεβρική Πολλαπλότητα της λ: πολλαπλότητα στην εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$.

Διαγωνιοποίηση και ιδιοτιμές.

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι διαγωνιοποιήσιμος όταν υπάρχει αντιστρέψιμος $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ώστε $A = P \Lambda P^{-1}$ όπου Λ ο πίνακας που έχει τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο και οπουδήποτε αλλού μηδέν.

⋆ Αλγεβρική Πολλαπλότητα της λ: πολλαπλότητα στην εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$.

⋆ Γεωμετρική Πολλαπλότητα της λ: διάσταση του χώρου $\mathrm{Null}(A - \lambda I)$.

Διαγωνιοποίηση και ιδιοτιμές.

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι διαγωνιοποιήσιμος όταν υπάρχει αντιστρέψιμος $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $A = P\Lambda P^{-1}$ όπου Λ ο πίνακας που έχει τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο και οπουδήποτε αλλού μηδέν.

⋆ Αλγεβρική Πολλαπλότητα της λ: πολλαπλότητα στην εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$.

⋆ Γεωμετρική Πολλαπλότητα της λ: διάσταση του χώρου $\mathrm{Null}(A - \lambda I)$.

Θεώρημα

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο υπάρχουν ιδιοδιανύσματα του τα οποία σχηματίζουν μια βάση του $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα

Ένας πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν οι αλγεβρικές και γεωμετρικές πολλαπλότητες κάθε ιδιοτιμής είναι ίσες.

Διαγωνιοποίηση και ιδιοτιμές.

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι διαγωνιοποιήσιμος όταν υπάρχει αντιστρέψιμος $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $A = P\Lambda P^{-1}$ όπου Λ ο πίνακας που έχει τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο και οπουδήποτε αλλού μηδέν.

⋆ Αλγεβρική Πολλαπλότητα της λ: πολλαπλότητα στην εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$.

⋆ Γεωμετρική Πολλαπλότητα της λ: διάσταση του χώρου $\mathrm{Null}(A - \lambda I)$.

Θεώρημα

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο υπάρχουν ιδιοδιανύσματα του τα οποία σχηματίζουν μια βάση του $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα

Ένας πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν οι αλγεβρικές και γεωμετρικές πολλαπλότητες κάθε ιδιοτιμής είναι ίσες.

Άλλη μια οπτική στις ιδιοτιμές.

Αν ένα πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος τότε υπάρχουν n ιδιοδιανύσματά $v_1, v_2, \ldots, v_n$ του A τα οποία αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$.

Άλλη μια οπτική στις ιδιοτιμές.

Αν ένα πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος τότε υπάρχουν n ιδιοδιανύσματά $v_1, v_2, \ldots, v_n$ του A τα οποία αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$.

Άρα για ένα διάνυσμα $x = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$ θα ισχύει

$$Ax =$$

Άλλη μια οπτική στις ιδιοτιμές.

Αν ένα πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος τότε υπάρχουν n ιδιοδιανύσματά $v_1, v_2, \ldots, v_n$ του A τα οποία αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$.

Άρα για ένα διάνυσμα $x = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$ θα ισχύει

$$Ax = c_1(Av_1) + \ldots + c_n(Av_n) =$$

Άλλη μια οπτική στις ιδιοτιμές.

Αν ένα πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος τότε υπάρχουν n ιδιοδιανύσματά $v_1, v_2, \ldots, v_n$ του A τα οποία αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$.

Άρα για ένα διάνυσμα $x = c_1v_1 + \ldots + c_nv_n$ θα ισχύει

$$Ax = c_1(Av_1) + \ldots + c_n(Av_n) = c_1\lambda_1v_1 + \ldots + c_2\lambda v_n.$$

Άλλη μια οπτική στις ιδιοτιμές.

Αν ένα πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος τότε υπάρχουν n ιδιοδιανύσματά $v_1, v_2, \ldots, v_n$ του A τα οποία αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$.

Άρα για ένα διάνυσμα $x = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$ θα ισχύει

$$Ax = c_1(Av_1) + \ldots + c_n(Av_n) = c_1\lambda_1 v_1 + \ldots + c_2\lambda v_n.$$

Επί της ουσίας, κάνουμε **αλλαγή βάσης** στον $\mathbb{R}^n$, επιλέγοντας τη βάση $v_1, v_2, \ldots, v_n$ αντί της $e_1, \ldots, e_n$:

Άλλη μια οπτική στις ιδιοτιμές.

Αν ένα πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος τότε υπάρχουν n ιδιοδιανύσματά $v_1, v_2, \ldots, v_n$ του A τα οποία αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$.

Άρα για ένα διάνυσμα $x = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$ θα ισχύει

$$Ax = c_1(Av_1) + \ldots + c_n(Av_n) = c_1\lambda_1 v_1 + \ldots + c_2 \lambda v_n.$$

Επί της ουσίας, κάνουμε **αλλαγή βάσης** στον $\mathbb{R}^n$, επιλέγοντας τη βάση $v_1, v_2, \ldots, v_n$ αντί της $e_1, \ldots, e_n$: αυτή η αλλαγή βάσης δουλεύει καλά με τον A,

Άλλη μια οπτική στις ιδιοτιμές.

Αν ένα πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος τότε υπάρχουν n ιδιοδιανύσματά $v_1, v_2, \ldots, v_n$ του A τα οποία αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$.

Άρα για ένα διάνυσμα $x = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$ θα ισχύει

$$Ax = c_1(Av_1) + \ldots + c_n(Av_n) = c_1\lambda_1 v_1 + \ldots + c_2\lambda v_n.$$

Επί της ουσίας, κάνουμε **αλλαγή βάσης** στον $\mathbb{R}^n$, επιλέγοντας τη βάση $v_1, v_2, \ldots, v_n$ αντί της $e_1, \ldots, e_n$: αυτή η αλλαγή βάσης δουλεύει καλά με τον A, διότι έχει τα διανύσματα τα οποία δεν αλλάζουν διεύθυνση μετά τον γραμμικό μετασχηματισμό.

Αν ένα πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος τότε υπάρχουν n ιδιοδιανύσματά $v_1, v_2, \ldots, v_n$ του A τα οποία αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$.

Άρα για ένα διάνυσμα $x = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$ θα ισχύει

$$Ax = c_1(Av_1) + \ldots + c_n(Av_n) = c_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + c_2 \lambda v_n.$$

Επί της ουσίας, κάνουμε **αλλαγή βάσης** στον $\mathbb{R}^n$, επιλέγοντας τη βάση $v_1, v_2, \ldots, v_n$ αντί της $e_1, \ldots, e_n$: αυτή η αλλαγή βάσης δουλεύει καλά με τον A, διότι έχει τα διανύσματα τα οποία δεν αλλάζουν διεύθυνση μετά τον γραμμικό μετασχηματισμό.

Τα ιδιοδιανύσματα απλοποιούν τους γραμμικούς μετασχηματισμούς.

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Για $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ το *χαρακτηριστικό* του πολυώνυμο είναι το $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$.

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Για $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ το *χαρακτηριστικό* του πολυώνυμο είναι το $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$. Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$.

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Για $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ το *χαρακτηριστικό* του πολυώνυμο είναι το $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$. Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$.

Θεώρημα

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι βαθμού n.

Θεώρημα Caley-Hamilton.

Θεώρημα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *με χαρακτηριστικό πολυώνυμο* $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$. *Τότε έχουμε ότι* $p(A) = 0$, *δηλαδή*

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0.$$

Θεώρημα Caley-Hamilton.

Θεώρημα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *με χαρακτηριστικό πολυώνυμο* $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$. *Τότε έχουμε ότι* $p(A) = 0$, *δηλαδή*

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0.$$

Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

Θεώρημα Caley-Hamilton.

Θεώρημα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *με χαρακτηριστικό πολυώνυμο* $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$. *Τότε έχουμε ότι* $p(A) = 0$, *δηλαδή*

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0.$$

Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, p(\lambda) = det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

Θεώρημα Caley-Hamilton.

Θεώρημα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *με χαρακτηριστικό πολυώνυμο* $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$. *Τότε έχουμε ότι* $p(A) = 0$, *δηλαδή*

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0.$$

Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, p(\lambda) = det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

και άρα $A^2 - 5A - 2I = 0$.

Θεώρημα Caley-Hamilton.

Θεώρημα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *με χαρακτηριστικό πολυώνυμο* $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$. *Τότε έχουμε ότι* $p(A) = 0$, *δηλαδή*

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0.$$

Θεώρημα Caley-Hamilton.

Θεώρημα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *με χαρακτηριστικό πολυώνυμο* $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$. *Τότε έχουμε ότι* $p(A) = 0$, *δηλαδή*

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0.$$

Το θέωρημα Caley-Hamilton είναι απλό όταν ο A είναι διαγωνιοποιήσιμο.

Θεώρημα Caley-Hamilton.

Θεώρημα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$. Τότε έχουμε ότι $p(A) = 0$, δηλαδή

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0.$$

Το θέωρημα Caley-Hamilton είναι απλό όταν ο A είναι διαγωνιοποιήσιμο. Αυτό που μας λέει είναι ότι ισχύει ακόμη κι όταν δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Θεώρημα Caley-Hamilton.

Θεώρημα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *με χαρακτηριστικό πολυώνυμο* $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$. *Τότε έχουμε ότι* $p(A) = 0$, *δηλαδή*

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0.$$

Το θέωρημα Caley-Hamilton είναι απλό όταν ο A είναι διαγωνιοποιήσιμο. Αυτό που μας λέει είναι ότι ισχύει ακόμη κι όταν δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Απόδειξη για διαγωνιοποιησιμότητα:

$A = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i P\Lambda^i P^{-1} = 0$

Θεώρημα Caley-Hamilton.

Θεώρημα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *με χαρακτηριστικό πολυώνυμο* $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$. *Τότε έχουμε ότι* $p(A) = 0$, *δηλαδή*

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0.$$

Το θέωρημα Caley-Hamilton είναι απλό όταν ο A είναι διαγωνιοποιήσιμο. Αυτό που μας λέει είναι ότι ισχύει ακόμη κι όταν δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Απόδειξη για διαγωνιοποιησιμότητα:

$A = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i P\Lambda^i P^{-1} = 0$ είναι ισοδύναμο με $\sum_{i=0}^{n} a_i \Lambda^i = 0$

Θεώρημα Caley-Hamilton.

Θεώρημα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *με χαρακτηριστικό πολυώνυμο* $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$. *Τότε έχουμε ότι* $p(A) = 0$, *δηλαδή*

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0.$$

Το θέωρημα Caley-Hamilton είναι απλό όταν ο A είναι διαγωνιοποιήσιμο. Αυτό που μας λέει είναι ότι ισχύει ακόμη κι όταν δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Απόδειξη για διαγωνιοποιησιμότητα:

$A = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow \sum_{i=0}^n a_i P\Lambda^i P^{-1} = 0$ είναι ισοδύναμο με $\sum_{i=0}^n a_i \Lambda^i = 0$ και ισοδύναμο με $\sum_{i=0}^n a_i \lambda^i = 0$ για **κάθε** ιδιοτιμή του A.

Θεώρημα Caley-Hamilton.

Θεώρημα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *με χαρακτηριστικό πολυώνυμο* $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$. *Τότε έχουμε ότι* $p(A) = 0$, *δηλαδή*

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0.$$

Το θέωρημα Caley-Hamilton είναι απλό όταν ο A είναι διαγωνιοποιήσιμο. Αυτό που μας λέει είναι ότι ισχύει ακόμη κι όταν δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Απόδειξη για διαγωνιοποιησιμότητα:
$A = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i P\Lambda^i P^{-1} = 0$ είναι ισοδύναμο με $\sum_{i=0}^{n} a_i \Lambda^i = 0$ και ισοδύναμο με $\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i = 0$ για **κάθε** ιδιοτιμή του A. Άρα $p(\lambda) = 0$ δίνει $p(A) = 0$.

Επακόλουθα

⋆ Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ισχύει ότι

$$A^n \in \operatorname{span}\{I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\}.$$

Επακόλουθα

⋆ Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ισχύει ότι

$$A^n \in \operatorname{span}\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}.$$

Απόδειξη: Από Caley-Hamilton έχουμε $A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \ldots - a_1 A - I$.

Επακόλουθα

⋆ Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ισχύει ότι

$$A^n \in \mathrm{span}\{I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\}.$$

Απόδειξη: Από Caley-Hamilton έχουμε $A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \ldots - a_1 A - I$.

⋆ Αν A αντιστρέψιμος τότε

$$A^{-1} \in \mathrm{span}\{I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\}.$$

Επακόλουθα

⋆ Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ισχύει ότι

$$A^n \in \operatorname{span}\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}.$$

Απόδειξη: Από Caley-Hamilton έχουμε $A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \ldots - a_1 A - I.$

⋆ Αν A αντιστρέψιμος τότε

$$A^{-1} \in \operatorname{span}\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}.$$

Απόδειξη: Από Caley-Hamilton έχουμε $I = -A^n - a_{n-1}A^{n-1} - \ldots - a_1 A$

Επακόλουθα

⋆ Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ισχύει ότι

$$A^n \in \text{span}\{I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\}.$$

Απόδειξη: Από Caley-Hamilton έχουμε $A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \ldots - a_1 A - I$.

⋆ Αν A αντιστρέψιμος τότε

$$A^{-1} \in \text{span}\{I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\}.$$

Απόδειξη: Από Caley-Hamilton έχουμε $I = -A^n - a_{n-1}A^{n-1} - \ldots - a_1 A$ και άρα αν πολλαπλασιάσουμε με A^{-1} και τα δύο μέλη παίρνουμε $A^{-1} = -A^{n-1} - a_{n-1}A^{n-2} - \ldots - a_1$.

Επακόλουθα

Πόρισμα

Ένας πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *ικανοποιεί* $A^n = 0$ *αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι* 0.

Επακόλουθα

Πόρισμα

Ένας πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ικανοποιεί $A^n = 0$ αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι 0.

Απόδειξη του 'όλες οι ιδιοτιμές ίσες με $0 \Rightarrow A^n = 0$'. Έχουμε
$$p(\lambda) = (\lambda - \underbrace{\lambda_1}_{0}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \underbrace{\lambda_n}_{0}) = \lambda^n$$

Επακόλουθα

Πόρισμα

Ένας πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ικανοποιεί $A^n = 0$ αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι 0.

Απόδειξη του 'όλες οι ιδιοτιμές ίσες με $0 \Rightarrow A^n = 0$'. Έχουμε $p(\lambda) = (\lambda - \underbrace{\lambda_1}_{0}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \underbrace{\lambda_n}_{0}) = \lambda^n$και άρα από Caley-Hamilton παίρνουμε $p(\lambda) = A^n = 0$.

Πόρισμα

Ένας πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ικανοποιεί $A^n = 0$ αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι 0.

Απόδειξη του 'όλες οι ιδιοτιμές ίσες με $0 \Rightarrow A^n = 0$'. Έχουμε $p(\lambda) = (\lambda - \underbrace{\lambda_1}_{0}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \underbrace{\lambda_n}_{0}) = \lambda^n$και άρα από Caley-Hamilton παίρνουμε $p(\lambda) = A^n = 0$.

Απόδειξη του '$A^n = 0 \Rightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές ίσες με 0'.

Επακόλουθα

Πόρισμα

Ένας πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ικανοποιεί $A^n = 0$ αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι 0.

Απόδειξη του 'όλες οι ιδιοτιμές ίσες με $0 \Rightarrow A^n = 0$'. Έχουμε $p(\lambda) = (\lambda - \underbrace{\lambda_1}_{0}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \underbrace{\lambda_n}_{0}) = \lambda^n$και άρα από Caley-Hamilton παίρνουμε $p(\lambda) = A^n = 0$.

Απόδειξη του '$A^n = 0 \Rightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές ίσες με 0'. Οι ιδιοτιμές του A^n είναι οι ιδιοτιμές οι $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots$ και ούτω καθεξής.

Επακόλουθα

Πόρισμα

Ένας πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ικανοποιεί $A^n = 0$ αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι 0.

Απόδειξη του 'όλες οι ιδιοτιμές ίσες με $0 \Rightarrow A^n = 0$'. Έχουμε $p(\lambda) = (\lambda - \underbrace{\lambda_1}_{0}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \underbrace{\lambda_n}_{0}) = \lambda^n$και άρα από Caley-Hamilton παίρνουμε $p(\lambda) = A^n = 0$.

Απόδειξη του '$A^n = 0 \Rightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές ίσες με 0'. Οι ιδιοτιμές του A^n είναι οι ιδιοτιμές οι $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots$ και ούτω καθεξής. Όμως ο A^n είναι ο μηδενικός πίνακας και έχει όλες τις ιδιοτιμές ίσες με 0,

Επακόλουθα

Πόρισμα

Ένας πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ικανοποιεί $A^n = 0$ αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι 0.

Απόδειξη του 'όλες οι ιδιοτιμές ίσες με $0 \Rightarrow A^n = 0$'. Έχουμε $p(\lambda) = (\lambda - \underbrace{\lambda_1}_{0}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \underbrace{\lambda_n}_{0}) = \lambda^n$ και άρα από Caley-Hamilton παίρνουμε $p(\lambda) = A^n = 0$.

Απόδειξη του '$A^n = 0 \Rightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές ίσες με 0'. Οι ιδιοτιμές του A^n είναι οι ιδιοτιμές οι $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots$ και ούτω καθεξής. Όμως ο A^n είναι ο μηδενικός πίνακας και έχει όλες τις ιδιοτιμές ίσες με 0, άρα $\lambda_i^n = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$.

Ελάχιστο πολυώνυμο.

Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ το *ελάχιστο πολυώνυμο* είναι το πολυώνυμο m με μεγαλύτερο συντελεστή 1 και **ελάχιστου βαθμού** ώστε $m(A) = 0$.

Ελάχιστο πολυώνυμο.

Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ το *ελάχιστο πολυώνυμο* είναι το πολυώνυμο m με μεγαλύτερο συντελεστή 1 και **ελάχιστου βαθμού** ώστε $m(A) = 0$. Προφανώς, ο βαθμός του m είναι το πολύ n λόγω Caley-Hamilton.

Ελάχιστο πολυώνυμο.

Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ το *ελάχιστο πολυώνυμο* είναι το πολυώνυμο m με μεγαλύτερο συντελεστή 1 και **ελάχιστου βαθμού** ώστε $m(A) = 0$. Προφανώς, ο βαθμός του m είναι το πολύ n λόγω Caley-Hamilton.

Θεώρημα

Το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι μοναδικό και διαιρεί κάθε πολυώνυμο p ώστε $p(A) = 0$.

Ελάχιστο πολυώνυμο.

Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ το *ελάχιστο πολυώνυμο* είναι το πολυώνυμο m με μεγαλύτερο συντελεστή 1 και **ελάχιστου βαθμού** ώστε $m(A) = 0$. Προφανώς, ο βαθμός του m είναι το πολύ n λόγω Caley-Hamilton.

Θεώρημα

Το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι μοναδικό και διαιρεί κάθε πολυώνυμο p ώστε $p(A) = 0$.

Απόδειξη: Κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων $p(\lambda) = q(\lambda) \cdot m(\lambda) + r(\lambda)$,

Ελάχιστο πολυώνυμο.

Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ το *ελάχιστο πολυώνυμο* είναι το πολυώνυμο m με μεγαλύτερο συντελεστή 1 και **ελάχιστου βαθμού** ώστε $m(A) = 0$. Προφανώς, ο βαθμός του m είναι το πολύ n λόγω Caley-Hamilton.

Θεώρημα

Το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι μοναδικό και διαιρεί κάθε πολυώνυμο p ώστε $p(A) = 0$.

Απόδειξη: Κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων $p(\lambda) = q(\lambda) \cdot m(\lambda) + r(\lambda)$, και άρα $p(A) = q(A) \cdot m(A) + r(A) \Rightarrow r(A) = 0$.

Ελάχιστο πολυώνυμο.

Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ το *ελάχιστο πολυώνυμο* είναι το πολυώνυμο m με μεγαλύτερο συντελεστή 1 και **ελάχιστου βαθμού** ώστε $m(A) = 0$. Προφανώς, ο βαθμός του m είναι το πολύ n λόγω Caley-Hamilton.

Θεώρημα

Το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι μοναδικό και διαιρεί κάθε πολυώνυμο p ώστε $p(A) = 0$.

Απόδειξη: Κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων $p(\lambda) = q(\lambda) \cdot m(\lambda) + r(\lambda)$, και άρα $p(A) = q(A) \cdot m(A) + r(A) \Rightarrow r(A) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το m διαιρεί το p.

Ελάχιστο πολυώνυμο.

Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ το *ελάχιστο πολυώνυμο* είναι το πολυώνυμο m με μεγαλύτερο συντελεστή 1 και **ελάχιστου βαθμού** ώστε $m(A) = 0$. Προφανώς, ο βαθμός του m είναι το πολύ n λόγω Caley-Hamilton.

Θεώρημα

Το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι μοναδικό και διαιρεί κάθε πολυώνυμο p ώστε $p(A) = 0$.

Απόδειξη: Κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων $p(\lambda) = q(\lambda)\cdot m(\lambda) + r(\lambda)$, και άρα $p(A) = q(A)\cdot m(A) + r(A) \Rightarrow r(A) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το m διαιρεί το p.

Θεώρημα

Ένας πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν το ελάχιστο του πολυώνυμο μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε διακριτά γραμμικά πολυώνυμα, δηλαδή $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_p)$, με διακριτά λ_i.

Παράδειγμα.

$\star$ Κάθε πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ που ικανοποιεί $A^2 - 3A + 2I = 0$ τότε είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Παράδειγμα.

⋆ Κάθε πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ που ικανοποιεί $A^2 - 3A + 2I = 0$ τότε είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Απόδειξη: Έστω το πολυώνυμο $g(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ το οποίο ικανοποιεί $g(A) = 0$ και άρα το ελάχιστο πολυώνυμο του A διαιρεί το g.

Παράδειγμα.

$\star$ Κάθε πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ που ικανοποιεί $A^2 - 3A + 2I = 0$ τότε είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Απόδειξη: Έστω το πολυώνυμο $g(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ το οποίο ικανοποιεί $g(A) = 0$ και άρα το ελάχιστο πολυώνυμο του A διαιρεί το g. Όμως $g(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$ και άρα το ελάχιστο πολυώνυμο του A θα παραγοντοποιείτε σίγουρα σε απλούς παράγοντες, δηλαδή

Παράδειγμα.

⋆ Κάθε πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ που ικανοποιεί $A^2 - 3A + 2I = 0$ τότε είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Απόδειξη: Έστω το πολυώνυμο $g(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ το οποίο ικανοποιεί $g(A) = 0$ και άρα το ελάχιστο πολυώνυμο του A διαιρεί το g. Όμως $g(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$ και άρα το ελάχιστο πολυώνυμο του A θα παραγοντοποιείτε σίγουρα σε απλούς παράγοντες, δηλαδή

$$m(\lambda) = (\lambda - 1) \;\text{ ή }\; m(\lambda) = (\lambda - 2) \;\text{ ή }\; m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Παράδειγμα.

⋆ Κάθε πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ που ικανοποιεί $A^2 - 3A + 2I = 0$ τότε είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Απόδειξη: Έστω το πολυώνυμο $g(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ το οποίο ικανοποιεί $g(A) = 0$ και άρα το ελάχιστο πολυώνυμο του A διαιρεί το g. Όμως $g(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$ και άρα το ελάχιστο πολυώνυμο του A θα παραγοντοποιείτε σίγουρα σε απλούς παράγοντες, δηλαδή

$$m(\lambda) = (\lambda - 1) \;\text{ ή }\; m(\lambda) = (\lambda - 2) \;\text{ ή }\; m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Άρα, από το προηγούμενο θεώρημα, ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος!

Παράδειγμα.

$\star$ Κάθε πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ που ικανοποιεί $A^2 - 3A + 2I = 0$ τότε είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Απόδειξη: Έστω το πολυώνυμο $g(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ το οποίο ικανοποιεί $g(A) = 0$ και άρα το ελάχιστο πολυώνυμο του A διαιρεί το g. Όμως $g(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$ και άρα το ελάχιστο πολυώνυμο του A θα παραγοντοποιείτε σίγουρα σε απλούς παράγοντες, δηλαδή

$$m(\lambda) = (\lambda - 1) \ \text{ή} \ m(\lambda) = (\lambda - 2) \ \text{ή} \ m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Άρα, από το προηγούμενο θεώρημα, ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος!

Συμμετρικοί Πίνακες και Διαγωνιοποίηση.

Όπως έχουμε πει, διακριτές ιδιοτιμές δίνουν διακριτά ιδιοδιανύσματα. Για συμμετρικούς πίνακες μπορούμε να πούμε κάτι παραπάνω:

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^n$ ένας συμμετρικός πίνακας, δηλαδή $A = A^T$. Αν u, v ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν σε διακριτές ιδιοτιμές, έχουμε $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

Θα χρησιμοποιήσουμε ότι για δύο διανύσματα $\langle u, v \rangle = u^T v$.
Έχουμε $Au = \lambda u, Av = \lambda' v$ και άρα

Συμμετρικοί Πίνακες και Διαγωνιοποίηση.

Όπως έχουμε πει, διακριτές ιδιοτιμές δίνουν διακριτά ιδιοδιανύσματα. Για συμμετρικούς πίνακες μπορούμε να πούμε κάτι παραπάνω:

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^n$ ένας συμμετρικός πίνακας, δηλαδή $A = A^T$. Αν u, v ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν σε διακριτές ιδιοτιμές, έχουμε $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

Θα χρησιμοποιήσουμε ότι για δύο διανύσματα $\langle u, v \rangle = u^T v$.
Έχουμε $Au = \lambda u, Av = \lambda' v$ και άρα

$$\lambda \langle u, v \rangle = \langle Au, v \rangle =$$

Συμμετρικοί Πίνακες και Διαγωνιοποίηση.

Όπως έχουμε πει, διακριτές ιδιοτιμές δίνουν διακριτά ιδιοδιανύσματα. Για συμμετρικούς πίνακες μπορούμε να πούμε κάτι παραπάνω:

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^n$ ένας συμμετρικός πίνακας, δηλαδή $A = A^T$. Αν u, v ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν σε διακριτές ιδιοτιμές, έχουμε $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

Θα χρησιμοποιήσουμε ότι για δύο διανύσματα $\langle u, v \rangle = u^T v$.
Έχουμε $Au = \lambda u, Av = \lambda' v$ και άρα

$$\lambda\langle u, v \rangle = \langle Au, v \rangle = (Au)^T v =$$

Συμμετρικοί Πίνακες και Διαγωνιοποίηση.

Όπως έχουμε πει, διακριτές ιδιοτιμές δίνουν διακριτά ιδιοδιανύσματα. Για συμμετρικούς πίνακες μπορούμε να πούμε κάτι παραπάνω:

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^n$ ένας συμμετρικός πίνακας, δηλαδή $A = A^T$. Αν u, v ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν σε διακριτές ιδιοτιμές, έχουμε $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

Θα χρησιμοποιήσουμε ότι για δύο διανύσματα $\langle u, v \rangle = u^T v$.
Έχουμε $Au = \lambda u, Av = \lambda' v$ και άρα

$$\lambda \langle u, v \rangle = \langle Au, v \rangle = (Au)^T v = u^T A^T v$$

Συμμετρικοί Πίνακες και Διαγωνιοποίηση.

Όπως έχουμε πει, διακριτές ιδιοτιμές δίνουν διακριτά ιδιοδιανύσματα. Για συμμετρικούς πίνακες μπορούμε να πούμε κάτι παραπάνω:

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^n$ ένας συμμετρικός πίνακας, δηλαδή $A = A^T$. Αν u, v ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν σε διακριτές ιδιοτιμές, έχουμε $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

Θα χρησιμοποιήσουμε ότι για δύο διανύσματα $\langle u, v \rangle = u^T v$.
Έχουμε $Au = \lambda u, Av = \lambda' v$ και άρα

$$\lambda \langle u, v \rangle = \langle Au, v \rangle = (Au)^T v = u^T A^T v$$

και άρα

$$u^T A^T v = u^T A v =$$

Συμμετρικοί Πίνακες και Διαγωνιοποίηση.

Όπως έχουμε πει, διακριτές ιδιοτιμές δίνουν διακριτά ιδιοδιανύσματα. Για συμμετρικούς πίνακες μπορούμε να πούμε κάτι παραπάνω:

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^n$ ένας συμμετρικός πίνακας, δηλαδή $A = A^T$. Αν u, v ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν σε διακριτές ιδιοτιμές, έχουμε $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

Θα χρησιμοποιήσουμε ότι για δύο διανύσματα $\langle u, v \rangle = u^T v$.
Έχουμε $Au = \lambda u, Av = \lambda' v$ και άρα

$$\lambda \langle u, v \rangle = \langle Au, v \rangle = (Au)^T v = u^T A^T v$$

και άρα

$$u^T A^T v = u^T A v = \langle u, Av \rangle = \lambda' \langle u, v \rangle,$$

Συμμετρικοί Πίνακες και Διαγωνιοποίηση.

Όπως έχουμε πει, διακριτές ιδιοτιμές δίνουν διακριτά ιδιοδιανύσματα. Για συμμετρικούς πίνακες μπορούμε να πούμε κάτι παραπάνω:

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^n$ ένας συμμετρικός πίνακας, δηλαδή $A = A^T$. Αν u, v ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν σε διακριτές ιδιοτιμές, έχουμε $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

Θα χρησιμοποιήσουμε ότι για δύο διανύσματα $\langle u, v \rangle = u^T v$.
Έχουμε $Au = \lambda u, Av = \lambda' v$ και άρα

$$\lambda \langle u, v \rangle = \langle Au, v \rangle = (Au)^T v = u^T A^T v$$

και άρα

$$u^T A^T v = u^T A v = \langle u, Av \rangle = \lambda' \langle u, v \rangle,$$

άρα $(\lambda - \lambda')\langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow \langle u, v \rangle = 0.$

Θεώρημα

Αν ο A είναι συμμετρικός πίνακας τότε είναι διαγωνιοποιήσιμος. Επιπρόσθετα, υπάρχει πίνακας P ώστε $PP^T = I$ και άρα $A = P\Lambda P^T$.

Διαγωνιοποίηση και συμμετρικοί πίνακες.

Θεώρημα

Αν ο A είναι συμμετρικός πίνακας τότε είναι διαγωνιοποιήσιμος.
Επιπρόσθετα, υπάρχει πίνακας P ώστε $PP^T = I$ και άρα $A = P\Lambda P^T$.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι για συμμετρικούς πίνακες γεωμετρική πολλαπλότητα $=$ αλγεβρική πολλαπλότητα.

Διαγωνιοποίηση και συμμετρικοί πίνακες.

Θεώρημα

Αν ο A είναι συμμετρικός πίνακας τότε είναι διαγωνιοποιήσιμος. Επιπρόσθετα, υπάρχει πίνακας P ώστε $PP^T = I$ και άρα $A = P\Lambda P^T$.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι για συμμετρικούς πίνακες γεωμετρική πολλαπλότητα $=$ αλγεβρική πολλαπλότητα. Αυτό μας λέει ότι μπορούμε να πάρουμε πάντα τον αντίστροφο του P ως P^T.

Να διαγωνιοποιηθεί ο **συμμετρικός** πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0- & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα.

Να διαγωνιοποιηθεί ο **συμμετρικός** πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0- & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Βρίσκουμε ιδιοτιμές $1, 2, 3$

Παράδειγμα.

Να διαγωνιοποιηθεί ο **συμμετρικός** πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0- & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Βρίσκουμε ιδιοτιμές $1, 2, 3$ και ιδιοχώρους

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

Παράδειγμα.

Να διαγωνιοποιηθεί ο **συμμετρικός** πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0- & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Βρίσκουμε ιδιοτιμές $1, 2, 3$ και ιδιοχώρους

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

και επιβεβαίωνουμε ότι $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_2, u_3 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = 0.$

Παράδειγμα.

Να διαγωνιοποιηθεί ο **συμμετρικός** πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0- & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Βρίσκουμε ιδιοτιμές $1, 2, 3$ και ιδιοχώρους

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

και επιβεβαίωνουμε ότι $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_2, u_3 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = 0$. Έχουμε $\langle u_1, u_1 \rangle = 3, \langle u_2, u_2 \rangle = 2, \langle u_3, u_3 \rangle = 6$ άρα πρέπει να **κανονικοποιήσουμε** τα u_1, u_2, u_3.

Συνέχεια παραδείγματος.

Έχουμε $\langle u_1, u_1 \rangle = 3, \langle u_2, u_2 \rangle = 2, \langle u_3, u_3 \rangle = 6$ άρα πρέπει να **κανονικοποιήσουμε** τα u_1, u_2, u_3.

Συνέχεια παραδείγματος.

Έχουμε $\langle u_1, u_1\rangle = 3, \langle u_2, u_2\rangle = 2, \langle u_3, u_3\rangle = 6$ άρα πρέπει να **κανονικοποιήσουμε** τα u_1, u_2, u_3.
Κάνουμε $u_1 := \frac{1}{\sqrt{3}}u_1, u_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}u_2, u_3 := \frac{1}{\sqrt{6}}u_3$, άρα πλέον μπορούμε να τα βάλουμε σαν στήλες του P τα u_1, u_2, u_3 και έχουμε

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}}_{P^T}$$

Τι μάθαμε και τι πρέπει να ξέρουμε.

- Θεώρημα Cayley-Hamilton.
- Ελάχιστο πολυώνυμο και διαγωνιοποίηση συμμετρικών πινάκων.

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!