Γραμμική Άλγεβρα

Δέκατη Έβδομη Διαλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ιδιοτιμες και ιδιοδιανύσματα.

Όπως είπαμε, αν για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχουν $Av = \lambda v$ για κάποια $\lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n$,

Ιδιοτιμες και ιδιοδιανύσματα.

Όπως είπαμε, αν για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχουν $Av = \lambda v$ για κάποια $\lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n$, τότε αποκαλούμε το λ ιδιοτιμή και το v ιδιοδιάνυσμα του A.

Ιδιοτιμες και ιδιοδιανύσματα.

Όπως είπαμε, αν για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ έχουν $Av = \lambda v$ για κάποια $\lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n$, τότε αποκαλούμε το λ ιδιοτιμή και το v ιδιοδιάνυσμα του A. Ισοδύναμα, το λ είναι ιδιοτιμή αν η εξίσωση $(A - \lambda I)v = 0$ έχει λύση πέρα από το μηδενικό διάνυσμα.

Ιδιοτιμες και ιδιοδιανύσματα.

Όπως είπαμε, αν για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχουν $Av = \lambda v$ για κάποια $\lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n$, τότε αποκαλούμε το λ ιδιοτιμή και το v ιδιοδιάνυσμα του A. Ισοδύναμα, το λ είναι ιδιοτιμή αν η εξίσωση $(A - \lambda I)v = 0$ έχει λύση πέρα από το μηδενικό διάνυσμα.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ιδιοτιμες και ιδιοδιανύσματα.

Όπως είπαμε, αν για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχουν $Av = \lambda v$ για κάποια $\lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n$, τότε αποκαλούμε το λ ιδιοτιμή και το v ιδιοδιάνυσμα του A. Ισοδύναμα, το λ είναι ιδιοτιμή αν η εξίσωση $(A - \lambda I)v = 0$ έχει λύση πέρα από το μηδενικό διάνυσμα.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 3, v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Η εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$.

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

Η εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0.$

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}$$

Η εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$.

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}$$

τότε

$$det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12} \cdot a_{21} =$$

Η εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$.

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}$$

τότε

$$det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12} \cdot a_{21} =$$

$$= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Όμως $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}$

Η εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$.

Έστω
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}$$
τότε
$$det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12} \cdot a_{21} =$$

$$= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Όμως $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}$ και ορίζοντας το ίχνος $tr(A) := a_{11} + a_{22}$ έχουμε ότι

Η εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$.

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}$$

τότε

$$det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12} \cdot a_{21} =$$

$$= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Όμως $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}$ και ορίζοντας το ίχνος $tr(A) := a_{11} + a_{22}$ έχουμε ότι

$$det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = 0.$$

Η εξίσωση $det(A-\lambda I)=0$.

Έστω

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, A-\lambda I=\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix}$$

τότε

$$det(A-\lambda I)=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}\cdot a_{21}=$$

$$=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$$

Όμως $det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{22}$ και ορίζοντας το ίχνος $tr(A):=a_{11}+a_{22}$ έχουμε ότι

$$det(A-\lambda I)=0\Rightarrow \lambda^2-tr(A)\lambda+det(A)=0.$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι $A^2-tr(A)A+det(A)I=0$.

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Ορίζουμε το $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ ως το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του A.

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Ορίζουμε το $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ ως το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του A. $p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda$ είναι ιδιοτιμή του A.

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Ορίζουμε το $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ ως το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του A. $p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda$ είναι ιδιοτιμή του A.

Θεώρημα

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda)$ *του* A *είναι βαθμού* n.

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Ορίζουμε το $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ ως το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του A. $p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda$ είναι ιδιοτιμή του A.

Θεώρημα

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda)$ του A είναι βαθμού n.

Απόδειξη: Για $n = 2$ το δείξαμε παραπάνω. Για μεγαλύτερο n με ανάπτυγμα ως προς την πρώτη γραμμή έχουμε

$$det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)det(A_{11} - \lambda I) - a_{12}det(A_{12}) + \dots$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Ορίζουμε το $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ ως το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του A. $p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda$ είναι ιδιοτιμή του A.

Θεώρημα

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda)$ του A είναι βαθμού n.

Απόδειξη: Για $n = 2$ το δείξαμε παραπάνω. Για μεγαλύτερο n με ανάπτυγμα ως προς την πρώτη γραμμή έχουμε

$$det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda) det(A_{11} - \lambda I) - a_{12} det(A_{12}) + \dots$$

Το $det(A_{11} - \lambda I)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $n - 1$, άρα το $(a_{11} - \lambda) det(A_{11} - \lambda I)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n.

Παράδειγμα.

Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -7 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα.

Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -7 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Έχουμε

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} 4-\lambda & -6 & -7 \\ 3 & 5-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} =$$

Παράδειγμα.

Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -7 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Έχουμε

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} 4-\lambda & -6 & -7 \\ 3 & 5-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$(3-\lambda)[(4-\lambda)(5-\lambda) - (-6)\cdot 3] =$$

Παράδειγμα.

Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -7 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Έχουμε

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} 4-\lambda & -6 & -7 \\ 3 & 5-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$(3-\lambda)[(4-\lambda)(5-\lambda) - (-6)\cdot 3] = (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda+1)$$

Παράδειγμα.

Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -7 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Έχουμε

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} 4-\lambda & -6 & -7 \\ 3 & 5-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$(3-\lambda)[(4-\lambda)(5-\lambda) - (-6)\cdot 3] = (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda+1)$$

Άρα οι ρίζες του p και ιδιοτιμές του A είναι οι $-1, 2, 3$.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

Έχουμε πει ότι βρίσκουμε τις ιδιοτιμές λ του A ως τις ρίζες του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου $p(\lambda) = det(A - \lambda)$.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

Έχουμε πει ότι βρίσκουμε τις ιδιοτιμές λ του A ως τις ρίζες του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου $p(\lambda) = det(A - \lambda)$.

⋆ Για κάθε ιδιοτιμή λ_i τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι ο μηδενοχώρος του $A - \lambda I$, δηλαδή το σύνολο $\{x : (A - \lambda I)x = 0\}$.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

Έχουμε πει ότι βρίσκουμε τις ιδιοτιμές λ του A ως τις ρίζες του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου $p(\lambda) = det(A - \lambda)$.

$\star$ Για κάθε ιδιοτιμή λ_i τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι ο μηδενοχώρος του $A - \lambda I$, δηλαδή το σύνολο $\{x : (A - \lambda I)x = 0\}$.

$\star$ $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow$ οι αντίστοιχοι μηδενοχώροι **δεν τέμνονται**,

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

Έχουμε πει ότι βρίσκουμε τις ιδιοτιμές λ του A ως τις ρίζες του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου $p(\lambda) = det(A - \lambda)$.

⋆ Για κάθε ιδιοτιμή λ_i τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι ο μηδενοχώρος του $A - \lambda I$, δηλαδή το σύνολο $\{x : (A - \lambda I)x = 0\}$.

⋆ $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow$ οι αντίστοιχοι μηδενοχώροι **δεν τέμνονται**, άρα οποιοδήποτε ιδιοδιάνυσμα για την λ_i είναι γραμμικώς ανεξάρτητο από οποιοαδήποτε ιδιοδιάνυσμα για την λ_j.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

Έχουμε πει ότι βρίσκουμε τις ιδιοτιμές λ του A ως τις ρίζες του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου $p(\lambda) = det(A - \lambda)$.

$\star$ Για κάθε ιδιοτιμή λ_i τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι ο μηδενοχώρος του $A - \lambda I$, δηλαδή το σύνολο $\{x : (A - \lambda I)x = 0\}$.

$\star$ $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow$ οι αντίστοιχοι μηδενοχώροι **δεν τέμνονται**, άρα οποιοδήποτε ιδιοδιάνυσμα για την λ_i είναι γραμμικώς ανεξάρτητο από οποιοαδήποτε ιδιοδιάνυσμα για την λ_j.

$\star$ Οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους:

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

Έχουμε πει ότι βρίσκουμε τις ιδιοτιμές λ του A ως τις ρίζες του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου $p(\lambda) = det(A - \lambda)$.

⋆ Για κάθε ιδιοτιμή λ_i τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι ο μηδενοχώρος του $A - \lambda I$, δηλαδή το σύνολο $\{x : (A - \lambda I)x = 0\}$.

⋆ $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow$ οι αντίστοιχοι μηδενοχώροι **δεν τέμνονται**, άρα οποιοδήποτε ιδιοδιάνυσμα για την λ_i είναι γραμμικώς ανεξάρτητο από οποιοαδήποτε ιδιοδιάνυσμα για την λ_j.

⋆ Οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους: οποιαδήποτε επιλογή ιδιοδιανυσμάτων $v_1, v_2, \ldots, v_k$ αντίστοιχα δίνει ένα *γραμμικώς ανεξάρτητο* σύνολο διανυσμάτων.

Θεώρημα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *με ιδιοτιμές* n *πραγματικούς αριθμούς όλους διαφορετικούς μεταξύ τους και έστω αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα* $v_1, v_2, \ldots, v_n$*, ένα για κάθε ιδιοτιμή. Τότε τα διανύσματα αυτά είναι μια βάση του* $\mathbb{R}^n$*.*

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

Θεώρημα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *με ιδιοτιμές* n *πραγματικούς αριθμούς όλους διαφορετικούς μεταξύ τους και έστω αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα* $v_1, v_2, \ldots, v_n$*, ένα για κάθε ιδιοτιμή. Τότε τα διανύσματα αυτά είναι μια βάση του* $\mathbb{R}^n$*.*

⋆ Απόδειξη: Εφόσον οι ιδιοτιμές είναι διακριτές, τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Θεώρημα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με ιδιοτιμές n πραγματικούς αριθμούς όλους διαφορετικούς μεταξύ τους και έστω αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_n$, ένα για κάθε ιδιοτιμή. Τότε τα διανύσματα αυτά είναι μια βάση του $\mathbb{R}^n$.

⋆ Απόδειξη: Εφόσον οι ιδιοτιμές είναι διακριτές, τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.Όμως n γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσμάτα στον $\mathbb{R}^n$ είναι το μέγιστο πλήθος που μπορώ να βάλω χωρίς να χαλάω τη γραμμική ανεξαρτησία

Θεώρημα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με ιδιοτιμές n πραγματικούς αριθμούς όλους διαφορετικούς μεταξύ τους και έστω αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_n$, ένα για κάθε ιδιοτιμή. Τότε τα διανύσματα αυτά είναι μια βάση του $\mathbb{R}^n$.

⋆ Απόδειξη: Εφόσον οι ιδιοτιμές είναι διακριτές, τα $v_1, v_2, \dots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.Όμως n γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσμάτα στον $\mathbb{R}^n$ είναι το μέγιστο πλήθος που μπορώ να βάλω χωρίς να χαλάω τη γραμμική ανεξαρτησία $\Rightarrow$ τα διανύσματα αποτελούν βάση του χώρου.

Πολλαπλές πραγματικές ιδιοτιμές

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda)$ το οποίο έχει τη μορφή
$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2}\dots(\lambda - \lambda_p)^{k_p}.$$

Πολλαπλές πραγματικές ιδιοτιμές

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda)$ το οποίο έχει τη μορφή

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2}\dots(\lambda - \lambda_p)^{k_p}.$$

Ο εκθέτης k_i ονομάζεται αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i.

Πολλαπλές πραγματικές ιδιοτιμές

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda)$ το οποίο έχει τη μορφή

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2}\dots(\lambda - \lambda_p)^{k_p}.$$

Ο εκθέτης k_i ονομάζεται αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i. Η διάσταση του μηδενοχώρου $\mathrm{Null}(A - \lambda_i I) = dim\ker(A - \lambda_i I)$ ονομάζεται γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i

Παράδειγμα Ι.

⋆ Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p(\lambda) = \lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4.$$

Ποιες είναι οι ιδιοτιμές του και η αλγεβρική τους πολλαπλότητα;

Παράδειγμα Ι.

⋆ Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p(\lambda) = \lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4.$$

Ποιες είναι οι ιδιοτιμές του και η αλγεβρική τους πολλαπλότητα;

Έχουμε $p(\lambda) = \lambda^4(\lambda - 6)(\lambda + 2)$, άρα έχει σαν ιδιοτιμές τις $0, 2, 6$ με αλγεβρικές πολλαπλότητες $4, 1, 1$ αντίστοιχα.

⋆ Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p(\lambda) = \lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4.$$

Ποιες είναι οι ιδιοτιμές του και η αλγεβρική τους πολλαπλότητα;

Έχουμε $p(\lambda) = \lambda^4(\lambda - 6)(\lambda + 2)$, άρα έχει σαν ιδιοτιμές τις $0, 2, 6$ με αλγεβρικές πολλαπλότητες $4, 1, 1$ αντίστοιχα.

Τις γεωμετρικές πολλαπλότητες δεν μπορούμε να τις βρούμε χωρίς να μας πουν τον A: είναι οι διστάσεις των μηδενοχώρων $\mathrm{Null}(A), \mathrm{Null}(A - 2I), \mathrm{Null}(A - 6I)$.

Παράδειγμα II.

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοχώροι του

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

μαζί με τις αλγεβρικές και γεωμετρικές τους πολλαπλότητες.

Παράδειγμα II.

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοχώροι του

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

μαζί με τις αλγεβρικές και γεωμετρικές τους πολλαπλότητες.

Έχουμε $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$,

Παράδειγμα ΙΙ.

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοχώροι του

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

μαζί με τις αλγεβρικές και γεωμετρικές τους πολλαπλότητες.

Έχουμε $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$, άρα οι ιδιοτιμές του A είναι οι $-2, 1$ με αλγεβρικές πολλαπλότητες $2, 1$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα II.

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοχώροι του

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

μαζί με τις αλγεβρικές και γεωμετρικές τους πολλαπλότητες.

Έχουμε $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$, άρα οι ιδιοτιμές του A είναι οι $-2, 1$ με αλγεβρικές πολλαπλότητες $2, 1$ αντίστοιχα.
Υπολογίζουμε βάσεις των μηδενοχώρων $\mathrm{Null}(A + 2I), \mathrm{Null}(A + I)$ λύνοντας τα συστήματα $(A + 2I)x = 0, (A - I)x = 0$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα ΙΙ.

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοχώροι του

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

μαζί με τις αλγεβρικές και γεωμετρικές τους πολλαπλότητες.

Έχουμε $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$, άρα οι ιδιοτιμές του A είναι οι $-2, 1$ με αλγεβρικές πολλαπλότητες $2, 1$ αντίστοιχα.
Υπολογίζουμε βάσεις των μηδενοχώρων $\mathrm{Null}(A + 2I), \mathrm{Null}(A + I)$ λύνοντας τα συστήματα $(A + 2I)x = 0, (A - I)x = 0$ αντίστοιχα.

$$A + 2I \Rightarrow_{\text{απαλοιφή Gauss}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

άρα έχουμε 2 βασικές μεταβλητές, άρα 1 ελεύθερη, άρα γεωμετρική πολλαπλότητα $= 1 <$ αλγεβρική πολλαπλότητα.

Σχέση γεωμετρικής και αλγεβρικής πολλαπλότητας.

$\star$ Αλγεβρική πολλαπλότητα της λ : η πολλαπλότητα της στην εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$.

$\star$ Γεωμετρική πολλαπλότητα της λ: διάσταση του χώρου $\mathrm{Null}(A - \lambda I)$.

Σχέση γεωμετρικής και αλγεβρικής πολλαπλότητας.

$\star$ Αλγεβρική πολλαπλότητα της λ : η πολλαπλότητα της στην εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$.

$\star$ Γεωμετρική πολλαπλότητα της λ: διάσταση του χώρου $\mathrm{Null}(A - \lambda I)$.

Θεώρημα

Χωρίς απόδειξη. Για μια ιδιοτιμή λ ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ισχύει ότι Γεωμετρική πολλαπλότητα της $\lambda \leq$ Αλγεβρική πολλαπλότητα της λ.

Ομοιότητα Πινάκων.

Ορισμός: Δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αποκαλούνται *όμοιοι* όταν υπάρχει **αντιστρέψιμος** πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $A = PBP^{-1}$.

Ομοιότητα Πινάκων.

Ορισμός: Δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αποκαλούνται *όμοιοι* όταν υπάρχει **αντιστρέψιμος** πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $A = PBP^{-1}$.

$$A = PBP^{-1} \Rightarrow B = P^{-1}AP$$

Ομοιότητα Πινάκων.

Ορισμός: Δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αποκαλούνται *όμοιοι* όταν υπάρχει **αντιστρέψιμος** πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $A = PBP^{-1}$.

$$A = PBP^{-1} \Rightarrow B = P^{-1}AP$$

Θεώρημα

Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι όμοιοι τότε

Ομοιότητα Πινάκων.

Ορισμός: Δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αποκαλούνται *όμοιοι* όταν υπάρχει **αντιστρέψιμος** πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $A = PBP^{-1}$.

$$A = PBP^{-1} \Rightarrow B = P^{-1}AP$$

Θεώρημα

Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι όμοιοι τότε

1. $rank(A) = rank(B)$,

Ομοιότητα Πινάκων.

Ορισμός: Δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αποκαλούνται *όμοιοι* όταν υπάρχει **αντιστρέψιμος** πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $A = PBP^{-1}$.

$$A = PBP^{-1} \Rightarrow B = P^{-1}AP$$

Θεώρημα

Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι όμοιοι τότε

1. $rank(A) = rank(B)$,
2. $det(A) = det(B)$,

Ομοιότητα Πινάκων.

Ορισμός: Δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αποκαλούνται *όμοιοι* όταν υπάρχει **αντιστρέψιμος** πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $A = PBP^{-1}$.

$$A = PBP^{-1} \Rightarrow B = P^{-1}AP$$

Θεώρημα

Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι όμοιοι τότε

1. $rank(A) = rank(B)$,
2. $det(A) = det(B)$,
3. *A και B έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.*

Απόδειξη Θεωρήματος.

Όμοιοι πίνακες: $A = PBP^{-1}$

⋆ Απόδειξη του $det(A) = det(B)$:

Απόδειξη Θεωρήματος.

Όμοιοι πίνακες: $A = PBP^{-1}$

⋆ Απόδειξη του $det(A) = det(B)$:

$$det(A) = det(PBP^{-1}) =$$

Απόδειξη Θεωρήματος.

Όμοιοι πίνακες: $A = PBP^{-1}$

⋆ Απόδειξη του $det(A) = det(B)$:

$$det(A) = det(PBP^{-1}) = det(P) \cdot det(B) \cdot det(P^{-1}) = det(B),$$

Απόδειξη Θεωρήματος.

Όμοιοι πίνακες: $A = PBP^{-1}$

⋆ Απόδειξη του $det(A) = det(B)$:

$$det(A) = det(PBP^{-1}) = det(P) \cdot det(B) \cdot det(P^{-1}) = det(B),$$

καθώς $det(P) \cdot det(P^{-1}) = 1$.

Απόδειξη Θεωρήματος.

Όμοιοι πίνακες: $A = PBP^{-1}$

⋆ Απόδειξη του $det(A) = det(B)$:

$$det(A) = det(PBP^{-1}) = det(P) \cdot det(B) \cdot det(P^{-1}) = det(B),$$

καθώς $det(P) \cdot det(P^{-1}) = 1$.

⋆ Απόδειξη ότι ιδιοτιμές του A και B έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές:

Απόδειξη Θεωρήματος.

Όμοιοι πίνακες: $A = PBP^{-1}$

⋆ Απόδειξη του $det(A) = det(B)$:

$$det(A) = det(PBP^{-1}) = det(P) \cdot det(B) \cdot det(P^{-1}) = det(B),$$

καθώς $det(P) \cdot det(P^{-1}) = 1$.

⋆ Απόδειξη ότι ιδιοτιμές του A και B έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές:

$$det(A - \lambda I) =$$

Απόδειξη Θεωρήματος.

Όμοιοι πίνακες: $A = PBP^{-1}$

⋆ Απόδειξη του $det(A) = det(B)$:

$$det(A) = det(PBP^{-1}) = det(P) \cdot det(B) \cdot det(P^{-1}) = det(B),$$

καθώς $det(P) \cdot det(P^{-1}) = 1$.

⋆ Απόδειξη ότι ιδιοτιμές του A και B έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές:

$$det(A - \lambda I) = det(PBP^{-1} - \lambda PP^{-1}) =$$

Απόδειξη Θεωρήματος.

Όμοιοι πίνακες: $A = PBP^{-1}$

⋆ Απόδειξη του $det(A) = det(B)$:

$$det(A) = det(PBP^{-1}) = det(P) \cdot det(B) \cdot det(P^{-1}) = det(B),$$

καθώς $det(P) \cdot det(P^{-1}) = 1$.

⋆ Απόδειξη ότι ιδιοτιμές του A και B έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές:

$$det(A - \lambda I) = det(PBP^{-1} - \lambda PP^{-1}) = det(P(B - \lambda I)P^{-1}) =$$

Απόδειξη Θεωρήματος.

Όμοιοι πίνακες: $A = PBP^{-1}$

⋆ Απόδειξη του $det(A) = det(B)$:

$$det(A) = det(PBP^{-1}) = det(P) \cdot det(B) \cdot det(P^{-1}) = det(B),$$

καθώς $det(P) \cdot det(P^{-1}) = 1.$

⋆ Απόδειξη ότι ιδιοτιμές του A και B έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές:

$$det(A - \lambda I) = det(PBP^{-1} - \lambda PP^{-1}) = det(P(B - \lambda I)P^{-1}) =$$

$$= det(P) \cdot det(B - \lambda I) det(P^{-1})$$

Απόδειξη Θεωρήματος.

Όμοιοι πίνακες: $A = PBP^{-1}$

⋆ Απόδειξη του $det(A) = det(B)$:

$$det(A) = det(PBP^{-1}) = det(P) \cdot det(B) \cdot det(P^{-1}) = det(B),$$

καθώς $det(P) \cdot det(P^{-1}) = 1.$

⋆ Απόδειξη ότι ιδιοτιμές του A και B έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές:

$$det(A - \lambda I) = det(PBP^{-1} - \lambda PP^{-1}) = det(P(B - \lambda I)P^{-1}) =$$

$$= det(P) \cdot det(B - \lambda I) det(P^{-1}) = det(B - \lambda I),$$

Απόδειξη Θεωρήματος.

Όμοιοι πίνακες: $A = PBP^{-1}$

⋆ Απόδειξη του $det(A) = det(B)$:

$$det(A) = det(PBP^{-1}) = det(P) \cdot det(B) \cdot det(P^{-1}) = det(B),$$

καθώς $det(P) \cdot det(P^{-1}) = 1$.

⋆ Απόδειξη ότι ιδιοτιμές του A και B έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές:

$$det(A - \lambda I) = det(PBP^{-1} - \lambda PP^{-1}) = det(P(B - \lambda I)P^{-1}) =$$

$$= det(P) \cdot det(B - \lambda I) det(P^{-1}) = det(B - \lambda I),$$

άρα οι A, B έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο άρα και τις ίδιες ιδιοτιμές (με την ίδια αλγεβρική πολλαπλότητα)!

Συνέχεια απόδειξης θεωρήματος.

Όμοιοι πίνακες: $A = PBP^{-1}$

$\star$ $rank(A) = rank(B)$:

Συνέχεια απόδειξης θεωρήματος.

Όμοιοι πίνακες: $A = PBP^{-1}$

$\star$ $rank(A) = rank(B)$: Έχουμε $AP = PB$ και άρα σίγουρα $rank(AP) = rank(PB)$.

Συνέχεια απόδειξης θεωρήματος.

Όμοιοι πίνακες: $A = PBP^{-1}$

$\star$ $rank(A) = rank(B)$: Έχουμε $AP = PB$ και άρα σίγουρα $rank(AP) = rank(PB)$. Αρκεί να δείξω ότι $rank(AP) = rank(A)$ εφόσον P αντιστρέψιμος,

Συνέχεια απόδειξης θεωρήματος.

Όμοιοι πίνακες: $A = PBP^{-1}$

$\star$ $rank(A) = rank(B)$: Έχουμε $AP = PB$ και άρα σίγουρα $rank(AP) = rank(PB)$. Αρκεί να δείξω ότι $rank(AP) = rank(A)$ εφόσον P αντιστρέψιμος, και όμοια $rank(PB) = rank(B)$.

Συνέχεια απόδειξης θεωρήματος.

Όμοιοι πίνακες: $A = PBP^{-1}$

$\star$ $rank(A) = rank(B)$: Έχουμε $AP = PB$ και άρα σίγουρα $rank(AP) = rank(PB)$. Αρκεί να δείξω ότι $rank(AP) = rank(A)$ εφόσον P αντιστρέψιμος, και όμοια $rank(PB) = rank(B)$. Αρκεί να δείξω μόνο το δεύτερο (γιατί;).

Συνέχεια απόδειξης θεωρήματος.

Όμοιοι πίνακες: $A = PBP^{-1}$

$\star$ $rank(A) = rank(B)$: Έχουμε $AP = PB$ και άρα σίγουρα $rank(AP) = rank(PB)$. Αρκεί να δείξω ότι $rank(AP) = rank(A)$ εφόσον P αντιστρέψιμος, και όμοια $rank(PB) = rank(B)$. Αρκεί να δείξω μόνο το δεύτερο (γιατί;).Οι στήλες του PB είναι οι στήλες του B πολλαπλασιασμένες με P,

Συνέχεια απόδειξης θεωρήματος.

Όμοιοι πίνακες: $A = PBP^{-1}$

$\star$ $rank(A) = rank(B)$: Έχουμε $AP = PB$ και άρα σίγουρα $rank(AP) = rank(PB)$. Αρκεί να δείξω ότι $rank(AP) = rank(A)$ εφόσον P αντιστρέψιμος, και όμοια $rank(PB) = rank(B)$. Αρκεί να δείξω μόνο το δεύτερο (γιατί;).Οι στήλες του PB είναι οι στήλες του B πολλαπλασιασμένες με P, για την ακρίβεια η i-οστή στήλη του PB είναιη PB_i.

Συνέχεια απόδειξης θεωρήματος.

Όμοιοι πίνακες: $A = PBP^{-1}$

$\star$ $rank(A) = rank(B)$: Έχουμε $AP = PB$ και άρα σίγουρα $rank(AP) = rank(PB)$. Αρκεί να δείξω ότι $rank(AP) = rank(A)$ εφόσον P αντιστρέψιμος, και όμοια $rank(PB) = rank(B)$. Αρκεί να δείξω μόνο το δεύτερο (γιατί;).Οι στήλες του PB είναι οι στήλες του B πολλαπλασιασμένες με P, για την ακρίβεια η i-οστή στήλη του PB είναιη PB_i. Έστω μια οποιαδήποτε γραμμική σχέση μεταξύ των στηλών:

$$c_1B_1 + \ldots + c_nB_n = 0 \Rightarrow c_1(PB_1) + \ldots + c_n(PB_n) = 0,$$

Συνέχεια απόδειξης θεωρήματος.

Όμοιοι πίνακες: $A = PBP^{-1}$

$\star$ $rank(A) = rank(B)$: Έχουμε $AP = PB$ και άρα σίγουρα $rank(AP) = rank(PB)$. Αρκεί να δείξω ότι $rank(AP) = rank(A)$ εφόσον P αντιστρέψιμος, και όμοια $rank(PB) = rank(B)$. Αρκεί να δείξω μόνο το δεύτερο (γιατί;).Οι στήλες του PB είναι οι στήλες του B πολλαπλασιασμένες με P, για την ακρίβεια η i-οστή στήλη του PB είναιη PB_i. Έστω μια οποιαδήποτε γραμμική σχέση μεταξύ των στηλών:

$$c_1B_1 + \ldots + c_nB_n = 0 \Rightarrow c_1(PB_1) + \ldots + c_n(PB_n) = 0,$$

και ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή κάθε γραμμική σχέση μεταξύ των στήλων του PB αντιστοιχεί στην ίδια σχέση μεταξύ των στηλών του B.

Συνέχεια απόδειξης θεωρήματος.

Όμοιοι πίνακες: $A = PBP^{-1}$

$\star$ $rank(A) = rank(B)$: Έχουμε $AP = PB$ και άρα σίγουρα $rank(AP) = rank(PB)$. Αρκεί να δείξω ότι $rank(AP) = rank(A)$ εφόσον P αντιστρέψιμος, και όμοια $rank(PB) = rank(B)$. Αρκεί να δείξω μόνο το δεύτερο (γιατί;).Οι στήλες του PB είναι οι στήλες του B πολλαπλασιασμένες με P, για την ακρίβεια η i-οστή στήλη του PB είναιη PB_i. Έστω μια οποιαδήποτε γραμμική σχέση μεταξύ των στηλών:

$$c_1B_1 + \ldots + c_nB_n = 0 \Rightarrow c_1(PB_1) + \ldots + c_n(PB_n) = 0,$$

και ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή κάθε γραμμική σχέση μεταξύ των στήλων του PB αντιστοιχεί στην ίδια σχέση μεταξύ των στηλών του B. Άρα μία βάση για τον χώρο στηλών του B δίνει μια βάση για τον χώρο στηλών του PB και αντίστροφα.

Συνέχεια απόδειξης θεωρήματος.

Όμοιοι πίνακες: $A = PBP^{-1}$

$\star$ $rank(A) = rank(B)$: Έχουμε $AP = PB$ και άρα σίγουρα $rank(AP) = rank(PB)$. Αρκεί να δείξω ότι $rank(AP) = rank(A)$ εφόσον P αντιστρέψιμος, και όμοια $rank(PB) = rank(B)$. Αρκεί να δείξω μόνο το δεύτερο (γιατί;).Οι στήλες του PB είναι οι στήλες του B πολλαπλασιασμένες με P, για την ακρίβεια η i-οστή στήλη του PB είναιη PB_i. Έστω μια οποιαδήποτε γραμμική σχέση μεταξύ των στηλών:

$$c_1B_1 + \ldots + c_nB_n = 0 \Rightarrow c_1(PB_1) + \ldots + c_n(PB_n) = 0,$$

και ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή κάθε γραμμική σχέση μεταξύ των στήλων του PB αντιστοιχεί στην ίδια σχέση μεταξύ των στηλών του B. Άρα μία βάση για τον χώρο στηλών του B δίνει μια βάση για τον χώρο στηλών του PB και αντίστροφα. Άρα οι δύο χώροι στηλών έχουν την ίδια διάσταση και άρα B, PB έχουν τον ίδιο βαθμό.

Ο λόγος για τους όμοιους πίνακες;

Γιατί μας ενδιαφέρει η ομοιότητα πινάκων;

Ο λόγος για τους όμοιους πίνακες;

Γιατί μας ενδιαφέρει η όμοιότητα πινάκων;

Στην επόμενη διάλεξη: υπό τις κατάλληλες συνθήκες, ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ μπορεί να γραφτεί ως

$$A = P \Lambda P^{-1}$$

όπου Λ ένας **διαγώνιος** πίνακας που έχει τις ιδιοτιμές σα διαγώνια στοιχεία.

Ο λόγος για τους όμοιους πίνακες;

Γιατί μας ενδιαφέρει η όμοιότητα πινάκων;

Στην επόμενη διάλεξη: υπό τις κατάλληλες συνθήκες, ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ μπορεί να γραφτεί ως

$$A = P \Lambda P^{-1}$$

όπου Λ ένας **διαγώνιος** πίνακας που έχει τις ιδιοτιμές σα διαγώνια στοιχεία.

Αυτό απλοποιεί τον πίνακα A: για παράδειγμα, $A^k = P \Lambda^k P^{-1}$ και έτσι μπορούμε να απαντήσουμε ερωτήματα όπως το αρχικό της προηγούμενης διάλεξης.

Τι μάθαμε και τι πρέπει να ξέρουμε.

- Τι είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο.
- Τι είναι η αλγεβρική και η γεωμετρική πολλαπλότητα των ιδιοτιμών.
- Τι είναι ομοιότητα πινάκων και πως σχετίζονται μεταξύ τους.

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!