Γραμμική Άλγεβρα

Δέκατη Τρίτη Διαλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Διανυσματικοί Χώροι: Υπενθύμιση

Ένας διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K είναι ένα σύνολο αντικειμένων, τα οποία τα αποκαλούμε διανύσματα, για τα οποία ισχύουν οι βασικές ιδιότητες της επιμεριστικότητας, αντιμεταθετικότητας, προσεταιριστικότητας με τα στοιχεία του K και επιπλέον

Διανυσματικοί Χώροι: Υπενθύμιση

Ένας διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K είναι ένα σύνολο αντικειμένων, τα οποία τα αποκαλούμε διανύσματα, για τα οποία ισχύουν οι βασικές ιδιότητες της επιμεριστικότητας, αντιμεταθετικότητας, προσεταιριστικότητας με τα στοιχεία του K και επιπλέον

1. $u, v \in V \Rightarrow u + v \in V$
2. $u \in V, \lambda \in K \Rightarrow \lambda u \in V$
3. $0 \in V$, όπου 0 τέτοιο ώστε $0 + u = u$
4. $v \in V \Rightarrow \exists u \in V : u + v = 0$ και u συμβολίζεται με $-v$.

Η έννοια του γραμμικού υποχώρου.

Ένα γραμμικός υποχώρος είναι ένας διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι *υποσύνολο* κάποιου άλλου διανυσματικού χώρου.

Η έννοια του γραμμικού υποχώρου.

Ένα γραμμικός υποχώρος είναι ένας διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι *υποσύνολο* κάποιου άλλου διανυσματικού χώρου.

- Το σύνολο $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ **είναι** γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.

Η έννοια του γραμμικού υποχώρου.

Ένα γραμμικός υποχώρος είναι ένας διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι *υποσύνολο* κάποιου άλλου διανυσματικού χώρου.

- Το σύνολο $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ **είναι** γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.
- Το $\mathbb{R}^2$ **δεν** είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.

Η έννοια του γραμμικού υποχώρου.

Ένα γραμμικός υποχώρος είναι ένας διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι *υποσύνολο* κάποιου άλλου διανυσματικού χώρου.

- Το σύνολο $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ **είναι** γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.
- Το $\mathbb{R}^2$ **δεν** είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.
- Το σύνολο των πολυωνύμων $p(t)$ βαθμού το πολύ 3 με πραγματικούς συντελεστές με τον όρο του t^2 να είναι μηδέν, πχ $p(t) = 1 + t + t^3, p(t) = -t, p(t) = 7$

Η έννοια του γραμμικού υποχώρου.

Ένα γραμμικός υποχώρος είναι ένας διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι *υποσύνολο* κάποιου άλλου διανυσματικού χώρου.

- Το σύνολο $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ **είναι** γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.
- Το $\mathbb{R}^2$ **δεν** είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.
- Το σύνολο των πολυωνύμων $p(t)$ βαθμού το πολύ 3 με πραγματικούς συντελεστές με τον όρο του t^2 να είναι μηδέν, πχ $p(t) = 1 + t + t^3, p(t) = -t, p(t) = 7$ **είναι** υποχώρος του διανυσματικού χώρου των πολυωνύμων με βαθμό το πολύ 3.

Η έννοια του γραμμικού υποχώρου.

Ένα γραμμικός υποχώρος είναι ένας διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι *υποσύνολο* κάποιου άλλου διανυσματικού χώρου.

- Το σύνολο $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ **είναι** γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.
- Το $\mathbb{R}^2$ **δεν** είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.
- Το σύνολο των πολυωνύμων $p(t)$ βαθμού το πολύ 3 με πραγματικούς συντελεστές με τον όρο του t^2 να είναι μηδέν, πχ $p(t) = 1 + t + t^3, p(t) = -t, p(t) = 7$ **είναι** υποχώρος του διανυσματικού χώρου των πολυωνύμων με βαθμό το πολύ 3.
- Το σύνολο των $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ οι οποίοι ικανοποιούν $A^T = A$ **είναι** υποχώρος του συνόλου όλων των $n \times n$ πινάκων.

Η έννοια του γραμμικού υποχώρου.

Ένα γραμμικός υποχώρος είναι ένας διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι *υποσύνολο* κάποιου άλλου διανυσματικού χώρου.

- Το σύνολο $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ **είναι** γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.
- Το $\mathbb{R}^2$ **δεν** είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.
- Το σύνολο των πολυωνύμων $p(t)$ βαθμού το πολύ 3 με πραγματικούς συντελεστές με τον όρο του t^2 να είναι μηδέν, πχ $p(t) = 1 + t + t^3, p(t) = -t, p(t) = 7$ **είναι** υποχώρος του διανυσματικού χώρου των πολυωνύμων με βαθμό το πολύ 3.
- Το σύνολο των $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ οι οποίοι ικανοποιούν $A^T = A$ **είναι** υποχώρος του συνόλου όλων των $n \times n$ πινάκων.

$\star$ Σημαντικό: Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ με πραγματικούς αριθμούς.

Η έννοια του γραμμικού υποχώρου.

Ένα γραμμικός υποχώρος είναι ένας διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι *υποσύνολο* κάποιου άλλου διανυσματικού χώρου.

- Το σύνολο $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ **είναι** γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.
- Το $\mathbb{R}^2$ **δεν** είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.
- Το σύνολο των πολυωνύμων $p(t)$ βαθμού το πολύ 3 με πραγματικούς συντελεστές με τον όρο του t^2 να είναι μηδέν, πχ $p(t) = 1 + t + t^3, p(t) = -t, p(t) = 7$ **είναι** υποχώρος του διανυσματικού χώρου των πολυωνύμων με βαθμό το πολύ 3.
- Το σύνολο των $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ οι οποίοι ικανοποιούν $A^T = A$ **είναι** υποχώρος του συνόλου όλων των $n \times n$ πινάκων.

$\star$ Σημαντικό: Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ με πραγματικούς αριθμούς. Τότε το σύνολο $\{x : Ax = 0\}$ είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^n$ (φροντιστήριο),

Η έννοια του γραμμικού υποχώρου.

Ένα γραμμικός υποχώρος είναι ένας διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι *υποσύνολο* κάποιου άλλου διανυσματικού χώρου.

- Το σύνολο $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ **είναι** γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.
- Το $\mathbb{R}^2$ **δεν** είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.
- Το σύνολο των πολυωνύμων $p(t)$ βαθμού το πολύ 3 με πραγματικούς συντελεστές με τον όρο του t^2 να είναι μηδέν, πχ $p(t) = 1 + t + t^3, p(t) = -t, p(t) = 7$ **είναι** υποχώρος του διανυσματικού χώρου των πολυωνύμων με βαθμό το πολύ 3.
- Το σύνολο των $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ οι οποίοι ικανοποιούν $A^T = A$ **είναι** υποχώρος του συνόλου όλων των $n \times n$ πινάκων.

$\star$ Σημαντικό: Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ με πραγματικούς αριθμούς. Τότε το σύνολο $\{x : Ax = 0\}$ είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^n$ (φροντιστήριο), αλλά το $Ax = b, b \neq 0$ **δεν** είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^n$.

Γεωμετρική ερμηνεία υποχώρων

Κάθε ευθεία και κάθε επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ που περνάει από την αρχή των αξόνων είναι *γραμμικός υποχώρος* του $\mathbb{R}^3$.

Γεωμετρική ερμηνεία υποχώρων

Κάθε ευθεία και κάθε επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ που περνάει από την αρχή των αξόνων είναι *γραμμικός υποχώρος* του $\mathbb{R}^3$.
Αυτό συμβαίνει διότι απαιτούμε $0 \in W$ για να είναι ο W υποχώρος.

Γεωμετρική ερμηνεία υποχώρων

Κάθε ευθεία και κάθε επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ που περνάει από την αρχή των αξόνων είναι *γραμμικός υποχώρος* του $\mathbb{R}^3$.
Αυτό συμβαίνει διότι απαιτούμε $0 \in W$ για να είναι ο W υποχώρος.

Άρα η έννοια του υποχώρου γενικεύει αυτές τις έννοιες (επίπεδο, ευθεία που εμπεριέχουν την αρχή των αξόνων) σε άλλους διανυσματικούς χώρους.

Γεωμετρική ερμηνεία υποχώρων

Κάθε ευθεία και κάθε επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ που περνάει από την αρχή των αξόνων είναι *γραμμικός υποχώρος* του $\mathbb{R}^3$.
Αυτό συμβαίνει διότι απαιτούμε $0 \in W$ για να είναι ο W υποχώρος.

Άρα η έννοια του υποχώρου γενικεύει αυτές τις έννοιες (επίπεδο, ευθεία που εμπεριέχουν την αρχή των αξόνων) σε άλλους διανυσματικούς χώρους.

$\star$ Μια ευθεία μπορούμε να την ορίσουμε ως γραμμική θήκη ενός διανύσματος,

Γεωμετρική ερμηνεία υποχώρων

Κάθε ευθεία και κάθε επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ που περνάει από την αρχή των αξόνων είναι *γραμμικός υποχώρος* του $\mathbb{R}^3$.
Αυτό συμβαίνει διότι απαιτούμε $0 \in W$ για να είναι ο W υποχώρος.

Άρα η έννοια του υποχώρου γενικεύει αυτές τις έννοιες (επίπεδο, ευθεία που εμπεριέχουν την αρχή των αξόνων) σε άλλους διανυσματικούς χώρους.

$\star$ Μια ευθεία μπορούμε να την ορίσουμε ως γραμμική θήκη ενός διανύσματος, ένα επίπεδο ως γραμμική θήκη δύο διανυσμάτων κλπ.

Γεωμετρική ερμηνεία υποχώρων

Κάθε ευθεία και κάθε επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ που περνάει από την αρχή των αξόνων είναι *γραμμικός υποχώρος* του $\mathbb{R}^3$.
Αυτό συμβαίνει διότι απαιτούμε $0 \in W$ για να είναι ο W υποχώρος.

Άρα η έννοια του υποχώρου γενικεύει αυτές τις έννοιες (επίπεδο, ευθεία που εμπεριέχουν την αρχή των αξόνων) σε άλλους διανυσματικούς χώρους.

$\star$ Μια ευθεία μπορούμε να την ορίσουμε ως γραμμική θήκη ενός διανύσματος, ένα επίπεδο ως γραμμική θήκη δύο διανυσμάτων κλπ.
Αντίστοιχα, όπως θα δούμε, κάθε υποχώρος κάθε διανυσματικού χώρου είναι η γραμμική θήκη κάποιων διανυσμάτων

Γεωμετρική ερμηνεία υποχώρων

Κάθε ευθεία και κάθε επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ που περνάει από την αρχή των αξόνων είναι *γραμμικός υποχώρος* του $\mathbb{R}^3$.
Αυτό συμβαίνει διότι απαιτούμε $0 \in W$ για να είναι ο W υποχώρος.

Άρα η έννοια του υποχώρου γενικεύει αυτές τις έννοιες (επίπεδο, ευθεία που εμπεριέχουν την αρχή των αξόνων) σε άλλους διανυσματικούς χώρους.

$\star$ Μια ευθεία μπορούμε να την ορίσουμε ως γραμμική θήκη ενός διανύσματος, ένα επίπεδο ως γραμμική θήκη δύο διανυσμάτων κλπ.
Αντίστοιχα, όπως θα δούμε, κάθε υποχώρος κάθε διανυσματικού χώρου είναι η γραμμική θήκη κάποιων διανυσμάτων και ως το σύνολο $\{x|Ax = 0\}$ για κάποιον κατάλληλο πίνακα A.

Επιστροφή σε κάποιους ορισμούς.

⋆ Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα K και $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$. Τότε η γραμμική θήκη των διανυσμάτων αυτών είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων που γράφονται ως γραμμικός συνδυασμός των $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Επιστροφή σε κάποιους ορισμούς.

⋆ Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα K και $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$. Τότε η γραμμική θήκη των διανυσμάτων αυτών είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων που γράφονται ως γραμμικός συνδυασμός των $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Δηλαδή

$$u \in \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_n\} \Leftrightarrow \exists c_1, \ldots, c_n \in K : u = c_1 a_1 + \ldots c_n a_n.$$

Επιστροφή σε κάποιους ορισμούς.

⋆ Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα K και $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$. Τότε η γραμμική θήκη των διανυσμάτων αυτών είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων που γράφονται ως γραμμικός συνδυασμός των $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Δηλαδή

$$u \in \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_n\} \Leftrightarrow \exists c_1, \ldots, c_n \in K : u = c_1 a_1 + \ldots c_n a_n.$$

Αν $K = \{0, 1\}$ είναι το σώμα με πρόσθεση το αποκλειστικό ή ($\oplus$) έχουμε

$$\mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} =$$

Επιστροφή σε κάποιους ορισμούς.

⋆ Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα K και $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$. Τότε η γραμμική θήκη των διανυσμάτων αυτών είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων που γράφονται ως γραμμικός συνδυασμός των $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Δηλαδή

$$u \in \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_n\} \Leftrightarrow \exists c_1, \ldots, c_n \in K : u = c_1 a_1 + \ldots c_n a_n.$$

Αν $K = \{0, 1\}$ είναι το σώμα με πρόσθεση το αποκλειστικό ή ($\oplus$) έχουμε

$$\mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} =$$

Επιστροφή σε κάποιους ορισμούς.

⋆ Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα K και $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$. Τότε η γραμμική θήκη των διανυσμάτων αυτών είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων που γράφονται ως γραμμικός συνδυασμός των $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Δηλαδή

$$u \in \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_n\} \Leftrightarrow \exists c_1, \ldots, c_n \in K : u = c_1 a_1 + \ldots c_n a_n.$$

Αν $K = \{0, 1\}$ είναι το σώμα με πρόσθεση το αποκλειστικό ή $(\oplus)$ έχουμε

$$\mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Συνέχεια Παραδείγματος.

Η γραμμική θήκη δύο διανυσμάτων u, v από τον προηγούμενο διανυσματικό χώρο μπορεί να περιέχει το πολύ 4 διανύσματα:

Συνέχεια Παραδείγματος.

Η γραμμική θήκη δύο διανυσμάτων u, v από τον προηγούμενο διανυσματικό χώρο μπορεί να περιέχει το πολύ 4 διανύσματα:

- $0 \cdot u + 0 \cdot v = 0$

Συνέχεια Παραδείγματος.

Η γραμμική θήκη δύο διανυσμάτων u, v από τον προηγούμενο διανυσματικό χώρο μπορεί να περιέχει το πολύ 4 διανύσματα:

- $0 \cdot u + 0 \cdot v = 0$
- $0 \cdot u + 1 \cdot v = v$

Συνέχεια Παραδείγματος.

Η γραμμική θήκη δύο διανυσμάτων u, v από τον προηγούμενο διανυσματικό χώρο μπορεί να περιέχει το πολύ 4 διανύσματα:

- $0 \cdot u + 0 \cdot v = 0$
- $0 \cdot u + 1 \cdot v = v$
- $1 \cdot u + 0 \cdot v = u$

Συνέχεια Παραδείγματος.

Η γραμμική θήκη δύο διανυσμάτων u, v από τον προηγούμενο διανυσματικό χώρο μπορεί να περιέχει το πολύ 4 διανύσματα:

- $0 \cdot u + 0 \cdot v = 0$
- $0 \cdot u + 1 \cdot v = v$
- $1 \cdot u + 0 \cdot v = u$
- $1 \cdot u + 1 \cdot v = u + v.$

$$\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right.$$

Συνέχεια Παραδείγματος.

Η γραμμική θήκη δύο διανυσμάτων u, v από τον προηγούμενο διανυσματικό χώρο μπορεί να περιέχει το πολύ 4 διανύσματα:

- $0 \cdot u + 0 \cdot v = 0$
- $0 \cdot u + 1 \cdot v = v$
- $1 \cdot u + 0 \cdot v = u$
- $1 \cdot u + 1 \cdot v = u + v.$

$$\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \right.$$

Συνέχεια Παραδείγματος.

Η γραμμική θήκη δύο διανυσμάτων u, v από τον προηγούμενο διανυσματικό χώρο μπορεί να περιέχει το πολύ 4 διανύσματα:

- $0 \cdot u + 0 \cdot v = 0$
- $0 \cdot u + 1 \cdot v = v$
- $1 \cdot u + 0 \cdot v = u$
- $1 \cdot u + 1 \cdot v = u + v.$

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Συνέχεια Παραδείγματος.

Η γραμμική θήκη δύο διανυσμάτων u, v από τον προηγούμενο διανυσματικό χώρο μπορεί να περιέχει το πολύ 4 διανύσματα:

- $0 \cdot u + 0 \cdot v = 0$
- $0 \cdot u + 1 \cdot v = v$
- $1 \cdot u + 0 \cdot v = u$
- $1 \cdot u + 1 \cdot v = u + v.$

$$\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Γραμμική θήκη σαν υποχώρος.

Θεώρημα

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων των $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$ είναι ένας γραμμικός υποχώρος του V.

Γραμμική θήκη σαν υποχώρος.

Θεώρημα

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων των $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$ είναι ένας γραμμικός υποχώρος του V.

$\star$ Απόδειξη: Έστω $W := \text{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$.
Αν $u, v \in W$ τότε

Γραμμική θήκη σαν υποχώρος.

Θεώρημα

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων των $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$ είναι ένας γραμμικός υποχώρος του V.

⋆ Απόδειξη: Έστω $W := \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Αν $u, v \in W$ τότε $u = c_1 a_1 + \ldots c_n a_n$ και $v = c_1' a_1 + \ldots + c_n' a_n$ άρα

Θεώρημα

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων των $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$ είναι ένας γραμμικός υποχώρος του V.

⋆ Απόδειξη: Έστω $W := \text{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$.
Αν $u, v \in W$ τότε $u = c_1 a_1 + \ldots c_n a_n$ και $v = c_1' a_1 + \ldots + c_n' a_n$ άρα $u + v = (c_1 + c_1')a_1 + \ldots + (c_n + c_n')a_n \in W$.

Γραμμική θήκη σαν υποχώρος.

Θεώρημα

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων των $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$ *είναι ένας γραμμικός υποχώρος του* V.

⋆ Απόδειξη: Έστω $W := \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$.
Αν $u, v \in W$ τότε $u = c_1 a_1 + \ldots c_n a_n$ και $v = c'_1 a_1 + \ldots + c'_n a_n$ άρα $u + v = (c_1 + c'_1)a_1 + \ldots + (c_n + c'_n)a_n \in W$.
Όμοια $\lambda u = (\lambda c_1)a_1 + \ldots (\lambda c_n)a_n \in W$,

Γραμμική θήκη σαν υποχώρος.

Θεώρημα

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων των $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$ είναι ένας γραμμικός υποχώρος του V.

⋆ Απόδειξη: Έστω $W := \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$.
Αν $u, v \in W$ τότε $u = c_1 a_1 + \ldots c_n a_n$ και $v = c'_1 a_1 + \ldots + c'_n a_n$ άρα $u + v = (c_1 + c'_1)a_1 + \ldots + (c_n + c'_n)a_n \in W$.
Όμοια $\lambda u = (\lambda c_1)a_1 + \ldots (\lambda c_n)a_n \in W$, και
$0 = 0 \cdot a_1 + \ldots 0 \cdot a_n \in W$.

Γραμμική θήκη σαν υποχώρος.

Θεώρημα

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων των $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$ είναι ένας γραμμικός υποχώρος του V.

⋆ Απόδειξη: Έστω $W := \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$.
Αν $u, v \in W$ τότε $u = c_1a_1 + \ldots c_na_n$ και $v = c_1'a_1 + \ldots + c_n'a_n$ άρα $u + v = (c_1 + c_1')a_1 + \ldots + (c_n + c_n')a_n \in W$.
Όμοια $\lambda u = (\lambda c_1)a_1 + \ldots (\lambda c_n)a_n \in W$, και $0 = 0 \cdot a_1 + \ldots 0 \cdot a_n \in W$.Επίσης, $0 \in W$

Γραμμική θήκη σαν υποχώρος.

Θεώρημα

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων των $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$ *είναι ένας γραμμικός υποχώρος του* V.

⋆ Απόδειξη: Έστω $W := \text{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$.
Αν $u, v \in W$ τότε $u = c_1a_1 + \ldots c_na_n$ και $v = c_1'a_1 + \ldots + c_n'a_n$ άρα $u + v = (c_1 + c_1')a_1 + \ldots + (c_n + c_n')a_n \in W$.
Όμοια $\lambda u = (\lambda c_1)a_1 + \ldots (\lambda c_n)a_n \in W$, και $0 = 0 \cdot a_1 + \ldots 0 \cdot a_n \in W$.Επίσης, $0 \in W$και $-u = -(c_1a_1 + \ldots + c_na_n) = (-c_1)a_1 + \ldots + (-c_n)a_n \in W$.

Ορισμός γραμμικής ανεξαρτησίας.

Έστω διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K. Τότε τα διανύσματα $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$ λέμε ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο δεν υπάρχουν $j \in \{1, \ldots, n\}$ και $c_1, c_2, \ldots, c_n \in K$ όχι όλα μηδέν έτσι ώστε

$$a_j = c_1 a_1 + \ldots + c_{j-1} a_{j-1} + c_j a_j + \ldots + c_n a_n.$$

Άλλα Παραδείγματα Γραμμικής Θήκης.

⋆ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 3. Τι περιέχει ο γραμμικός υποχώρος

$$W := \text{span}\{2t^3 + 1, 1 + t + t^2, -t - t^2 + 2t^3\}$$

Άλλα Παραδείγματα Γραμμικής Θήκης.

⋆ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 3. Τι περιέχει ο γραμμικός υποχώρος

$$W := \text{span}\{2t^3 + 1, 1 + t + t^2, -t - t^2 + 2t^3\}$$

⋆ Έστω W ο εξής γραμμικός υποχώρος του χώρου των περιοδικών συναρτήσεων με περίοδο 2π:

$$\text{span}\{\text{συν}(2x), \text{ημ}^2(x), \text{συν}^2(x)\}.$$

⋆ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 3. Τι περιέχει ο γραμμικός υποχώρος

$$W := \text{span}\{2t^3 + 1, 1 + t + t^2, -t - t^2 + 2t^3\}$$

⋆ Έστω W ο εξής γραμμικός υποχώρος του χώρου των περιοδικών συναρτήσεων με περίοδο 2π:

$$\text{span}\{\text{συν}(2x), \text{ημ}^2(x), \text{συν}^2(x)\}.$$

Από την ιδιότητα $\text{συν}(2x) = \text{ημ}^2(x) - \text{συν}^2(x)$, έχουμε ότι

$$\text{span}\{\text{συν}(2x), \text{ημ}^2(x), \text{συν}^2(x)\} = \text{span}\{\text{ημ}^2(x), \text{συν}^2(x)\}.$$

Γραμμικοί Υποχώροι και Γραμμικά Συστήματα.

Έστω σώμα K και $A \in K^{m \times n}$.

Έστω σώμα K και $A \in K^{m\times n}$. Αν ο βαθμός του A είναι r (πλήθος βασικών μεταβλητών) τότε

Γραμμικοί Υποχώροι και Γραμμικά Συστήματα.

Έστω σώμα K και $A \in K^{m\times n}$. Αν ο βαθμός του A είναι r (πλήθος βασικών μεταβλητών) τότε

- Το $\{x : Ax = 0\}$ μπορεί να γραφτεί ως η γραμμική θηκή $n-r$ διανυσμάτων στο K^n.

Έστω σώμα K και $A \in K^{m\times n}$. Αν ο βαθμός του A είναι r (πλήθος βασικών μεταβλητών) τότε

- Το $\{x : Ax = 0\}$ μπορεί να γραφτεί ως η γραμμική θηκή $n - r$ διανυσμάτων στο K^n.
- Το παραπάνω σύνολο είναι ένας υποχώρος του K^n.

Γραμμικοί Υποχώροι και Γραμμικά Συστήματα.

Έστω σώμα K και $A \in K^{m \times n}$. Αν ο βαθμός του A είναι r (πλήθος βασικών μεταβλητών) τότε

- Το $\{x : Ax = 0\}$ μπορεί να γραφτεί ως η γραμμική θηκή $n - r$ διανυσμάτων στο K^n.
- Το παραπάνω σύνολο είναι ένας υποχώρος του K^n.
- Όμως ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι κάθε υποχώρος είναι της μορφής $\{x : Ax = 0\}$.

Παράδειγμα:
Αν έχουμε ένα $\oplus$ (αποκλειστικό ή) 10×12 συστήμα $Ax = 0$ με 4 ελεύθερες μεταβλητές, όλες οι λύσεις ζούνε στη γραμμμική θήκη 4 διανυσμάτων:

Γραμμικοί Υποχώροι και Γραμμικά Συστήματα.

Έστω σώμα K και $A \in K^{m\times n}$. Αν ο βαθμός του A είναι r (πλήθος βασικών μεταβλητών) τότε

- Το $\{x : Ax = 0\}$ μπορεί να γραφτεί ως η γραμμική θηκή $n - r$ διανυσμάτων στο K^n.
- Το παραπάνω σύνολο είναι ένας υποχώρος του K^n.
- Όμως ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι κάθε υποχώρος είναι της μορφής $\{x : Ax = 0\}$.

Παράδειγμα:
Αν έχουμε ένα $\oplus$ (αποκλειστικό ή) 10×12 συστήμα $Ax = 0$ με 4 ελεύθερες μεταβλητές, όλες οι λύσεις ζούνε στη γραμμμική θήκη 4 διανυσμάτων: Πόσες λύσεις υπάρχουν ;

Γραμμικοί Υποχώροι και Γραμμικά Συστήματα.

Έστω σώμα K και $A \in K^{m \times n}$. Αν ο βαθμός του A είναι r (πλήθος βασικών μεταβλητών) τότε

- Το $\{x : Ax = 0\}$ μπορεί να γραφτεί ως η γραμμική θηκή $n - r$ διανυσμάτων στο K^n.
- Το παραπάνω σύνολο είναι ένας υποχώρος του K^n.
- Όμως ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι κάθε υποχώρος είναι της μορφής $\{x : Ax = 0\}$.

Παράδειγμα:
Αν έχουμε ένα $\oplus$ (αποκλειστικό ή) 10×12 συστήμα $Ax = 0$ με 4 ελεύθερες μεταβλητές, όλες οι λύσεις ζούνε στη γραμμμική θήκη 4 διανυσμάτων: Πόσες λύσεις υπάρχουν ; Απάντηση: 2^4.

Γραμμικοί Υποχώροι και Γραμμικά Συστήματα.

Έστω σώμα K και $A \in K^{m\times n}$. Αν ο βαθμός του A είναι r (πλήθος βασικών μεταβλητών) τότε

- Το $\{x : Ax = 0\}$ μπορεί να γραφτεί ως η γραμμική θηκή $n - r$ διανυσμάτων στο K^n.
- Το παραπάνω σύνολο είναι ένας υποχώρος του K^n.
- Όμως ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι κάθε υποχώρος είναι της μορφής $\{x : Ax = 0\}$.

Παράδειγμα:
Αν έχουμε ένα $\oplus$ (αποκλειστικό ή) 10×12 συστήμα $Ax = 0$ με 4 ελεύθερες μεταβλητές, όλες οι λύσεις ζούνε στη γραμμμική θήκη 4 διανυσμάτων: Πόσες λύσεις υπάρχουν ; Απάντηση: 2^4.

Αν το σύστημα ήταν 10×12 αλλά $K = \mathbb{R}$, πόσες λύσεις θα είχα;

Γραμμικοί Υποχώροι και Γραμμικά Συστήματα.

Έστω σώμα K και $A \in K^{m\times n}$. Αν ο βαθμός του A είναι r (πλήθος βασικών μεταβλητών) τότε

- Το $\{x : Ax = 0\}$ μπορεί να γραφτεί ως η γραμμική θηκή $n - r$ διανυσμάτων στο K^n.
- Το παραπάνω σύνολο είναι ένας υποχώρος του K^n.
- Όμως ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι κάθε υποχώρος είναι της μορφής $\{x : Ax = 0\}$.

Παράδειγμα:
Αν έχουμε ένα $\oplus$ (αποκλειστικό ή) 10×12 συστήμα $Ax = 0$ με 4 ελεύθερες μεταβλητές, όλες οι λύσεις ζούνε στη γραμμμική θήκη 4 διανυσμάτων: Πόσες λύσεις υπάρχουν ; Απάντηση: 2^4.

Αν το σύστημα ήταν 10×12 αλλά $K = \mathbb{R}$, πόσες λύσεις θα είχα; Άπειρες!

Γραμμικές Απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων.

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι U, V πάνω σε ένα σώμα K. Μία απεικόνιση $T : V \to U$ λέγεται γραμμική όταν

- $\forall u, v \in V$ έχουμε $T(u+v) = T(u) + T(v)$.
- $\forall u \in V, \lambda \in K$ έχουμε $T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

Γραμμικές Απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων.

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι U, V πάνω σε ένα σώμα K. Μία απεικόνιση $T : V \to U$ λέγεται γραμμική όταν

- $\forall u, v \in V$ έχουμε $T(u+v) = T(u) + T(v)$.
- $\forall u \in V, \lambda \in K$ έχουμε $T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

$\star$ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πραγματικών πινάκων και $T : V \to V$ ώστε $T(A) = A + A^T$.

Γραμμικές Απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων.

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι U, V πάνω σε ένα σώμα K. Μία απεικόνιση $T : V \to U$ λέγεται γραμμική όταν

- $\forall u, v \in V$ έχουμε $T(u + v) = T(u) + T(v)$.
- $\forall u \in V, \lambda \in K$ έχουμε $T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

$\star$ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πραγματικών πινάκων και $T : V \to V$ ώστε $T(A) = A + A^T$.
$T(A + B) =$

Γραμμικές Απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων.

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι U, V πάνω σε ένα σώμα K. Μία απεικόνιση $T : V \to U$ λέγεται γραμμική όταν

- $\forall u, v \in V$ έχουμε $T(u + v) = T(u) + T(v)$.
- $\forall u \in V, \lambda \in K$ έχουμε $T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

$\star$ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πραγματικών πινάκων και $T : V \to V$ ώστε $T(A) = A + A^T$.
$T(A + B) = (A + B) + (A + B)^T = A + B + A^T + B^T =$

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι U, V πάνω σε ένα σώμα K. Μία απεικόνιση $T : V \to U$ λέγεται γραμμική όταν

- $\forall u, v \in V$ έχουμε $T(u+v) = T(u) + T(v)$.
- $\forall u \in V, \lambda \in K$ έχουμε $T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

$\star$ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πραγματικών πινάκων και $T : V \to V$ ώστε $T(A) = A + A^T$.
$T(A+B) = (A+B) + (A+B)^T = A + B + A^T + B^T =$
$\underbrace{(A + A^T)}_{T(A)} + \underbrace{(B + B^T)}_{T(B)}$. Όμοια και η άλλη ιδιότητα, άρα T γραμμική απεικόνιση.

Γραμμικές Απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων.

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι U, V πάνω σε ένα σώμα K. Μία απεικόνιση $T : V \to U$ λέγεται γραμμική όταν

- $\forall u, v \in V$ έχουμε $T(u+v) = T(u) + T(v)$.
- $\forall u \in V, \lambda \in K$ έχουμε $T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

⋆ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πραγματικών πινάκων και $T : V \to V$ ώστε $T(A) = A + A^T$.
$T(A+B) = (A+B) + (A+B)^T = A + B + A^T + B^T =$ $\underbrace{(A + A^T)}_{T(A)} + \underbrace{(B + B^T)}_{T(B)}$. Όμοια και η άλλη ιδιότητα, άρα T γραμμική απεικόνιση.

⋆ Η απεικόνιση $T(A) = det(A)$ είναι γραμμική;

Γραμμικές Απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων.

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι U, V πάνω σε ένα σώμα K. Μία απεικόνιση $T : V \to U$ λέγεται γραμμική όταν

- $\forall u, v \in V$ έχουμε $T(u+v) = T(u) + T(v)$.
- $\forall u \in V, \lambda \in K$ έχουμε $T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

$\star$ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πραγματικών πινάκων και $T : V \to V$ ώστε $T(A) = A + A^T$.
$T(A+B) = (A+B) + (A+B)^T = A + B + A^T + B^T =$ $\underbrace{(A+A^T)}_{T(A)} + \underbrace{(B+B^T)}_{T(B)}$. Όμοια και η άλλη ιδιότητα, άρα T γραμμική απεικόνιση.

$\star$ Η απεικόνιση $T(A) = det(A)$ είναι γραμμική; Όχι, διότι **δεν** ικανοποιεί ούτε την $det(A+B) = det(A) + det(B)$

Γραμμικές Απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων.

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι U, V πάνω σε ένα σώμα K. Μία απεικόνιση $T : V \to U$ λέγεται γραμμική όταν

- $\forall u, v \in V$ έχουμε $T(u+v) = T(u) + T(v)$.
- $\forall u \in V, \lambda \in K$ έχουμε $T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

$\star$ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πραγματικών πινάκων και $T : V \to V$ ώστε $T(A) = A + A^T$.
$T(A+B) = (A+B) + (A+B)^T = A + B + A^T + B^T =$
$\underbrace{(A + A^T)}_{T(A)} + \underbrace{(B + B^T)}_{T(B)}$. Όμοια και η άλλη ιδιότητα, άρα T γραμμική απεικόνιση.

$\star$ Η απεικόνιση $T(A) = det(A)$ είναι γραμμική; Όχι, διότι **δεν** ικανοποιεί ούτε την $det(A+B) = det(A) + det(B)$ ούτε την $det(\lambda A) = \lambda \cdot det(A)$.

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι U, V πάνω σε ένα σώμα K. Μία απεικόνιση $T : V \to U$ λέγεται γραμμική όταν

- $\forall u, v \in V$ έχουμε $T(u+v) = T(u) + T(v)$.
- $\forall u \in V, \lambda \in K$ έχουμε $T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

⋆ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πραγματικών πινάκων και $T : V \to V$ ώστε $T(A) = A + A^T$.
$T(A+B) = (A+B) + (A+B)^T = A + B + A^T + B^T =$
$\underbrace{(A + A^T)}_{T(A)} + \underbrace{(B + B^T)}_{T(B)}$. Όμοια και η άλλη ιδιότητα, άρα T γραμμική απεικόνιση.

⋆ Η απεικόνιση $T(A) = det(A)$ είναι γραμμική; Όχι, διότι **δεν** ικανοποιεί ούτε την $det(A+B) = det(A) + det(B)$ ούτε την $det(\lambda A) = \lambda \cdot det(A)$. (για την ακρίβεια μόνο για πίνακες 1×1 είναι γραμμική).

Δύο ενδιαφέροντες υποχώροι.

Έστω $T : U \to V$ μία γραμμική απεικόνιση όπου U, V διανυσματικοί χώροι. Ορίζουμε

Δύο ενδιαφέροντες υποχώροι.

Έστω $T : U \to V$ μία γραμμική απεικόνιση όπου U, V διανυσματικοί χώροι. Ορίζουμε

1. Τον πυρήνα της T ως το σύνολο των διανυσμάτων $u \in U$ τα οποία απεικονίζονται στο $0 \in V$. Δηλαδή

$$\ker(T) := \{u \in U | T(u) = 0\}.$$

Δύο ενδιαφέροντες υποχώροι.

Έστω $T : U \to V$ μία γραμμική απεικόνιση όπου U, V διανυσματικοί χώροι. Ορίζουμε

1. Τον πυρήνα της T ως το σύνολο των διανυσμάτων $u \in U$ τα οποία απεικονίζονται στο $0 \in V$. Δηλαδή
$$\ker(T) := \{u \in U | T(u) = 0\}.$$

2. Το εύρος (σύνολο τιμών) της T ως το σύνολο των $v \in V$ για τα οποία υπάρχει κάποιο $u \in U$ με $T(u) = v$. Δηλαδή
$$\mathrm{Range}(T) := \{v \in V | \exists u \in U : T(u) = v\}.$$

Δύο ενδιαφέροντες υποχώροι.

Έστω $T : U \to V$ μία γραμμική απεικόνιση όπου U, V διανυσματικοί χώροι. Ορίζουμε

1. Τον πυρήνα της T ως το σύνολο των διανυσμάτων $u \in U$ τα οποία απεικονίζονται στο $0 \in V$. Δηλαδή

$$\ker(T) := \{u \in U | T(u) = 0\}.$$

2. Το εύρος (σύνολο τιμών) της T ως το σύνολο των $v \in V$ για τα οποία υπάρχει κάποιο $u \in U$ με $T(u) = v$. Δηλαδή

$$\mathrm{Range}(T) := \{v \in V | \exists u \in U : T(u) = v\}.$$

$\star$ $\ker(T)$ είναι γραμμικός υποχώρος του U

Δύο ενδιαφέροντες υποχώροι.

Έστω $T : U \to V$ μία γραμμική απεικόνιση όπου U, V διανυσματικοί χώροι. Ορίζουμε

1. Τον πυρήνα της T ως το σύνολο των διανυσμάτων $u \in U$ τα οποία απεικονίζονται στο $0 \in V$. Δηλαδή
$$\ker(T) := \{u \in U | T(u) = 0\}.$$
2. Το εύρος (σύνολο τιμών) της T ως το σύνολο των $v \in V$ για τα οποία υπάρχει κάποιο $u \in U$ με $T(u) = v$. Δηλαδή
$$\mathrm{Range}(T) := \{v \in V | \exists u \in U : T(u) = v\}.$$

$\star$ $\ker(T)$ είναι γραμμικός υποχώρος του U και $\mathrm{Range}(T)$ γραμμικός υποχώρος του V.

Παραδείγματα.

Έστω γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ με $T(A) = A + A^T$.
Ποιος είναι ο πυρήνας της T;

Παραδείγματα.

Έστω γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ με $T(A) = A + A^T$.
Ποιος είναι ο πυρήνας της T;
Απάντηση: $A \in \ker(T) \Leftrightarrow$

Παραδείγματα.

Έστω γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ με $T(A) = A + A^T$.
Ποιος είναι ο πυρήνας της T;
Απάντηση: $A \in \ker(T) \Leftrightarrow T(A) = 0 \Leftrightarrow A = -A^T$.

Παραδείγματα.

Έστω γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ με $T(A) = A + A^T$.
Ποιος είναι ο πυρήνας της T;
Απάντηση: $A \in \ker(T) \Leftrightarrow T(A) = 0 \Leftrightarrow A = -A^T$. Το
$\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | A^T = -A\}$ αποτελεί γραμμικό υποχώρο του $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Παραδείγματα.

Έστω γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ με $T(A) = A + A^T$.
Ποιος είναι ο πυρήνας της T;
Απάντηση: $A \in \ker(T) \Leftrightarrow T(A) = 0 \Leftrightarrow A = -A^T$. Το $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | A^T = -A\}$ αποτελεί γραμμικό υποχώρο του $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Ποιος είναι ο πυρήνας της απεικόνισης $T(f) = f + f'$ όπου f παραγωγίσιμη συνάρτηση;

Παραδείγματα.

Έστω γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ με $T(A) = A + A^T$.
Ποιος είναι ο πυρήνας της T;
Απάντηση: $A \in \ker(T) \Leftrightarrow T(A) = 0 \Leftrightarrow A = -A^T$. Το $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | A^T = -A\}$ αποτελεί γραμμικό υποχώρο του $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Ποιος είναι ο πυρήνας της απεικόνισης $T(f) = f + f'$ όπου f παραγωγίσιμη συνάρτηση; Η απεικόνιση T είναι γραμμική καθώς $T(f+g) = (f+g) + (f+g)' = \underbrace{(f+f')}_{T(f)} + \underbrace{(g+g')}_{T(g)}$ και

Παραδείγματα.

Έστω γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ με $T(A) = A + A^T$.
Ποιος είναι ο πυρήνας της T;
Απάντηση: $A \in \ker(T) \Leftrightarrow T(A) = 0 \Leftrightarrow A = -A^T$. Το $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | A^T = -A\}$ αποτελεί γραμμικό υποχώρο του $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Ποιος είναι ο πυρήνας της απεικόνισης $T(f) = f + f'$ όπου f παραγωγίσιμη συνάρτηση; Η απεικόνιση T είναι γραμμική καθώς

$$T(f+g) = (f+g) + (f+g)' = \underbrace{(f+f')}_{T(f)} + \underbrace{(g+g')}_{T(g)}$$ και

$$T(af) = af + (af)' = a(f+f') = aT(f).$$

Παραδείγματα.

Έστω γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ με $T(A) = A + A^T$.
Ποιος είναι ο πυρήνας της T;
Απάντηση: $A \in \ker(T) \Leftrightarrow T(A) = 0 \Leftrightarrow A = -A^T$. Το
$\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | A^T = -A\}$ αποτελεί γραμμικό υποχώρο του $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Ποιος είναι ο πυρήνας της απεικόνισης $T(f) = f + f'$ όπου f παραγωγίσιμη συνάρτηση; Η απεικόνιση T είναι γραμμική καθώς
$T(f+g) = (f+g) + (f+g)' = \underbrace{(f+f')}_{T(f)} + \underbrace{(g+g')}_{T(g)}$ και
$T(af) = af + (af)' = a(f+f') = aT(f)$.

Έχουμε ότι $f \in \ker(T) \Leftrightarrow T(f) = 0 \Leftrightarrow f + f' = 0$

Παραδείγματα.

Έστω γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ με $T(A) = A + A^T$.
Ποιος είναι ο πυρήνας της T;
Απάντηση: $A \in \ker(T) \Leftrightarrow T(A) = 0 \Leftrightarrow A = -A^T$. Το $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | A^T = -A\}$ αποτελεί γραμμικό υποχώρο του $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Ποιος είναι ο πυρήνας της απεικόνισης $T(f) = f + f'$ όπου f παραγωγίσιμη συνάρτηση; Η απεικόνιση T είναι γραμμική καθώς
$T(f+g) = (f+g) + (f+g)' = \underbrace{(f+f')}_{T(f)} + \underbrace{(g+g')}_{T(g)}$ και
$T(af) = af + (af)' = a(f+f') = aT(f)$.

Έχουμε ότι $f \in \ker(T) \Leftrightarrow T(f) = 0 \Leftrightarrow f + f' = 0 \Leftrightarrow f = Ce^{-x}$ για κάποια σταθερά C.

Πίσω στο K^n: ο μηδενοχώρος.

Έστω πίνακας $A \in K^{m\times n}$ ο οποίος ορίζει την γραμμική απεικόνιση $T_A(x) = Ax$ με $T : K^n \to K^m$.

Πίσω στο K^n: ο μηδενοχώρος.

Έστω πίνακας $A \in K^{m\times n}$ ο οποίος ορίζει την γραμμική απεικόνιση $T_A(x) = Ax$ με $T : K^n \to K^m$. Ορίζουμε τον **μηδενοχώρο** του A ως

$$\mathrm{Null}(A) := \ker(T_A) = \{x \in K^n | Ax = 0\}.$$

Έστω πίνακας $A \in K^{m\times n}$ ο οποίος ορίζει την γραμμική απεικόνιση $T_A(x) = Ax$ με $T : K^n \to K^m$. Ορίζουμε τον **μηδενοχώρο** του A ως

$$\mathrm{Null}(A) := \ker(T_A) = \{x \in K^n | Ax = 0\}.$$

- Ο μηδενοχώρος είναι ένας γραμμικός υποχώρος του K^n.

Πίσω στο K^n: ο μηδενοχώρος.

Έστω πίνακας $A \in K^{m \times n}$ ο οποίος ορίζει την γραμμική απεικόνιση $T_A(x) = Ax$ με $T : K^n \to K^m$. Ορίζουμε τον **μηδενοχώρο** του A ως

$$\mathrm{Null}(A) := \ker(T_A) = \{x \in K^n | Ax = 0\}.$$

- Ο μηδενοχώρος είναι ένας γραμμικός υποχώρος του K^n.
- Όπως έχουμε ξαναπει, αν ο βαθμός του A είναι r τότε ο μηδενοχώρος μπορεί να εκφραστεί ως γραμμική θήκη $n - r$ διανυσμάτων.

Πίσω στο K^n: ο μηδενοχώρος.

Έστω πίνακας $A \in K^{m\times n}$ ο οποίος ορίζει την γραμμική απεικόνιση $T_A(x) = Ax$ με $T : K^n \to K^m$. Ορίζουμε τον **μηδενοχώρο** του A ως

$$\mathrm{Null}(A) := \ker(T_A) = \{x \in K^n | Ax = 0\}.$$

- Ο μηδενοχώρος είναι ένας γραμμικός υποχώρος του K^n.
- Όπως έχουμε ξαναπει, αν ο βαθμός του A είναι r τότε ο μηδενοχώρος μπορεί να εκφραστεί ως γραμμική θήκη $n - r$ διανυσμάτων.

Παράδειγμα: Είναι το $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 2x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 0\}$ γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^4$;

Πίσω στο K^n: ο μηδενοχώρος.

Έστω πίνακας $A \in K^{m \times n}$ ο οποίος ορίζει την γραμμική απεικόνιση $T_A(x) = Ax$ με $T : K^n \to K^m$. Ορίζουμε τον **μηδενοχώρο** του A ως

$$\mathrm{Null}(A) := \ker(T_A) = \{x \in K^n | Ax = 0\}.$$

- Ο μηδενοχώρος είναι ένας γραμμικός υποχώρος του K^n.
- Όπως έχουμε ξαναπει, αν ο βαθμός του A είναι r τότε ο μηδενοχώρος μπορεί να εκφραστεί ως γραμμική θήκη $n - r$ διανυσμάτων.

Παράδειγμα: Είναι το $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 2x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 0\}$ γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^4$; Διότι $W = \mathrm{Null}([2\ 3\ 0\ \ -2])$. ✓

Πίσω στο K^n: ο χώρος στηλών.

Έστω πίνακας $A \in K^{m \times n}$ ο οποίος ορίζει την γραμμική απεικόνιση $T_A(x) = Ax$ με $T : K^n \to K^m$.

Πίσω στο K^n: ο χώρος στηλών.

Έστω πίνακας $A \in K^{m\times n}$ ο οποίος ορίζει την γραμμική απεικόνιση $T_A(x) = Ax$ με $T : K^n \to K^m$. Ορίζουμε τον **χώρο στηλών** του A ως

$$\mathrm{Col}(A) := \mathrm{Range}(T_A) = \{b \in K^m | \exists x \in K^n : Ax = b\}.$$

Πίσω στο K^n: ο χώρος στηλών.

Έστω πίνακας $A \in K^{m\times n}$ ο οποίος ορίζει την γραμμική απεικόνιση $T_A(x) = Ax$ με $T : K^n \to K^m$. Ορίζουμε τον **χώρο στηλών** του A ως

$$\mathrm{Col}(A) := \mathrm{Range}(T_A) = \{b \in K^m | \exists x \in K^n : Ax = b\}.$$

- Ο χώρος στηλών είναι ένας γραμμικός υποχώρος του K^m.

Πίσω στο K^n: ο χώρος στηλών.

Έστω πίνακας $A \in K^{m\times n}$ ο οποίος ορίζει την γραμμική απεικόνιση $T_A(x) = Ax$ με $T : K^n \to K^m$. Ορίζουμε τον **χώρο στηλών** του A ως

$$\mathrm{Col}(A) := \mathrm{Range}(T_A) = \{b \in K^m | \exists x \in K^n : Ax = b\}.$$

- Ο χώρος στηλών είναι ένας γραμμικός υποχώρος του K^m.
- Όπως έχουμε ξαναπει, ο χώρος στηλών είναι η γραμμική θήκη των στηλών του A.

Πίσω στο K^n: ο χώρος στηλών.

Έστω πίνακας $A \in K^{m\times n}$ ο οποίος ορίζει την γραμμική απεικόνιση $T_A(x) = Ax$ με $T : K^n \to K^m$. Ορίζουμε τον **χώρο στηλών** του A ως

$$\mathrm{Col}(A) := \mathrm{Range}(T_A) = \{b \in K^m | \exists x \in K^n : Ax = b\}.$$

- Ο χώρος στηλών είναι ένας γραμμικός υποχώρος του K^m.
- Όπως έχουμε ξαναπει, ο χώρος στηλών είναι η γραμμική θήκη των στηλών του A.

Τι μάθαμε και τι πρέπει να ξέρουμε.

- Τι είναι ο γραμμικός υποχώρος.
- Τι είναι ο πυρήνας και το εύρος μιας γραμμικής απεικόνισης.
- Τι είναι ο μηδενοχώρος και ο χώρος στηλών.

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!