Γραμμική Άλγεβρα

Δωδέκατη Διαλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ένα πρόβλημα.

Βρισκόμαστε σε ένα δωμάτιο με 3 διακόπτες και 3 λάμπες, με όλους τους διακόπες κάτω και όλες τις λάμπες σβηστές.

Ένα πρόβλημα.

Βρισκόμαστε σε ένα δωμάτιο με 3 διακόπτες και 3 λάμπες, με όλους τους διακόπες κάτω και όλες τις λάμπες σβηστές. Σκοπός μας είναι να ανάψουμε όλες τις λάμπες, αν γίνεται,

Ένα πρόβλημα.

Βρισκόμαστε σε ένα δωμάτιο με 3 διακόπτες και 3 λάμπες, με όλους τους διακόπες κάτω και όλες τις λάμπες σβηστές. Σκοπός μας είναι να ανάψουμε όλες τις λάμπες, αν γίνεται, και ξέρουμε ποιος διακόπτης σχετίζεται με **ποιες** λάμπες.

Ένα πρόβλημα.

Βρισκόμαστε σε ένα δωμάτιο με 3 διακόπτες και 3 λάμπες, με όλους τους διακόπες κάτω και όλες τις λάμπες σβηστές. Σκοπός μας είναι να ανάψουμε όλες τις λάμπες, αν γίνεται, και ξέρουμε ποιος διακόπτης σχετίζεται με **ποιες** λάμπες. Δηλαδή, για μία κατάσταση των διακοπτών/ λαμπών,

Ένα πρόβλημα.

Βρισκόμαστε σε ένα δωμάτιο με 3 διακόπτες και 3 λάμπες, με όλους τους διακόπες κάτω και όλες τις λάμπες σβηστές. Σκοπός μας είναι να ανάψουμε όλες τις λάμπες, αν γίνεται, και ξέρουμε ποιος διακόπτης σχετίζεται με **ποιες** λάμπες. Δηλαδή, για μία κατάσταση των διακοπτών/ λαμπών, αν ο i-οστός διακόπτης σχετίζεται με την j-οστή λάμπα,

Ένα πρόβλημα.

Βρισκόμαστε σε ένα δωμάτιο με 3 διακόπτες και 3 λάμπες, με όλους τους διακόπες κάτω και όλες τις λάμπες σβηστές. Σκοπός μας είναι να ανάψουμε όλες τις λάμπες, αν γίνεται, και ξέρουμε ποιος διακόπτης σχετίζεται με **ποιες** λάμπες. Δηλαδή, για μία κατάσταση των διακοπτών/ λαμπών, αν ο i-οστός διακόπτης σχετίζεται με την j-οστή λάμπα, αλλάζοντας την κατάσταση του διακόπτη (από πάνω σε κάτω) αλλάζει η κατάσταση της λάμπας.

Ένα πρόβλημα.

Βρισκόμαστε σε ένα δωμάτιο με 3 διακόπτες και 3 λάμπες, με όλους τους διακόπες κάτω και όλες τις λάμπες σβηστές. Σκοπός μας είναι να ανάψουμε όλες τις λάμπες, αν γίνεται, και ξέρουμε ποιος διακόπτης σχετίζεται με **ποιες** λάμπες. Δηλαδή, για μία κατάσταση των διακοπτών/ λαμπών, αν ο i-οστός διακόπτης σχετίζεται με την j-οστή λάμπα, αλλάζοντας την κατάσταση του διακόπτη (από πάνω σε κάτω) αλλάζει η κατάσταση της λάμπας. Πως πρέπει να ανάψω τους διακόπες αν ξέρω ότι

Ένα πρόβλημα.

Βρισκόμαστε σε ένα δωμάτιο με 3 διακόπτες και 3 λάμπες, με όλους τους διακόπες κάτω και όλες τις λάμπες σβηστές. Σκοπός μας είναι να ανάψουμε όλες τις λάμπες, αν γίνεται, και ξέρουμε ποιος διακόπτης σχετίζεται με **ποιες** λάμπες. Δηλαδή, για μία κατάσταση των διακοπτών/ λαμπών, αν ο i-οστός διακόπτης σχετίζεται με την j-οστή λάμπα, αλλάζοντας την κατάσταση του διακόπτη (από πάνω σε κάτω) αλλάζει η κατάσταση της λάμπας. Πως πρέπει να ανάψω τους διακόπες αν ξέρω ότι

1. Ο πρώτος διακόπτης αλλάζει την πρώτη και την τρίτη λάμπα.
2. Ο δεύτερος διακόπτης αλλάζει την πρώτη, την δεύτερη και την τρίτη λάμπα.
3. Ο τρίτος διακόπτης αλλάζει την πρώτη και την δεύτερη λάμπα.

Κωδικοποίηση προβλήματος.

Έστω $x, y \in \{0, 1\}$ και έστω $x \oplus y$ το *αποκλειστικό* ή, το οποίο ισούται με 1 αν $x = y$, αλλιώς ισούται με 0.

Κωδικοποίηση προβλήματος.

Έστω $x, y \in \{0, 1\}$ και έστω $x \oplus y$ το *αποκλειστικό* ή, το οποίο ισούται με 1 αν $x = y$, αλλιώς ισούται με 0.

Αν οι μεταβλητές $x, y, z \in \{0, 1\}$ αντιστοιχούν στην κατάσταση του πρώτου, δεύτερου, τρίτου διακόπτη αντίστοιχα, τότε θέλουμε να

Κωδικοποίηση προβλήματος.

Έστω $x, y \in \{0, 1\}$ και έστω $x \oplus y$ το *αποκλειστικό* ή, το οποίο ισούται με 1 αν $x = y$, αλλιώς ισούται με 0.

Αν οι μεταβλητές $x, y, z \in \{0, 1\}$ αντιστοιχούν στην κατάσταση του πρώτου, δεύτερου, τρίτου διακόπτη αντίστοιχα, τότε θέλουμε να

$$
\begin{aligned}
x \oplus y \oplus z &= 1 \\
y \oplus z &= 1 \\
x \oplus y &= 1.
\end{aligned}
$$

Η πρώτη σχέση αντιστοιχεί στην απαίτηση η πρώτη λάμπα να είναι αναμμένη, η δεύτερη σχέση στον περιορισμό η δεύτερη λάμπα να είναι αναμμένη.

Επίλυση.

Θέλουμε να λύσουμε το σύστημα

$$x \oplus y \oplus z = 1$$
$$y \oplus z = 1$$
$$x \oplus y = 1$$

Γνωρίζουμε ότι

Επίλυση.

Θέλουμε να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x \oplus y \oplus z &= 1 \\ y \oplus z &= 1 \\ x \oplus y &= 1 \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι $x \oplus x = 0, x \oplus 0 = x$.

Επίλυση.

Θέλουμε να λύσουμε το σύστημα

$$x \oplus y \oplus z = 1$$
$$y \oplus z = 1$$
$$x \oplus y = 1$$

Γνωρίζουμε ότι $x \oplus x = 0, x \oplus 0 = x$.

Κάνοντας $\Gamma_3 := \Gamma_3 \oplus \Gamma_1$

Επίλυση.

Θέλουμε να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x \oplus y \oplus z &= 1 \\ y \oplus z &= 1 \\ x \oplus y &= 1 \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι $x \oplus x = 0, x \oplus 0 = x$.

Κάνοντας $\Gamma_3 := \Gamma_3 \oplus \Gamma_1$ παίρνουμε

$$(x \oplus y) \oplus (x \oplus y \oplus z) = 1 \oplus 1 \Rightarrow$$

Επίλυση.

Θέλουμε να λύσουμε το σύστημα

$$x \oplus y \oplus z = 1$$
$$y \oplus z = 1$$
$$x \oplus y = 1$$

Γνωρίζουμε ότι $x \oplus x = 0, x \oplus 0 = x$.

Κάνοντας $\Gamma_3 := \Gamma_3 \oplus \Gamma_1$ παίρνουμε

$$(x \oplus y) \oplus (x \oplus y \oplus z) = 1 \oplus 1 \Rightarrow$$

$$\underbrace{(x \oplus x)}_{0} \oplus \underbrace{(y \oplus y)}_{0} \oplus z = 0 \Rightarrow$$

Επίλυση.

Θέλουμε να λύσουμε το σύστημα

$$
\begin{aligned}
x \oplus y \oplus z &= 1 \\
y \oplus z &= 1 \\
x \oplus y &= 1
\end{aligned}
$$

Γνωρίζουμε ότι $x \oplus x = 0, x \oplus 0 = x.$

Κάνοντας $\Gamma_3 := \Gamma_3 \oplus \Gamma_1$ παίρνουμε

$$(x \oplus y) \oplus (x \oplus y \oplus z) = 1 \oplus 1 \Rightarrow$$

$$\underbrace{(x \oplus x)}_{0} \oplus \underbrace{(y \oplus y)}_{0} \oplus z = 0 \Rightarrow z = 0$$

Συνέχεια Επίλυσης.

Άρα μείναμε με το (εύκολα επιλύσιμο) σύστημα

$$\begin{aligned} x \oplus y \oplus z &= 1 \\ y \oplus z &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

και έχουμε $z = 0$

Συνέχεια Επίλυσης.

Άρα μείναμε με το (εύκολα επιλύσιμο) σύστημα

$$\begin{aligned} x \oplus y \oplus z &= 1 \\ y \oplus z &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

και έχουμε $z = 0$ άρα και $y = z \oplus 1 = 1$

Συνέχεια Επίλυσης.

Άρα μείναμε με το (εύκολα επιλύσιμο) σύστημα

$$\begin{aligned} x \oplus y \oplus z &= 1 \\ y \oplus z &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

και έχουμε $z = 0$ άρα και $y = z \oplus 1 = 1$ και τέλος $x = y \oplus z \oplus 1 = 0$.

Συνέχεια Επίλυσης.

Άρα μείναμε με το (εύκολα επιλύσιμο) σύστημα

$$\begin{aligned} x \oplus y \oplus z &= 1 \\ y \oplus z &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

και έχουμε $z = 0$ άρα και $y = z \oplus 1 = 1$ και τέλος $x = y \oplus z \oplus 1 = 0$.

Τι κάναμε επί της ουσίας με το σύστημα;

Συνέχεια Επίλυσης.

Άρα μείναμε με το (εύκολα επιλύσιμο) σύστημα

$$
\begin{aligned}
x \oplus y \oplus z &= 1 \\
y \oplus z &= 1 \\
z &= 0
\end{aligned}
$$

και έχουμε $z = 0$ άρα και $y = z \oplus 1 = 1$ και τέλος $x = y \oplus z \oplus 1 = 0$.

Τι κάναμε επί της ουσίας με το σύστημα;

Το φέραμε κάνοντας ‘γραμμοπράξεις’ σε κλιμακωτή μορφή!

Τι θα κάναμε με το πιο κάτω σύστημα;

$$x \oplus y \oplus z \oplus w = 1$$
$$x \oplus z = 1$$
$$y \oplus w = 1$$
$$y \oplus z = 1$$

Απάντηση:

Τι θα κάναμε με το πιο κάτω σύστημα;

$$
\begin{aligned}
x \oplus y \oplus z \oplus w &= 1 \\
x \oplus z &= 1 \\
y \oplus w &= 1 \\
y \oplus z &= 1
\end{aligned}
$$

Απάντηση: Θα φτιάχναμε τον επαξημένο πίνακα

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

Τι θα κάναμε με το πιο κάτω σύστημα;

$$x \oplus y \oplus z \oplus w = 1$$
$$x \oplus z = 1$$
$$y \oplus w = 1$$
$$y \oplus z = 1$$

Απάντηση: Θα φτιάχναμε τον επαξημένο πίνακα

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

και θα το φέρναμε σε κλιμακωτή (ή ανηγμένη κλιμακωτή μορφή) κάνοντας τις αντίστοιχες γραμμοπράξεις.

Τι θα κάναμε με το πιο κάτω σύστημα;

$$
\begin{aligned}
x \oplus y \oplus z \oplus w &= 1 \\
x \oplus z &= 1 \\
y \oplus w &= 1 \\
y \oplus z &= 1
\end{aligned}
$$

Απάντηση: Θα φτιάχναμε τον επαξημένο πίνακα

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

και θα το φέρναμε σε κλιμακωτή (ή ανηγμένη κλιμακωτή μορφή) κάνοντας τις αντίστοιχες γραμμοπράξεις. Ποιες είναι αυτές;

Επιτρεπτές γραμμοπράξεις.

1. Είναι η ανταλλαγή γραμμών επιτρεπτή;

Επιτρεπτές γραμμοπράξεις.

1. Είναι η ανταλλαγή γραμμών επιτρεπτή; ✓

Επιτρεπτές γραμμοπράξεις.

1. Είναι η ανταλλαγή γραμμών επιτρεπτή; ✓
2. Είναι ο πολλαπλασιασμός γραμμής με μη μηδενικό αριθμό επιτρεπτή ;

Επιτρεπτές γραμμοπράξεις.

1. Είναι η ανταλλαγή γραμμών επιτρεπτή; ✓
2. Είναι ο πολλαπλασιασμός γραμμής με μη μηδενικό αριθμό επιτρεπτή ; Περίπου, αρκεί αυτός ο αριθμός να είναι το 1, άρα επί της ουσίας δεν την έχουμε αυτή τη γραμμοπράξη.

Επιτρεπτές γραμμοπράξεις.

1. Είναι η ανταλλαγή γραμμών επιτρεπτή; ✓
2. Είναι ο πολλαπλασιασμός γραμμής με μη μηδενικό αριθμό επιτρεπτή ; Περίπου, αρκεί αυτός ο αριθμός να είναι το 1, άρα επί της ουσίας δεν την έχουμε αυτή τη γραμμοπράξη.
3. Γραμμοπράξη της μορφής $\Gamma_i := \Gamma_i \oplus \Gamma_j$.

Επιτρεπτές γραμμοπράξεις.

1. Είναι η ανταλλαγή γραμμών επιτρεπτή; ✓
2. Είναι ο πολλαπλασιασμός γραμμής με μη μηδενικό αριθμό επιτρεπτή ; Περίπου, αρκεί αυτός ο αριθμός να είναι το 1, άρα επί της ουσίας δεν την έχουμε αυτή τη γραμμοπράξη.
3. Γραμμοπράξη της μορφής $\Gamma_i := \Gamma_i \oplus \Gamma_j$.

Η τρίτη γραμμοπράξη είναι πάλι όλη η ουσία: μας επιτρέπει να **μηδενίζουμε** στοιχεία κάτω από τον εκάστοτε οδηγό για να φέρουμε το σύστημα σε κλιμακωτή μορφή.

Παράδειγμα.

Είχαμε να λύσουμε το $\oplus$ σύστημα με επαυξημένο πίνακα

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \color{red}{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Παράδειγμα.

Είχαμε να λύσουμε το $\oplus$ σύστημα με επαυξημένο πίνακα

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \color{red}{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \Gamma_2 \oplus \Gamma_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \color{red}{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

Παράδειγμα.

Είχαμε να λύσουμε το $\oplus$ σύστημα με επαυξημένο πίνακα

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \Gamma_2 \oplus \Gamma_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow_{\Gamma_3 := \Gamma_3 \oplus \Gamma_2, \Gamma_4 := \Gamma_4 \oplus \Gamma_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Παράδειγμα.

Είχαμε να λύσουμε το $\oplus$ σύστημα με επαυξημένο πίνακα

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \Gamma_2 \oplus \Gamma_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow_{\Gamma_3 := \Gamma_3 \oplus \Gamma_2, \Gamma_4 := \Gamma_4 \oplus \Gamma_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Τι συνέβη;

Δείξαμε ότι η απαλοιφή Gauss είναι χρήσιμη και σε άλλες περιπτώσεις, με τον κατάλληλο ορισμό των γραμμοπράξεων!

Τι συνέβη;

Δείξαμε ότι η απαλοιφή Gauss είναι χρήσιμη και σε άλλες περιπτώσεις, με τον κατάλληλο ορισμό των γραμμοπράξεων!

⋆ Η απορία: Τι κοινό είχαν τα κλασικά γραμμικά συστήματα με συντελεστές στο $\mathbb{R}$ με τα $\oplus$ συστήματα που μόλις είδαμε;

Τι συνέβη;

Δείξαμε ότι η απαλοιφή Gauss είναι χρήσιμη και σε άλλες περιπτώσεις, με τον κατάλληλο ορισμό των γραμμοπράξεων!

$\star$ Η απορία: Τι κοινό είχαν τα κλασικά γραμμικά συστήματα με συντελεστές στο $\mathbb{R}$ με τα $\oplus$ συστήματα που μόλις είδαμε;

$\star$ Η υποψία: Μήπως αυτά που κάναμε μέχρι στιγμής ήταν πιο γενικά από ό,τι νομίζαμε;

Τι συνέβη;

Δείξαμε ότι η απαλοιφή Gauss είναι χρήσιμη και σε άλλες περιπτώσεις, με τον κατάλληλο ορισμό των γραμμοπράξεων!

⋆ Η απορία: Τι κοινό είχαν τα κλασικά γραμμικά συστήματα με συντελεστές στο $\mathbb{R}$ με τα $\oplus$ συστήματα που μόλις είδαμε;

⋆ Η υποψία: Μήπως αυτά που κάναμε μέχρι στιγμής ήταν πιο γενικά από ό,τι νομίζαμε;

⋆ Το ερώτημα: Ποιο είναι το σύνολο των ιδιοτήτων που πρέπει να έχει το περιβάλλον πρόβλημα έτσι ώστε αυτά που κάναμε μέχρι στιγμής για τα γραμμικά συστήματα να δουλεύουν και γι΄ αυτό;

Η έννοια του σώματος.

Ένα *σώμα* K είναι ένα σύνολο (συνήθως αριθμών) στο οποίο υπάρχουν δύο δυαδικές πράξεις, τις οποίες τις λέμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, τις συμβολίζουμε με $+, \cdot$ και ικανοποιούν:

Η έννοια του σώματος.

Ένα *σώμα* K είναι ένα σύνολο (συνήθως αριθμών) στο οποίο υπάρχουν δύο δυαδικές πράξεις, τις οποίες τις λέμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, τις συμβολίζουμε με $+, \cdot$ και ικανοποιούν:

1. Προσεταιριστικότητα, αντιμεταθετικότητα, επιμεριστικότητα.

Η έννοια του σώματος.

Ένα *σώμα* K είναι ένα σύνολο (συνήθως αριθμών) στο οποίο υπάρχουν δύο δυαδικές πράξεις, τις οποίες τις λέμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, τις συμβολίζουμε με $+, \cdot$ και ικανοποιούν:

1. Προσεταιριστικότητα, αντιμεταθετικότητα, επιμεριστικότητα.
2. Υπάρχουν στοιχεία $0, 1 \in K$ ωστε $a + 0 = a, a \cdot 1 = a, \forall a \in K$

Η έννοια του σώματος.

Ένα *σώμα* K είναι ένα σύνολο (συνήθως αριθμών) στο οποίο υπάρχουν δύο δυαδικές πράξεις, τις οποίες τις λέμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, τις συμβολίζουμε με $+, \cdot$ και ικανοποιούν:

1. Προσεταιριστικότητα, αντιμεταθετικότητα, επιμεριστικότητα.
2. Υπάρχουν στοιχεία $0, 1 \in K$ ωστε $a + 0 = a, a \cdot 1 = a, \forall a \in K$
3. $\forall a \in K$ υπάρχει $b \in K$ ώστε $a + b = 0$, και συμβολίζεται με $b = -a$.

Η έννοια του σώματος.

Ένα *σώμα* K είναι ένα σύνολο (συνήθως αριθμών) στο οποίο υπάρχουν δύο δυαδικές πράξεις, τις οποίες τις λέμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, τις συμβολίζουμε με $+, \cdot$ και ικανοποιούν:

1. Προσεταιριστικότητα, αντιμεταθετικότητα, επιμεριστικότητα.
2. Υπάρχουν στοιχεία $0, 1 \in K$ ωστε $a + 0 = a, a \cdot 1 = a, \forall a \in K$
3. $\forall a \in K$ υπάρχει $b \in K$ ώστε $a + b = 0$, και συμβολίζεται με $b = -a$.
4. $\forall a \in K \setminus \{0\}$, υπάρχει $b \in K$ ώστε $a \cdot b = 1$ και συμβολίζεται με a^{-1}.

Η έννοια του σώματος.

Ένα *σώμα* K είναι ένα σύνολο (συνήθως αριθμών) στο οποίο υπάρχουν δύο δυαδικές πράξεις, τις οποίες τις λέμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, τις συμβολίζουμε με $+, \cdot$ και ικανοποιούν:

1. Προσεταιριστικότητα, αντιμεταθετικότητα, επιμεριστικότητα.
2. Υπάρχουν στοιχεία $0, 1 \in K$ ωστε $a + 0 = a, a \cdot 1 = a, \forall a \in K$
3. $\forall a \in K$ υπάρχει $b \in K$ ώστε $a + b = 0$, και συμβολίζεται με $b = -a$.
4. $\forall a \in K \setminus \{0\}$, υπάρχει $b \in K$ ώστε $a \cdot b = 1$ και συμβολίζεται με a^{-1}.

Παραδείγματα: Το $K = \mathbb{R}$ με τον κλασικό ορισμό της πράξης και του πολλαπλασιασμού είναι σώμα,

Η έννοια του σώματος.

Ένα *σώμα* K είναι ένα σύνολο (συνήθως αριθμών) στο οποίο υπάρχουν δύο δυαδικές πράξεις, τις οποίες τις λέμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, τις συμβολίζουμε με $+, \cdot$ και ικανοποιούν:

1. Προσεταιριστικότητα, αντιμεταθετικότητα, επιμεριστικότητα.
2. Υπάρχουν στοιχεία $0, 1 \in K$ ωστε $a + 0 = a, a \cdot 1 = a, \forall a \in K$
3. $\forall a \in K$ υπάρχει $b \in K$ ώστε $a + b = 0$, και συμβολίζεται με $b = -a$.
4. $\forall a \in K \setminus \{0\}$, υπάρχει $b \in K$ ώστε $a \cdot b = 1$ και συμβολίζεται με a^{-1}.

Παραδείγματα: Το $K = \mathbb{R}$ με τον κλασικό ορισμό της πράξης και του πολλαπλασιασμού είναι σώμα, αλλά το $\mathbb{Z}$ **δεν** είναι σώμα.

Η έννοια του σώματος.

Ένα *σώμα* K είναι ένα σύνολο (συνήθως αριθμών) στο οποίο υπάρχουν δύο δυαδικές πράξεις, τις οποίες τις λέμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, τις συμβολίζουμε με $+, \cdot$ και ικανοποιούν:

1. Προσεταιριστικότητα, αντιμεταθετικότητα, επιμεριστικότητα.
2. Υπάρχουν στοιχεία $0, 1 \in K$ ωστε $a + 0 = a, a \cdot 1 = a, \forall a \in K$
3. $\forall a \in K$ υπάρχει $b \in K$ ώστε $a + b = 0$, και συμβολίζεται με $b = -a$.
4. $\forall a \in K \setminus \{0\}$, υπάρχει $b \in K$ ώστε $a \cdot b = 1$ και συμβολίζεται με a^{-1}.

Παραδείγματα: Το $K = \mathbb{R}$ με τον κλασικό ορισμό της πράξης και του πολλαπλασιασμού είναι σώμα, αλλά το $\mathbb{Z}$ **δεν** είναι σώμα.
Το $K = \{0, 1\}$ όπου η πρόθεση είναι το αποκλειστικό ή ($\oplus$) και ο πολλαπλασιασμός όπως τον ξέρουμε (το λογικό ΚΑΙ) **είναι** σώμα.

Η έννοια του σώματος.

Ένα *σώμα* K είναι ένα σύνολο (συνήθως αριθμών) στο οποίο υπάρχουν δύο δυαδικές πράξεις, τις οποίες τις λέμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, τις συμβολίζουμε με $+, \cdot$ και ικανοποιούν:

1. Προσεταιριστικότητα, αντιμεταθετικότητα, επιμεριστικότητα.
2. Υπάρχουν στοιχεία $0, 1 \in K$ ωστε $a + 0 = a, a \cdot 1 = a, \forall a \in K$
3. $\forall a \in K$ υπάρχει $b \in K$ ώστε $a + b = 0$, και συμβολίζεται με $b = -a$.
4. $\forall a \in K \setminus \{0\}$, υπάρχει $b \in K$ ώστε $a \cdot b = 1$ και συμβολίζεται με a^{-1}.

Παραδείγματα: Το $K = \mathbb{R}$ με τον κλασικό ορισμό της πράξης και του πολλαπλασιασμού είναι σώμα, αλλά το $\mathbb{Z}$ **δεν** είναι σώμα.
Το $K = \{0, 1\}$ όπου η πρόθεση είναι το αποκλειστικό ή ($\oplus$) και ο πολλαπλασιασμός όπως τον ξέρουμε (το λογικό ΚΑΙ) **είναι** σώμα.

$\star$ Επιμεριστική ιδιότητα $(x \oplus y) \cdot z = (x \cdot z) \oplus (y \cdot z)$
$\star$ Ύπαρξη αντιστρόφων και ουδετέρων:
$x \oplus 0 = x,$

Η έννοια του σώματος.

Ένα *σώμα* K είναι ένα σύνολο (συνήθως αριθμών) στο οποίο υπάρχουν δύο δυαδικές πράξεις, τις οποίες τις λέμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, τις συμβολίζουμε με $+, \cdot$ και ικανοποιούν:

1. Προσεταιριστικότητα, αντιμεταθετικότητα, επιμεριστικότητα.
2. Υπάρχουν στοιχεία $0, 1 \in K$ ωστε $a + 0 = a, a \cdot 1 = a, \forall a \in K$
3. $\forall a \in K$ υπάρχει $b \in K$ ώστε $a + b = 0$, και συμβολίζεται με $b = -a$.
4. $\forall a \in K \setminus \{0\}$, υπάρχει $b \in K$ ώστε $a \cdot b = 1$ και συμβολίζεται με a^{-1}.

Παραδείγματα: Το $K = \mathbb{R}$ με τον κλασικό ορισμό της πράξης και του πολλαπλασιασμού είναι σώμα, αλλά το $\mathbb{Z}$ **δεν** είναι σώμα.
Το $K = \{0, 1\}$ όπου η πρόθεση είναι το αποκλειστικό ή ($\oplus$) και ο πολλαπλασιασμός όπως τον ξέρουμε (το λογικό ΚΑΙ) **είναι** σώμα.

⋆ Επιμεριστική ιδιότητα $(x \oplus y) \cdot z = (x \cdot z) \oplus (y \cdot z)$
⋆ Ύπαρξη αντιστρόφων και ουδετέρων:
$x \oplus 0 = x, x \oplus 0 = x,$

Η έννοια του σώματος.

Ένα *σώμα* K είναι ένα σύνολο (συνήθως αριθμών) στο οποίο υπάρχουν δύο δυαδικές πράξεις, τις οποίες τις λέμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, τις συμβολίζουμε με $+, \cdot$ και ικανοποιούν:

1. Προσεταιριστικότητα, αντιμεταθετικότητα, επιμεριστικότητα.
2. Υπάρχουν στοιχεία $0, 1 \in K$ ωστε $a + 0 = a, a \cdot 1 = a, \forall a \in K$
3. $\forall a \in K$ υπάρχει $b \in K$ ώστε $a + b = 0$, και συμβολίζεται με $b = -a$.
4. $\forall a \in K \setminus \{0\}$, υπάρχει $b \in K$ ώστε $a \cdot b = 1$ και συμβολίζεται με a^{-1}.

Παραδείγματα: Το $K = \mathbb{R}$ με τον κλασικό ορισμό της πράξης και του πολλαπλασιασμού είναι σώμα, αλλά το $\mathbb{Z}$ **δεν** είναι σώμα.
Το $K = \{0, 1\}$ όπου η πρόθεση είναι το αποκλειστικό ή ($\oplus$) και ο πολλαπλασιασμός όπως τον ξέρουμε (το λογικό ΚΑΙ) **είναι** σώμα.

⋆ Επιμεριστική ιδιότητα $(x \oplus y) \cdot z = (x \cdot z) \oplus (y \cdot z)$
⋆ Ύπαρξη αντιστρόφων και ουδετέρων:
$x \oplus 0 = x, x \oplus 0 = x, x \cdot 1 = x, 1 \cdot 1 = 0.$

Η έννοια του διανυσματικού χώρου.

Ορισμός: Ένας διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K είναι ένα σύνολο από *αντικείμενα*, στα οποία αναφερόμαστε ως **διανύσματα**, για το οποίο ισχύουν τα παρακάτω για κάθε $u, v, w \in V, a, b \in K$.

Η έννοια του διανυσματικού χώρου.

Ορισμός: Ένας διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K είναι ένα σύνολο από *αντικείμενα*, στα οποία αναφερόμαστε ως **διανύσματα**, για το οποίο ισχύουν τα παρακάτω για κάθε $u, v, w \in V, a, b \in K$.

- (κλειστότητα ως προς πρόσθεση) $u + v \in V$

Η έννοια του διανυσματικού χώρου.

Ορισμός: Ένας διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K είναι ένα σύνολο από *αντικείμενα*, στα οποία αναφερόμαστε ως **διανύσματα**, για το οποίο ισχύουν τα παρακάτω για κάθε $u, v, w \in V, a, b \in K$.

- (κλειστότητα ως προς πρόσθεση) $u + v \in V$
- (κλειστότητα ως προς βαθμωτό πολλαπλασιασμό) $au \in V$

Η έννοια του διανυσματικού χώρου.

Ορισμός: Ένας διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K είναι ένα σύνολο από *αντικείμενα*, στα οποία αναφερόμαστε ως **διανύσματα**, για το οποίο ισχύουν τα παρακάτω για κάθε $u, v, w \in V, a, b \in K$.

- (κλειστότητα ως προς πρόσθεση) $u + v \in V$
- (κλειστότητα ως προς βαθμωτό πολλαπλασιασμό) $au \in V$
- $(u + v) + w = u + (v + w)$ και $u + v = v + u$

Η έννοια του διανυσματικού χώρου.

Ορισμός: Ένας διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K είναι ένα σύνολο από *αντικείμενα*, στα οποία αναφερόμαστε ως **διανύσματα**, για το οποίο ισχύουν τα παρακάτω για κάθε $u, v, w \in V, a, b \in K$.

- (κλειστότητα ως προς πρόσθεση) $u + v \in V$
- (κλειστότητα ως προς βαθμωτό πολλαπλασιασμό) $au \in V$
- $(u + v) + w = u + (v + w)$ και $u + v = v + u$
- Υπάρχει *μηδενικό διάνυσμα* $0 \in V$ ώστε $u + 0 = u$.

Η έννοια του διανυσματικού χώρου.

Ορισμός: Ένας διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K είναι ένα σύνολο από *αντικείμενα*, στα οποία αναφερόμαστε ως **διανύσματα**, για το οποίο ισχύουν τα παρακάτω για κάθε $u, v, w \in V, a, b \in K$.

- (κλειστότητα ως προς πρόσθεση) $u + v \in V$
- (κλειστότητα ως προς βαθμωτό πολλαπλασιασμό) $au \in V$
- $(u + v) + w = u + (v + w)$ και $u + v = v + u$
- Υπάρχει *μηδενικό διάνυσμα* $0 \in V$ ώστε $u + 0 = u$.
- Υπάρξει διάνυσμα το οποίο συμβολίζεται ως $-u$ ώστε $u + (-u) = 0$.

Η έννοια του διανυσματικού χώρου.

Ορισμός: Ένας διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K είναι ένα σύνολο από *αντικείμενα*, στα οποία αναφερόμαστε ως **διανύσματα**, για το οποίο ισχύουν τα παρακάτω για κάθε $u, v, w \in V, a, b \in K$.

- (κλειστότητα ως προς πρόσθεση) $u + v \in V$
- (κλειστότητα ως προς βαθμωτό πολλαπλασιασμό) $au \in V$
- $(u + v) + w = u + (v + w)$ και $u + v = v + u$
- Υπάρχει *μηδενικό διάνυσμα* $0 \in V$ ώστε $u + 0 = u$.
- Υπάρξει διάνυσμα το οποίο συμβολίζεται ως $-u$ ώστε $u + (-u) = 0$.
- $a \cdot (bu) = (a \cdot b)u$

Η έννοια του διανυσματικού χώρου.

Ορισμός: Ένας διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K είναι ένα σύνολο από *αντικείμενα*, στα οποία αναφερόμαστε ως **διανύσματα**, για το οποίο ισχύουν τα παρακάτω για κάθε $u, v, w \in V, a, b \in K$.

- (κλειστότητα ως προς πρόσθεση) $u + v \in V$
- (κλειστότητα ως προς βαθμωτό πολλαπλασιασμό) $au \in V$
- $(u + v) + w = u + (v + w)$ και $u + v = v + u$
- Υπάρχει *μηδενικό διάνυσμα* $0 \in V$ ώστε $u + 0 = u$.
- Υπάρξει διάνυσμα το οποίο συμβολίζεται ως $-u$ ώστε $u + (-u) = 0$.
- $a \cdot (bu) = (a \cdot b)u$
- $1 \cdot u = u$, όπου 1 το ουδέτερο στοιχείο πολλαπλασιασμού στο K.

Η έννοια του διανυσματικού χώρου.

Ορισμός: Ένας διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K είναι ένα σύνολο από *αντικείμενα*, στα οποία αναφερόμαστε ως **διανύσματα**, για το οποίο ισχύουν τα παρακάτω για κάθε $u, v, w \in V, a, b \in K$.

- (κλειστότητα ως προς πρόσθεση) $u + v \in V$
- (κλειστότητα ως προς βαθμωτό πολλαπλασιασμό) $au \in V$
- $(u + v) + w = u + (v + w)$ και $u + v = v + u$
- Υπάρχει *μηδενικό διάνυσμα* $0 \in V$ ώστε $u + 0 = u$.
- Υπάρξει διάνυσμα το οποίο συμβολίζεται ως $-u$ ώστε $u + (-u) = 0$.
- $a \cdot (bu) = (a \cdot b)u$
- $1 \cdot u = u$, όπου 1 το ουδέτερο στοιχείο πολλαπλασιασμού στο K.
- $a(u + v) = au + av$

Η έννοια του διανυσματικού χώρου.

Ορισμός: Ένας διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K είναι ένα σύνολο από *αντικείμενα*, στα οποία αναφερόμαστε ως **διανύσματα**, για το οποίο ισχύουν τα παρακάτω για κάθε $u, v, w \in V, a, b \in K$.

- (κλειστότητα ως προς πρόσθεση) $u + v \in V$
- (κλειστότητα ως προς βαθμωτό πολλαπλασιασμό) $au \in V$
- $(u + v) + w = u + (v + w)$ και $u + v = v + u$
- Υπάρχει *μηδενικό διάνυσμα* $0 \in V$ ώστε $u + 0 = u$.
- Υπάρξει διάνυσμα το οποίο συμβολίζεται ως $-u$ ώστε $u + (-u) = 0$.
- $a \cdot (bu) = (a \cdot b)u$
- $1 \cdot u = u$, όπου 1 το ουδέτερο στοιχείο πολλαπλασιασμού στο K.
- $a(u + v) = au + av$
- $(a + b)u = au + bu$.

Γιατί ορίσαμε έτσι τον διανυσματικό χώρο;

Γιατί ορίσαμε έτσι τον διανυσματικό χώρο;

Η απάντηση: Είναι το ελάχιστο σύνολο ιδιοτήτων που απαιτούνται έτσι ώστε τα θεωρήματα και οι έννοιες που έχουμε ήδη μέχρι στιγμής (γραμμική ανεξαρτησία, απαλοιφή Gauss, περιγραφή λύσεων συστημάτων μέσω γραμμική θήκης κλπ) ισχύουν.

Γιατί ορίσαμε έτσι τον διανυσματικό χώρο;

Η απάντηση: Είναι το ελάχιστο σύνολο ιδιοτήτων που απαιτούνται έτσι ώστε τα θεωρήματα και οι έννοιες που έχουμε ήδη μέχρι στιγμής (γραμμική ανεξαρτησία, απαλοιφή Gauss, περιγραφή λύσεων συστημάτων μέσω γραμμική θήκης κλπ) ισχύουν.

Ή πιο απλά: μια μαθηματική δομή στο οποίο η έννοια του γραμμικού συνδυασμού και ανεξαρτησίας βγάζει νόημα.

Παραδείγματα.

- Το $V = \mathbb{R}^n$ με $K = \mathbb{R}$ **είναι** διανυσματικός χώρος.

Παραδείγματα.

- Το $V = \mathbb{R}^n$ με $K = \mathbb{R}$ **είναι** διανυσματικός χώρος.
- Το $V = \mathbb{Z}^n$ με $K = \mathbb{R}$

Παραδείγματα.

- Το $V = \mathbb{R}^n$ με $K = \mathbb{R}$ **είναι** διανυσματικός χώρος.
- Το $V = \mathbb{Z}^n$ με $K = \mathbb{R}$ **δεν** είναι διανυσματικός χώρος ($\frac{1}{2}u \notin \mathbb{V}$)

Παραδείγματα.

- Το $V = \mathbb{R}^n$ με $K = \mathbb{R}$ **είναι** διανυσματικός χώρος.
- Το $V = \mathbb{Z}^n$ με $K = \mathbb{R}$ **δεν** είναι διανυσματικός χώρος $(\frac{1}{2}u \notin \mathbb{V})$
- Το $\{0,1\}^n$ με $K = \{0,1\}$ και πρόσθεση $= \oplus$ **είναι** διανυσματικός χώρος.

Παραδείγματα.

- Το $V = \mathbb{R}^n$ με $K = \mathbb{R}$ **είναι** διανυσματικός χώρος.
- Το $V = \mathbb{Z}^n$ με $K = \mathbb{R}$ **δεν** είναι διανυσματικός χώρος ($\frac{1}{2}u \notin \mathbb{V}$)
- Το $\{0,1\}^n$ με $K = \{0,1\}$ και πρόσθεση $= \oplus$ **είναι** διανυσματικός χώρος.
- Το σύνολο $V = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ με $K = \mathbb{R}$

Παραδείγματα.

- Το $V = \mathbb{R}^n$ με $K = \mathbb{R}$ **είναι** διανυσματικός χώρος.
- Το $V = \mathbb{Z}^n$ με $K = \mathbb{R}$ **δεν** είναι διανυσματικός χώρος $(\frac{1}{2}u \notin \mathbb{V})$
- Το $\{0,1\}^n$ με $K = \{0,1\}$ και πρόσθεση $= \oplus$ **είναι** διανυσματικός χώρος.
- Το σύνολο $V = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ με $K = \mathbb{R}$ **δεν** είναι διανυσματικός χώρος, διότι $(0,1) \in V$ αλλά $2 \cdot (1,0) \notin V$.

Παραδείγματα.

- Το $V = \mathbb{R}^n$ με $K = \mathbb{R}$ **είναι** διανυσματικός χώρος.
- Το $V = \mathbb{Z}^n$ με $K = \mathbb{R}$ **δεν** είναι διανυσματικός χώρος ($\frac{1}{2}u \notin \mathbb{V}$)
- Το $\{0,1\}^n$ με $K = \{0,1\}$ και πρόσθεση $= \oplus$ **είναι** διανυσματικός χώρος.
- Το σύνολο $V = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ με $K = \mathbb{R}$ **δεν** είναι διανυσματικός χώρος, διότι $(0,1) \in V$ αλλά $2 \cdot (1,0) \notin V$.
- Το σύνολο όλων των παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $K = \mathbb{R}$

Παραδείγματα.

- Το $V = \mathbb{R}^n$ με $K = \mathbb{R}$ **είναι** διανυσματικός χώρος.
- Το $V = \mathbb{Z}^n$ με $K = \mathbb{R}$ **δεν** είναι διανυσματικός χώρος ($\frac{1}{2}u \notin \mathbb{V}$)
- Το $\{0,1\}^n$ με $K = \{0,1\}$ και πρόσθεση $= \oplus$ **είναι** διανυσματικός χώρος.
- Το σύνολο $V = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ με $K = \mathbb{R}$ **δεν** είναι διανυσματικός χώρος, διότι $(0,1) \in V$ αλλά $2 \cdot (1,0) \notin V$.
- Το σύνολο όλων των παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $K = \mathbb{R}$ **είναι** διανυσματικός χώρος.

Παραδείγματα.

- Το $V = \mathbb{R}^n$ με $K = \mathbb{R}$ **είναι** διανυσματικός χώρος.
- Το $V = \mathbb{Z}^n$ με $K = \mathbb{R}$ **δεν** είναι διανυσματικός χώρος $(\frac{1}{2}u \notin \mathbb{V})$
- Το $\{0,1\}^n$ με $K = \{0,1\}$ και πρόσθεση $= \oplus$ **είναι** διανυσματικός χώρος.
- Το σύνολο $V = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ με $K = \mathbb{R}$ **δεν** είναι διανυσματικός χώρος, διότι $(0,1) \in V$ αλλά $2 \cdot (1,0) \notin V$.
- Το σύνολο όλων των παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $K = \mathbb{R}$ **είναι** διανυσματικός χώρος.
- Το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς και $K = \mathbb{R}$

Παραδείγματα.

- Το $V = \mathbb{R}^n$ με $K = \mathbb{R}$ **είναι** διανυσματικός χώρος.
- Το $V = \mathbb{Z}^n$ με $K = \mathbb{R}$ **δεν** είναι διανυσματικός χώρος ($\frac{1}{2}u \notin \mathbb{V}$)
- Το $\{0,1\}^n$ με $K = \{0,1\}$ και πρόσθεση $= \oplus$ **είναι** διανυσματικός χώρος.
- Το σύνολο $V = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ με $K = \mathbb{R}$ **δεν** είναι διανυσματικός χώρος, διότι $(0,1) \in V$ αλλά $2 \cdot (1,0) \notin V$.
- Το σύνολο όλων των παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $K = \mathbb{R}$ **είναι** διανυσματικός χώρος.
- Το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς και $K = \mathbb{R}$ **είναι** διανυσματικός χώρος.

Τι μάθαμε και τι πρέπει να ξέρουμε.

- Την έννοια του σώματος και του διανυσματικού χώρου.
- Ότι, όπως θα δούμε και στην επόμενη διάλεξη, γενικεύει ό,τι έχουμε δει μέχρι στιγμής.

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!