Γραμμική Άλγεβρα

Δέκατη Διαλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Υπενθύμιση για ορίζουσες.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και έστω A_{jk} ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τον A την j-οστή γραμμή και την k-οστή στήλη.

Υπενθύμιση για ορίζουσες.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και έστω A_{jk} ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τον A την j-οστή γραμμή και την k-οστή στήλη.
Έστω $C_{jk} = (-1)^{j+k} det(A_{jk})$.

Υπενθύμιση για ορίζουσες.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω A_{jk} ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τον A την j-οστή γραμμή και την k-οστή στήλη. Έστω $C_{jk} = (-1)^{j+k} det(A_{jk})$. Τότε η ορίζουσα $det(A)$ ισούται για οποιοδήποτε i με (ανάπτυγμα κατά i-οστή γραμμή):

Υπενθύμιση για ορίζουσες.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και έστω A_{jk} ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τον A την j-οστή γραμμή και την k-οστή στήλη. Έστω $C_{jk} = (-1)^{j+k} det(A_{jk})$. Τότε η ορίζουσα $det(A)$ ισούται για οποιοδήποτε i με (ανάπτυγμα κατά i-οστή γραμμή):

$$det(A) = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \ldots + a_{in} C_{in}$$

και με (ανάπτυγμα κατά i-οστή στήλη):

Υπενθύμιση για ορίζουσες.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω A_{jk} ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τον A την j-οστή γραμμή και την k-οστή στήλη. Έστω $C_{jk} = (-1)^{j+k} det(A_{jk})$. Τότε η ορίζουσα $det(A)$ ισούται για οποιοδήποτε i με (ανάπτυγμα κατά i-οστή γραμμή):

$$det(A) = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \ldots + a_{in} C_{in}$$

και με (ανάπτυγμα κατά i-οστή στήλη):

$$det(A) = a_{1i} \cdot C_{1i} + a_{2i} C_{2i} + \ldots + a_{ni} C_{ni}$$

Ιδιότητες Ορίζουσας: Ανταλλαγή Γραμμών.

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *και έστω ο πίνακας* B *που προκύπτει αν ανταλλάξουμε δύο γραμμές του* A. *Τότε* $det(A) = -det(B)$.

Ιδιότητες Ορίζουσας: Ανταλλαγή Γραμμών.

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *και έστω ο πίνακας* B *που προκύπτει αν ανταλλάξουμε δύο γραμμές του* A. *Τότε* $det(A) = -det(B)$.

Απόδειξη για 2×2 πίνακες:

Ιδιότητες Ορίζουσας: Ανταλλαγή Γραμμών.

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *και έστω ο πίνακας* B *που προκύπτει αν ανταλλάξουμε δύο γραμμές του* A*. Τότε* $det(A) = -det(B)$.

Απόδειξη για 2×2 πίνακες: Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

Ιδιότητες Ορίζουσας: Ανταλλαγή Γραμμών.

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *και έστω ο πίνακας* B *που προκύπτει αν ανταλλάξουμε δύο γραμμές του* A. *Τότε* $det(A) = -det(B)$.

Απόδειξη για 2×2 πίνακες: Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες Ορίζουσας: Ανταλλαγή Γραμμών.

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και έστω ο πίνακας B που προκύπτει αν ανταλλάξουμε δύο γραμμές του A. Τότε $det(A) = -det(B)$.

Απόδειξη για 2×2 πίνακες: Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

Τότε $det(A) = ad - cb$

Ιδιότητες Ορίζουσας: Ανταλλαγή Γραμμών.

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *και έστω ο πίνακας* B *που προκύπτει αν ανταλλάξουμε δύο γραμμές του* A. *Τότε* $det(A) = -det(B)$.

Απόδειξη για 2×2 πίνακες: Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

Τότε $det(A) = ad - cb$ και

$$det(B) = cb - ad = -(ad - cb) = -det(A)$$

Η γενική απόδειξη με επαγωγή.

Σημαντικό Επακόλουθο.

Πόρισμα

Αν ένας πίνακας A *έχει δύο γραμμές ίδιες, τότε* $det(A) = 0$.

Σημαντικό Επακόλουθο.

Πόρισμα

Αν ένας πίνακας A έχει δύο γραμμές ίδιες, τότε $det(A) = 0$.

⋆ Απόδειξη: Έστω j, k οι δύο γραμμές του A οι οποίες είναι ίσες.

Σημαντικό Επακόλουθο.

Πόρισμα

Αν ένας πίνακας A έχει δύο γραμμές ίδιες, τότε $det(A) = 0$.

$\star$ Απόδειξη: Έστω j, k οι δύο γραμμές του A οι οποίες είναι ίσες. Έστω B ο πίνακας που προκύπτει από τον A αν ανταλλάξουμε τις δύο αυτές γραμμές.

Σημαντικό Επακόλουθο.

Πόρισμα

Αν ένας πίνακας A έχει δύο γραμμές ίδιες, τότε $det(A) = 0$.

⋆ Απόδειξη: Έστω j, k οι δύο γραμμές του A οι οποίες είναι ίσες. Έστω B ο πίνακας που προκύπτει από τον A αν ανταλλάξουμε τις δύο αυτές γραμμές. Τότε από το προηγούμενο έχουμε $det(A) = -det(B)$.

Σημαντικό Επακόλουθο.

Πόρισμα

Αν ένας πίνακας A έχει δύο γραμμές ίδιες, τότε $det(A) = 0$.

⋆ Απόδειξη: Έστω j, k οι δύο γραμμές του A οι οποίες είναι ίσες. Έστω B ο πίνακας που προκύπτει από τον A αν ανταλλάξουμε τις δύο αυτές γραμμές. Τότε από το προηγούμενο έχουμε $det(A) = -det(B)$.Ωστόσο $A = B$ διότι οι γραμμές είναι ίδιες, άρα και $det(A) = det(B)$.

Σημαντικό Επακόλουθο.

Πόρισμα

Αν ένας πίνακας A έχει δύο γραμμές ίδιες, τότε $det(A) = 0$.

⋆ Απόδειξη: Έστω j, k οι δύο γραμμές του A οι οποίες είναι ίσες. Έστω B ο πίνακας που προκύπτει από τον A αν ανταλλάξουμε τις δύο αυτές γραμμές. Τότε από το προηγούμενο έχουμε $det(A) = -det(B)$.Ωστόσο $A = B$ διότι οι γραμμές είναι ίδιες, άρα και $det(A) = det(B)$. Οι δύο σχέσεις δίνουν $det(A) = 0$.

Σημαντικό Επακόλουθο.

Πόρισμα

Αν ένας πίνακας A έχει δύο γραμμές ίδιες, τότε $det(A) = 0$.

⋆ Απόδειξη: Έστω j, k οι δύο γραμμές του A οι οποίες είναι ίσες. Έστω B ο πίνακας που προκύπτει από τον A αν ανταλλάξουμε τις δύο αυτές γραμμές. Τότε από το προηγούμενο έχουμε $det(A) = -det(B)$.Ωστόσο $A = B$ διότι οι γραμμές είναι ίδιες, άρα και $det(A) = det(B)$. Οι δύο σχέσεις δίνουν $det(A) = 0$.

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *και έστω* $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *ο πίνακας που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε* ***μια*** *γραμμή ή στήλη του* A *με* $\beta \in \mathbb{R}$. *Τότε* $det(B) = \beta \cdot det(A)$.

⋆ Απόδειξη: Έστω ότι η γραμμή που πολλαπλασιάζεται είναι η i. Τότε αναπτύσσοντας ως προς την γραμμή i

Ιδιότητες Ορίζουσας: Πολλαπλασιασμός με αριθμός

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και έστω $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ο πίνακας που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε ***μια*** *γραμμή ή στήλη του A με $\beta \in \mathbb{R}$. Τότε $det(B) = \beta \cdot det(A)$.*

⋆ Απόδειξη: Έστω ότι η γραμμή που πολλαπλασιάζεται είναι η i. Τότε αναπτύσσοντας ως προς την γραμμή i

$$det(A) = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in},$$

Ιδιότητες Ορίζουσας: Πολλαπλασιασμός με αριθμός

Θεώρημα

*Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ο πίνακας που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε **μια** γραμμή ή στήλη του A με $\beta \in \mathbb{R}$. Τότε $det(B) = \beta \cdot det(A)$.*

⋆ Απόδειξη: Έστω ότι η γραμμή που πολλαπλασιάζεται είναι η i. Τότε αναπτύσσοντας ως προς την γραμμή i

$$det(A) = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in},$$

Και

$$det(B) = \beta \cdot a_{i1} \cdot C_{i1} + \beta \cdot a_{i2}C_{i2} + \ldots + \beta \cdot a_{in}C_{in} =$$

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και έστω $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ο πίνακας που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε ***μια*** *γραμμή ή στήλη του A με $\beta \in \mathbb{R}$. Τότε $det(B) = \beta \cdot det(A)$.*

⋆ Απόδειξη: Έστω ότι η γραμμή που πολλαπλασιάζεται είναι η i. Τότε αναπτύσσοντας ως προς την γραμμή i

$$det(A) = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in},$$

Και

$$det(B) = \beta \cdot a_{i1} \cdot C_{i1} + \beta \cdot a_{i2}C_{i2} + \ldots + \beta \cdot a_{in}C_{in} = \beta \cdot det(A)$$

Ιδιότητες Ορίζουσας: Προσθέτοντας δύο γραμμές

Θεώρημα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *και έστω δύο γραμμές* $i \neq j$. *Έστω ο πίνακας* B *που προκύπτει από τον* A *με την γραμμοπράξη* $\Gamma_i := \Gamma_i + \beta \cdot \Gamma_j$ *(κοινώς προσθέτουμε* β *φορές την* j*-οστή γραμμή στην* i*-οστή). Τότε* $det(B) = det(A)$. *Όμοια και για την γραμμοπράξη με στήλες.*

Ιδιότητες Ορίζουσας: Προσθέτοντας δύο γραμμές

Θεώρημα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *και έστω δύο γραμμές* $i \neq j$. *Έστω ο πίνακας* B *που προκύπτει από τον* A *με την γραμμοπράξη* $\Gamma_i := \Gamma_i + \beta \cdot \Gamma_j$ *(κοινώς προσθέτουμε* β *φορές την* j*-οστή γραμμή στην* i*-οστή). Τότε* $det(B) = det(A)$. *Όμοια και για την γραμμοπράξη με στήλες.*

⋆ 'Απόδειξη': Ας το κάνουμε για $i = 1, j = 2$. Η i-οστή (πρώτη) γραμμή του B ισούται με

$$\begin{bmatrix} a_{11} + \beta \cdot a_{21} & a_{12} + \beta \cdot a_{22}, & \dots \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες Ορίζουσας: Προσθέτοντας δύο γραμμές

Θεώρημα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και έστω δύο γραμμές $i \neq j$. Έστω ο πίνακας B που προκύπτει από τον A με την γραμμοπράξη $\Gamma_i := \Gamma_i + \beta \cdot \Gamma_j$ (κοινώς προσθέτουμε β φορές την j-οστή γραμμή στην i-οστή). Τότε $det(B) = det(A)$. Όμοια και για την γραμμοπράξη με στήλες.

$\star$ 'Απόδειξη': Ας το κάνουμε για $i = 1, j = 2$. Η i-οστή (πρώτη) γραμμή του B ισούται με

$$\begin{bmatrix} a_{11} + \beta \cdot a_{21} & a_{12} + \beta \cdot a_{22}, & \dots \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσοντας τον B ως προς την i-οστή γραμμή έχουμε

$$det(B) = (a_{11} + \beta a_{21}) \cdot C_{11} + (a_{12} + \beta a_{22}) C_{12} + \ldots =$$

Θεώρημα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και έστω δύο γραμμές $i \neq j$. Έστω ο πίνακας B που προκύπτει από τον A με την γραμμοπράξη $\Gamma_i := \Gamma_i + \beta \cdot \Gamma_j$ (κοινώς προσθέτουμε β φορές την j-οστή γραμμή στην i-οστή). Τότε $det(B) = det(A)$. Όμοια και για την γραμμοπράξη με στήλες.

⋆ 'Απόδειξη': Ας το κάνουμε για $i = 1, j = 2$. Η i-οστή (πρώτη) γραμμή του B ισούται με

$$\begin{bmatrix} a_{11} + \beta \cdot a_{21} & a_{12} + \beta \cdot a_{22}, & \dots \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσοντας τον B ως προς την i-οστή γραμμή έχουμε

$$det(B) = (a_{11} + \beta a_{21}) \cdot C_{11} + (a_{12} + \beta a_{22})C_{12} + \ldots =$$

$$(a_{i1}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots) + \beta(a_{21}C_{11} + a_{22}C_{12} + \ldots) =$$

Ιδιότητες Ορίζουσας: Προσθέτοντας δύο γραμμές

Θεώρημα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *και έστω δύο γραμμές* $i \neq j$. *Έστω ο πίνακας* B *που προκύπτει από τον* A *με την γραμμοπράξη* $\Gamma_i := \Gamma_i + \beta \cdot \Gamma_j$ *(κοινώς προσθέτουμε* β *φορές την* j*-οστή γραμμή στην* i*-οστή). Τότε* $det(B) = det(A)$. *Όμοια και για την γραμμοπράξη με στήλες.*

⋆ 'Απόδειξη': Ας το κάνουμε για $i = 1, j = 2$. Η i-οστή (πρώτη) γραμμή του B ισούται με

$$\begin{bmatrix} a_{11} + \beta \cdot a_{21} & a_{12} + \beta \cdot a_{22}, & \dots \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσοντας τον B ως προς την i-οστή γραμμή έχουμε

$$det(B) = (a_{11} + \beta a_{21}) \cdot C_{11} + (a_{12} + \beta a_{22}) C_{12} + \dots =$$

$$(a_{i1} C_{11} + a_{12} C_{12} + \dots) + \beta (a_{21} C_{11} + a_{22} C_{12} + \dots) = det(A) + 0 = det(A)$$

Γραμμοπράξεις και ορίζουσα.

Η ανταλλαγή γραμμών, ο πολλαπλασιασμός γραμμής με αριθμό και πρόσθεση μιας γραμμής (ή μιας στήλης) σε μια άλλη γραμμή (ή στήλη) είναι οι γνωστές μας *γραμμοπράξεις*.

Γραμμοπράξεις και ορίζουσα.

Η ανταλλαγή γραμμών, ο πολλαπλασιασμός γραμμής με αριθμό και πρόσθεση μιας γραμμής (ή μιας στήλης) σε μια άλλη γραμμή (ή στήλη) είναι οι γνωστές μας *γραμμοπράξεις*.

Δείξαμε τι συμβαίνει σε μια ορίζουσα υπό καθεμία από αυτές τις γραμμοπράξεις.

Γραμμοπράξεις και ορίζουσα.

Η ανταλλαγή γραμμών, ο πολλαπλασιασμός γραμμής με αριθμό και πρόσθεση μιας γραμμής (ή μιας στήλης) σε μια άλλη γραμμή (ή στήλη) είναι οι γνωστές μας *γραμμοπράξεις*.

Δείξαμε τι συμβαίνει σε μια ορίζουσα υπό καθεμία από αυτές τις γραμμοπράξεις.

- Ανταλλαγή γραμμών: αλλαγή προσήμου.
- Πολλαπλασιασμός γραμμής (ή στήλης) με αριθμό: πολλαπλασιασμός της ορίζουσας.
- Πρόσθεση κάποιου πολλαπλάσιου μιας γραμμής (ή στήλης) σε μία άλλη (αντίστοιχα στήλη): ίδια ορίζουσα.

Ορίζουσες και Αντιστρεψιμότητα.

Θεώρημα

Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο $det(A) \neq 0$.

Ορίζουσες και Αντιστρεψιμότητα.

Θεώρημα

Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο $det(A) \neq 0$.

$\star$ Απόδειξη: Φτιάχνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και κάνουμε γραμμοπράξεις για να φέρουμε τον αριστερό πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

Θεώρημα

Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο $det(A) \neq 0$.

$\star$ Απόδειξη: Φτιάχνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και κάνουμε γραμμοπράξεις για να φέρουμε τον αριστερό πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.Έτσι δημιουργείται μια ακολουθία πινάκων $A \Rightarrow A^{(1)} \Rightarrow A^{(2)} \Rightarrow \ldots \Rightarrow A^{(p)}$.

Ορίζουσες και Αντιστρεψιμότητα.

Θεώρημα

Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο $det(A) \neq 0$.

$\star$ Απόδειξη: Φτιάχνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και κάνουμε γραμμοπράξεις για να φέρουμε τον αριστερό πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.Έτσι δημιουργείται μια ακολουθία πινάκων $A \Rightarrow A^{(1)} \Rightarrow A^{(2)} \Rightarrow \ldots \Rightarrow A^{(p)}$.
Ο $A^{(p)}$ είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και άρα αν είναι τέλεια σκάλα (δηλαδή A αντιστρέψιμος) έχουμε $det(A^{(p)}) = 1$,

Ορίζουσες και Αντιστρεψιμότητα.

Θεώρημα

Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο $det(A) \neq 0$.

⋆ Απόδειξη: Φτιάχνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και κάνουμε γραμμοπράξεις για να φέρουμε τον αριστερό πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.Έτσι δημιουργείται μια ακολουθία πινάκων $A \Rightarrow A^{(1)} \Rightarrow A^{(2)} \Rightarrow \ldots \Rightarrow A^{(p)}$.
Ο $A^{(p)}$ είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και άρα αν είναι τέλεια σκάλα (δηλαδή A αντιστρέψιμος) έχουμε $det(A^{(p)}) = 1$, αλλιώς υπάρχει μια γραμμή όλη μηδενικά και άρα $det(A^{(p)}) = 0$.

Θεώρημα

Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο $det(A) \neq 0$.

⋆ Απόδειξη: Φτιάχνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και κάνουμε γραμμοπράξεις για να φέρουμε τον αριστερό πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.Έτσι δημιουργείται μια ακολουθία πινάκων $A \Rightarrow A^{(1)} \Rightarrow A^{(2)} \Rightarrow \ldots \Rightarrow A^{(p)}$.
Ο $A^{(p)}$ είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και άρα αν είναι τέλεια σκάλα (δηλαδή A αντιστρέψιμος) έχουμε $det(A^{(p)}) = 1$, αλλιώς υπάρχει μια γραμμή όλη μηδενικά και άρα $det(A^{(p)}) = 0$.
Άρα $det(A^{(p)}) \neq 0 \iff A$ είναι αντιστρέψιμος.

Θεώρημα

Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο $det(A) \neq 0$.

⋆ Απόδειξη: Φτιάχνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και κάνουμε γραμμοπράξεις για να φέρουμε τον αριστερό πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.Έτσι δημιουργείται μια ακολουθία πινάκων $A \Rightarrow A^{(1)} \Rightarrow A^{(2)} \Rightarrow \ldots \Rightarrow A^{(p)}$.
Ο $A^{(p)}$ είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και άρα αν είναι τέλεια σκάλα (δηλαδή A αντιστρέψιμος) έχουμε $det(A^{(p)}) = 1$, αλλιώς υπάρχει μια γραμμή όλη μηδενικά και άρα $det(A^{(p)}) = 0$.
Άρα $det(A^{(p)}) \neq 0 \Longleftrightarrow A$ είναι αντιστρέψιμος. Όμως

$$det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow$$

Θεώρημα

Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο $det(A) \neq 0$.

⋆ Απόδειξη: Φτιάχνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και κάνουμε γραμμοπράξεις για να φέρουμε τον αριστερό πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.Έτσι δημιουργείται μια ακολουθία πινάκων $A \Rightarrow A^{(1)} \Rightarrow A^{(2)} \Rightarrow \ldots \Rightarrow A^{(p)}$.
Ο $A^{(p)}$ είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και άρα αν είναι τέλεια σκάλα (δηλαδή A αντιστρέψιμος) έχουμε $det(A^{(p)}) = 1$, αλλιώς υπάρχει μια γραμμή όλη μηδενικά και άρα $det(A^{(p)}) = 0$.
Άρα $det(A^{(p)}) \neq 0 \iff A$ είναι αντιστρέψιμος. Όμως

$$det(A) \neq 0 \iff det(A^{(1)}) \neq 0 \iff$$

Θεώρημα

Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο $det(A) \neq 0$.

⋆ Απόδειξη: Φτιάχνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και κάνουμε γραμμοπράξεις για να φέρουμε τον αριστερό πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.΄Ετσι δημιουργείται μια ακολουθία πινάκων $A \Rightarrow A^{(1)} \Rightarrow A^{(2)} \Rightarrow \ldots \Rightarrow A^{(p)}$.
Ο $A^{(p)}$ είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και άρα αν είναι τέλεια σκάλα (δηλαδή A αντιστρέψιμος) έχουμε $det(A^{(p)}) = 1$, αλλιώς υπάρχει μια γραμμή όλη μηδενικά και άρα $det(A^{(p)}) = 0$.
Άρα $det(A^{(p)}) \neq 0 \iff A$ είναι αντιστρέψιμος. Όμως

$$det(A) \neq 0 \iff det(A^{(1)}) \neq 0 \iff \ldots \iff det(A^{(p)}) \neq 0,$$

Ορίζουσες και Αντιστρεψιμότητα.

Θεώρημα

Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο $det(A) \neq 0$.

⋆ Απόδειξη: Φτιάχνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και κάνουμε γραμμοπράξεις για να φέρουμε τον αριστερό πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.Έτσι δημιουργείται μια ακολουθία πινάκων $A \Rightarrow A^{(1)} \Rightarrow A^{(2)} \Rightarrow \ldots \Rightarrow A^{(p)}$.
Ο $A^{(p)}$ είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και άρα αν είναι τέλεια σκάλα (δηλαδή A αντιστρέψιμος) έχουμε $det(A^{(p)}) = 1$, αλλιώς υπάρχει μια γραμμή όλη μηδενικά και άρα $det(A^{(p)}) = 0$.
Άρα $det(A^{(p)}) \neq 0 \Longleftrightarrow A$ είναι αντιστρέψιμος. Όμως

$$det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow det(A^{(1)}) \neq 0 \Longleftrightarrow \ \ldots \Longleftrightarrow det(A^{(p)}) \neq 0,$$

και άρα $det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow A$ είναι αντιστρέψιμος.

Παράδειγμα I.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με ορίζουσα 11.

Παράδειγμα I.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή,

Παράδειγμα I.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη,

Παράδειγμα Ι.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη, μετά ανταλλάσοντας την τρίτη στήλη με την δεύτερη στήλη,

Παράδειγμα I.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη, μετά ανταλλάσοντας την τρίτη στήλη με την δεύτερη στήλη, και συνέχεια πολλαπλασιάζοντας όλες τις στήλες με 2.

Παράδειγμα Ι.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη, μετά ανταλλάσοντας την τρίτη στήλη με την δεύτερη στήλη, και συνέχεια πολλαπλασιάζοντας όλες τις στήλες με 2. Ποια είναι η ορίζουσα του B;

Παράδειγμα I.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη, μετά ανταλλάσοντας την τρίτη στήλη με την δεύτερη στήλη, και συνέχεια πολλαπλασιάζοντας όλες τις στήλες με 2. Ποια είναι η ορίζουσα του B;

1. Ανταλλαγή πρώτης με δεύτερης γραμμής:

Παράδειγμα I.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη, μετά ανταλλάσοντας την τρίτη στήλη με την δεύτερη στήλη, και συνέχεια πολλαπλασιάζοντας όλες τις στήλες με 2. Ποια είναι η ορίζουσα του B;

1. Ανταλλαγή πρώτης με δεύτερης γραμμής: ορίζουσα επί (-1).

Παράδειγμα Ι.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη, μετά ανταλλάσοντας την τρίτη στήλη με την δεύτερη στήλη, και συνέχεια πολλαπλασιάζοντας όλες τις στήλες με 2. Ποια είναι η ορίζουσα του B;

1. Ανταλλαγή πρώτης με δεύτερης γραμμής: ορίζουσα επί (-1).
2. Πρόσθεση 2 φορές της 4ης γραμμής στην πρώτη:

Παράδειγμα I.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη, μετά ανταλλάσοντας την τρίτη στήλη με την δεύτερη στήλη, και συνέχεια πολλαπλασιάζοντας όλες τις στήλες με 2. Ποια είναι η ορίζουσα του B;

1. Ανταλλαγή πρώτης με δεύτερης γραμμής: ορίζουσα επί (-1).
2. Πρόσθεση 2 φορές της 4ης γραμμής στην πρώτη: ορίζουσα ίδια.

Παράδειγμα I.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη, μετά ανταλλάσοντας την τρίτη στήλη με την δεύτερη στήλη, και συνέχεια πολλαπλασιάζοντας όλες τις στήλες με 2. Ποια είναι η ορίζουσα του B;

1. Ανταλλαγή πρώτης με δεύτερης γραμμής: ορίζουσα επί (-1).
2. Πρόσθεση 2 φορές της 4ης γραμμής στην πρώτη: ορίζουσα ίδια.
3. Ανταλλαγή τρίτης με δεύτερη στήλη:

Παράδειγμα Ι.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη, μετά ανταλλάσοντας την τρίτη στήλη με την δεύτερη στήλη, και συνέχεια πολλαπλασιάζοντας όλες τις στήλες με 2. Ποια είναι η ορίζουσα του B;

1. Ανταλλαγή πρώτης με δεύτερης γραμμής: ορίζουσα επί (-1).
2. Πρόσθεση 2 φορές της 4ης γραμμής στην πρώτη: ορίζουσα ίδια.
3. Ανταλλαγή τρίτης με δεύτερη στήλη: ορίζουσα επί (-1).

Παράδειγμα I.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη, μετά ανταλλάσοντας την τρίτη στήλη με την δεύτερη στήλη, και συνέχεια πολλαπλασιάζοντας όλες τις στήλες με 2. Ποια είναι η ορίζουσα του B;

1. Ανταλλαγή πρώτης με δεύτερης γραμμής: ορίζουσα επί (-1).
2. Πρόσθεση 2 φορές της 4ης γραμμής στην πρώτη: ορίζουσα ίδια.
3. Ανταλλαγή τρίτης με δεύτερη στήλη: ορίζουσα επί (-1).
4. Πολλαπλασιασμός κάθε στήλης με 2:

Παράδειγμα Ι.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη, μετά ανταλλάσοντας την τρίτη στήλη με την δεύτερη στήλη, και συνέχεια πολλαπλασιάζοντας όλες τις στήλες με 2. Ποια είναι η ορίζουσα του B;

1. Ανταλλαγή πρώτης με δεύτερης γραμμής: ορίζουσα επί (-1).
2. Πρόσθεση 2 φορές της 4ης γραμμής στην πρώτη: ορίζουσα ίδια.
3. Ανταλλαγή τρίτης με δεύτερη στήλη: ορίζουσα επί (-1).
4. Πολλαπλασιασμός κάθε στήλης με 2: για κάθε στήλη που διπλασιάζεται, διπλασιάζεται και η ορίζουσα,

Παράδειγμα Ι.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη, μετά ανταλλάσοντας την τρίτη στήλη με την δεύτερη στήλη, και συνέχεια πολλαπλασιάζοντας όλες τις στήλες με 2. Ποια είναι η ορίζουσα του B;

1. Ανταλλαγή πρώτης με δεύτερης γραμμής: ορίζουσα επί (-1).
2. Πρόσθεση 2 φορές της 4ης γραμμής στην πρώτη: ορίζουσα ίδια.
3. Ανταλλαγή τρίτης με δεύτερη στήλη: ορίζουσα επί (-1).
4. Πολλαπλασιασμός κάθε στήλης με 2: για κάθε στήλη που διπλασιάζεται, διπλασιάζεται και η ορίζουσα,άρα

$$det(B) = (-1) \cdot (-1) \cdot 2^3 det(A) = 8 \cdot det(A).$$

Παράδειγμα II.

⋆ Έστως ένας $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ με ορίζουσα 5 και με στήλες $a_1, a_2, \ldots, a_7$.

Παράδειγμα II.

$\star$ Έστως ένας $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ με ορίζουσα 5 και με στήλες $a_1, a_2, \ldots, a_7$. Κάνουμε την αντικατάσταση $a_3 := 3a_3 + 5 \cdot a_7$. Ποιά είναι η ορίζουσα του νέου πίνακα;

Παράδειγμα ΙΙ.

$\star$ Έστως ένας $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ με ορίζουσα 5 και με στήλες $a_1, a_2, \ldots, a_7$. Κάνουμε την αντικατάσταση $a_3 := 3a_3 + 5 \cdot a_7$. Ποιά είναι η ορίζουσα του νέου πίνακα;

Απάντηση: Είναι ισοδύναμο με πρώτα να τριπλασιάσουμε τη στήλη a_3 (τριπλασιασμός ορίζουσας) και μετά να προσθέσουμε $5a_7$ σε αυτή (δεν αλλάζει η ορίζουσα).

Παράδειγμα ΙΙ.

$\star$ Έστως ένας $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ με ορίζουσα 5 και με στήλες $a_1, a_2, \ldots, a_7$. Κάνουμε την αντικατάσταση $a_3 := 3a_3 + 5 \cdot a_7$. Ποιά είναι η ορίζουσα του νέου πίνακα;

Απάντηση: Είναι ισοδύναμο με πρώτα να τριπλασιάσουμε τη στήλη a_3 (τριπλασιασμός ορίζουσας) και μετά να προσθέσουμε $5a_7$ σε αυτή (δεν αλλάζει η ορίζουσα).Άρα η νέα ορίζουσα είναι $3 \cdot det(A) = 15$.

$\star$ Τι θα συνέβαινε αν πρόσθετα όλες τις στήλες στην πρώτη, δηλαδή $a_1 := a_1 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$;

Παράδειγμα ΙΙ.

⋆ Έστως ένας $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ με ορίζουσα 5 και με στήλες $a_1, a_2, \ldots, a_7$. Κάνουμε την αντικατάσταση $a_3 := 3a_3 + 5 \cdot a_7$. Ποιά είναι η ορίζουσα του νέου πίνακα;
Απάντηση: Είναι ισοδύναμο με πρώτα να τριπλασιάσουμε τη στήλη a_3 (τριπλασιασμός ορίζουσας) και μετά να προσθέσουμε $5a_7$ σε αυτή (δεν αλλάζει η ορίζουσα).Άρα η νέα ορίζουσα είναι $3 \cdot det(A) = 15$.

⋆ Τι θα συνέβαινε αν πρόσθετα όλες τις στήλες στην πρώτη, δηλαδή $a_1 := a_1 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$;
Απάντηση: Μπορώ να το δω πως πρώτα διπλασιάζω την πρώτη στήλη, μετά προσθέτω την δεύτερη

Παράδειγμα II.

⋆ Έστως ένας $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ με ορίζουσα 5 και με στήλες $a_1, a_2, \ldots, a_7$.
Κάνουμε την αντικατάσταση $a_3 := 3a_3 + 5 \cdot a_7$. Ποιά είναι η ορίζουσα του νέου πίνακα;
Απάντηση: Είναι ισοδύναμο με πρώτα να τριπλασιάσουμε τη στήλη a_3 (τριπλασιασμός ορίζουσας) και μετά να προσθέσουμε $5a_7$ σε αυτή (δεν αλλάζει η ορίζουσα).Άρα η νέα ορίζουσα είναι $3 \cdot det(A) = 15$.

⋆ Τι θα συνέβαινε αν πρόσθετα όλες τις στήλες στην πρώτη, δηλαδή $a_1 := a_1 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$;
Απάντηση: Μπορώ να το δω πως πρώτα διπλασιάζω την πρώτη στήλη, μετά προσθέτω την δεύτερη, εν συνεχεία την τρίτη

Παράδειγμα II.

⋆ Έστως ένας $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ με ορίζουσα 5 και με στήλες $a_1, a_2, \ldots, a_7$. Κάνουμε την αντικατάσταση $a_3 := 3a_3 + 5 \cdot a_7$. Ποιά είναι η ορίζουσα του νέου πίνακα;
Απάντηση: Είναι ισοδύναμο με πρώτα να τριπλασιάσουμε τη στήλη a_3 (τριπλασιασμός ορίζουσας) και μετά να προσθέσουμε $5a_7$ σε αυτή (δεν αλλάζει η ορίζουσα).Άρα η νέα ορίζουσα είναι $3 \cdot det(A) = 15$.

⋆ Τι θα συνέβαινε αν πρόσθετα όλες τις στήλες στην πρώτη, δηλαδή $a_1 := a_1 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$;
Απάντηση: Μπορώ να το δω πως πρώτα διπλασιάζω την πρώτη στήλη, μετά προσθέτω την δεύτερη, εν συνεχεία την τρίτη και τέλος την τέταρτη.

Παράδειγμα II.

⋆ Έστως ένας $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ με ορίζουσα 5 και με στήλες $a_1, a_2, \ldots, a_7$. Κάνουμε την αντικατάσταση $a_3 := 3a_3 + 5 \cdot a_7$. Ποιά είναι η ορίζουσα του νέου πίνακα;
Απάντηση: Είναι ισοδύναμο με πρώτα να τριπλασιάσουμε τη στήλη a_3 (τριπλασιασμός ορίζουσας) και μετά να προσθέσουμε $5a_7$ σε αυτή (δεν αλλάζει η ορίζουσα).Άρα η νέα ορίζουσα είναι $3 \cdot det(A) = 15$.

⋆ Τι θα συνέβαινε αν πρόσθετα όλες τις στήλες στην πρώτη, δηλαδή $a_1 := a_1 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$;
Απάντηση: Μπορώ να το δω πως πρώτα διπλασιάζω την πρώτη στήλη, μετά προσθέτω την δεύτερη, εν συνεχεία την τρίτη και τέλος την τέταρτη. Μόνο η πρώτη πράξη αλλάζει την ορίζουσα, άρα έχουμε ότι η νέα ορίζουσα ίσουται με $2 \cdot det(A) = 10$.

Ορίζουσες και πολλαπλασιασμός Πινάκων.

Θεώρημα

Έστω πίνακες $AB \in \mathbb{R}^{n \times n}$. ***Τότε*** $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$.

Ορίζουσες και πολλαπλασιασμός Πινάκων.

Θεώρημα

Έστω πίνακες $AB \in \mathbb{R}^{n \times n}$. ***Τότε*** $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$.

Πόρισμα

Για $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ***και*** $k > 0$ ***έχουμε*** $det(A^k) = (det(A))^k$.

Ορίζουσες και πολλαπλασιασμός Πινάκων.

Θεώρημα

Έστω πίνακες $AB \in \mathbb{R}^{n \times n}$. ***Τότε*** $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$.

Πόρισμα

Για $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ***και*** $k > 0$ ***έχουμε*** $det(A^k) = (det(A))^k$.

⋆ **Απόδειξη**: $det(A^k) =$

Ορίζουσες και πολλαπλασιασμός Πινάκων.

Θεώρημα

Έστω πίνακες $AB \in \mathbb{R}^{n \times n}$. *Τότε* $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$.

Πόρισμα

Για $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *και* $k > 0$ *έχουμε* $det(A^k) = (det(A))^k$.

⋆ Απόδειξη: $det(A^k) = det(A \cdot A^{k-1}) =$

Ορίζουσες και πολλαπλασιασμός Πινάκων.

Θεώρημα

Έστω πίνακες $AB \in \mathbb{R}^{n\times n}$. ***Τότε*** $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$.

Πόρισμα

Για $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ***και*** $k > 0$ ***έχουμε*** $det(A^k) = (det(A))^k$.

$\star$ Απόδειξη: $det(A^k) = det(A \cdot A^{k-1}) = det(A) \cdot det(A^{k-1}) = \ldots =$

Ορίζουσες και πολλαπλασιασμός Πινάκων.

Θεώρημα

Έστω πίνακες $AB \in \mathbb{R}^{n\times n}$. ***Τότε*** $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$.

Πόρισμα

Για $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ***και*** $k > 0$ ***έχουμε*** $det(A^k) = (det(A))^k$.

$\star$ Απόδειξη: $det(A^k) = det(A \cdot A^{k-1}) = det(A) \cdot det(A^{k-1}) = \ldots =$ $det(A) \cdot (det(A))^{k-1} = (det(A))^k$

Ορίζουσες και πολλαπλασιασμός Πινάκων.

Θεώρημα

Έστω πίνακες $AB \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Τότε* $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$.

Πόρισμα

Για $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *και* $k > 0$ *έχουμε* $det(A^k) = (det(A))^k$.

$\star$ Απόδειξη: $det(A^k) = det(A \cdot A^{k-1}) = det(A) \cdot det(A^{k-1}) = \ldots = det(A) \cdot (det(A))^{k-1} = (det(A))^k$

Πόρισμα

Αν A *αντιστρέψιμος τότε* $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.

Απόδειξη: $A^{-1}A = I \Rightarrow$

Ορίζουσες και πολλαπλασιασμός Πινάκων.

Θεώρημα

Έστω πίνακες $AB \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Τότε* $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$.

Πόρισμα

Για $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *και* $k > 0$ *έχουμε* $det(A^k) = (det(A))^k$.

$\star$ Απόδειξη: $det(A^k) = det(A \cdot A^{k-1}) = det(A) \cdot det(A^{k-1}) = \ldots = det(A) \cdot (det(A))^{k-1} = (det(A))^k$

Πόρισμα

Αν A *αντιστρέψιμος τότε* $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.

Απόδειξη: $A^{-1}A = I \Rightarrow det(A^{-1}) \cdot det(A) = det(A^{-1}A) = det(I)$

Ορίζουσες και πολλαπλασιασμός Πινάκων.

Θεώρημα

Έστω πίνακες $AB \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Τότε* $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$.

Πόρισμα

Για $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *και* $k > 0$ *έχουμε* $det(A^k) = (det(A))^k$.

$\star$ Απόδειξη: $det(A^k) = det(A \cdot A^{k-1}) = det(A) \cdot det(A^{k-1}) = \ldots = det(A) \cdot (det(A))^{k-1} = (det(A))^k$

Πόρισμα

Αν A *αντιστρέψιμος τότε* $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.

Απόδειξη: $A^{-1}A = I \Rightarrow det(A^{-1}) \cdot det(A) = det(A^{-1}A) = det(I) = 1$.

Ασκήσεις.

Έστω A, B, C $n \times n$ πίνακες με $det(A) = 3, det(B) = 0, det(C) = 7$.
Τότε

Ασκήσεις.

Έστω A, B, C $n \times n$ πίνακες με $det(A) = 3, det(B) = 0, det(C) = 7$. Τότε

- Είναι ο AC αντιστρέψιμος;

Ασκήσεις.

Έστω A, B, C $n \times n$ πίνακες με $det(A) = 3, det(B) = 0, det(C) = 7$. Τότε

- Είναι ο AC αντιστρέψιμος; ✓, $det(AC) = det(A)det(C) = 3 \cdot 7 \neq 0$.

Ασκήσεις.

Έστω A, B, C $n \times n$ πίνακες με $det(A) = 3, det(B) = 0, det(C) = 7$.
Τότε

- Είναι ο AC αντιστρέψιμος; ✓, $det(AC) = det(A)det(C) = 3 \cdot 7 \neq 0$.
- Είναι ο AB αντιστρέψιμος;

Ασκήσεις.

Έστω A, B, C $n \times n$ πίνακες με $det(A) = 3, det(B) = 0, det(C) = 7$. Τότε

- Είναι ο AC αντιστρέψιμος; ✓, $det(AC) = det(A)det(C) = 3 \cdot 7 \neq 0$.
- Είναι ο AB αντιστρέψιμος; ✗, $det(AB) = det(A) \cdot det(B) = 3 \cdot 0 = 0$.

Ασκήσεις.

Έστω A, B, C $n \times n$ πίνακες με $det(A) = 3, det(B) = 0, det(C) = 7.$
Τότε

- Είναι ο AC αντιστρέψιμος; ✓, $det(AC) = det(A)det(C) = 3 \cdot 7 \neq 0.$
- Είναι ο AB αντιστρέψιμος; ✗,
  $det(AB) = det(A) \cdot det(B) = 3 \cdot 0 = 0.$
- Είναι ο BC αντιστρέψιμος; Ο CB ;

Έστω A, B, C $n \times n$ πίνακες με $det(A) = 3, det(B) = 0, det(C) = 7$. Τότε

- Είναι ο AC αντιστρέψιμος; ✓, $det(AC) = det(A)det(C) = 3 \cdot 7 \neq 0$.
- Είναι ο AB αντιστρέψιμος; ✗, $det(AB) = det(A) \cdot det(B) = 3 \cdot 0 = 0$.
- Είναι ο BC αντιστρέψιμος; Ο CB ; ✗, Για τον ίδιο λόγο με από πάνω.

Ασκήσεις.

Έστω A, B, C $n \times n$ πίνακες με $det(A) = 3, det(B) = 0, det(C) = 7$. Τότε

- Είναι ο AC αντιστρέψιμος; ✓, $det(AC) = det(A)det(C) = 3 \cdot 7 \neq 0$.
- Είναι ο AB αντιστρέψιμος; ✗, $det(AB) = det(A) \cdot det(B) = 3 \cdot 0 = 0$.
- Είναι ο BC αντιστρέψιμος; Ο CB ; ✗, Για τον ίδιο λόγο με από πάνω.
- Ποια η ορίζουσα του $det(A^2)$;

Ασκήσεις.

Έστω A, B, C $n \times n$ πίνακες με $det(A) = 3, det(B) = 0, det(C) = 7$. Τότε

- Είναι ο AC αντιστρέψιμος; ✓, $det(AC) = det(A)det(C) = 3 \cdot 7 \neq 0$.
- Είναι ο AB αντιστρέψιμος; ✗, $det(AB) = det(A) \cdot det(B) = 3 \cdot 0 = 0$.
- Είναι ο BC αντιστρέψιμος; Ο CB ; ✗, Για τον ίδιο λόγο με από πάνω.
- Ποια η ορίζουσα του $det(A^2)$; $det(A^2) = (det(A))^2 = 3^2 = 9$.

Ασκήσεις.

Έστω A, B, C $n \times n$ πίνακες με $det(A) = 3, det(B) = 0, det(C) = 7$. Τότε

- Είναι ο AC αντιστρέψιμος; ✓, $det(AC) = det(A)det(C) = 3 \cdot 7 \neq 0$.
- Είναι ο AB αντιστρέψιμος; ✗, $det(AB) = det(A) \cdot det(B) = 3 \cdot 0 = 0$.
- Είναι ο BC αντιστρέψιμος; Ο CB ; ✗, Για τον ίδιο λόγο με από πάνω.
- Ποια η ορίζουσα του $det(A^2)$; $det(A^2) = (det(A))^2 = 3^2 = 9$.
- Ποια η ορίζουσα του $det(A^{-1}C)$;

Ασκήσεις.

Έστω A, B, C $n \times n$ πίνακες με $det(A) = 3, det(B) = 0, det(C) = 7$. Τότε

- Είναι ο AC αντιστρέψιμος; ✓, $det(AC) = det(A)det(C) = 3 \cdot 7 \neq 0$.
- Είναι ο AB αντιστρέψιμος; ✗, $det(AB) = det(A) \cdot det(B) = 3 \cdot 0 = 0$.
- Είναι ο BC αντιστρέψιμος; Ο CB ; ✗, Για τον ίδιο λόγο με από πάνω.
- Ποια η ορίζουσα του $det(A^2)$; $det(A^2) = (det(A))^2 = 3^2 = 9$.
- Ποια η ορίζουσα του $det(A^{-1}C)$; $det(A^{-1}C) = det(A^{-1}) \cdot det(C) =$

Ασκήσεις.

Έστω A, B, C $n \times n$ πίνακες με $det(A) = 3, det(B) = 0, det(C) = 7$. Τότε

- Είναι ο AC αντιστρέψιμος; ✓, $det(AC) = det(A)det(C) = 3 \cdot 7 \neq 0$.
- Είναι ο AB αντιστρέψιμος; ✗,
  $det(AB) = det(A) \cdot det(B) = 3 \cdot 0 = 0$.
- Είναι ο BC αντιστρέψιμος; Ο CB ; ✗, Για τον ίδιο λόγο με από πάνω.
- Ποια η ορίζουσα του $det(A^2)$; $det(A^2) = (det(A))^2 = 3^2 = 9$.
- Ποια η ορίζουσα του $det(A^{-1}C)$;
  $det(A^{-1}C) = det(A^{-1}) \cdot det(C) = \frac{1}{det(A)} \cdot det(C) = \frac{7}{3}$.

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Έστω ένα πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Έστω ένα πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.
Ισχυρισμός: Οι τιμές του πολυωνύμου στα b, c, d, e (όλα διαφορετικά μεταξύ τους) μας δίνει τους συντελεστές του πολυωνύμου.

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Έστω ένα πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.
Ισχυρισμός: Οι τιμές του πολυωνύμου στα b, c, d, e (όλα διαφορετικά μεταξύ τους) μας δίνει τους συντελεστές του πολυωνύμου. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει άλλο πολυώνυμο q βαθμού 3 το οποίο συμφωνεί με το p στα σημεία b, c, d, e.

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Έστω ένα πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.
Ισχυρισμός: Οι τιμές του πολυωνύμου στα b, c, d, e (όλα διαφορετικά μεταξύ τους) μας δίνει τους συντελεστές του πολυωνύμου. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει άλλο πολυώνυμο q βαθμού 3 το οποίο συμφωνεί με το p στα σημεία b, c, d, e.

Έστω $p(b) = 1, p(c) = -1, p(d) = 7, p(e) = 8$.

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Έστω ένα πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.
Ισχυρισμός: Οι τιμές του πολυωνύμου στα b, c, d, e (όλα διαφορετικά μεταξύ τους) μας δίνει τους συντελεστές του πολυωνύμου. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει άλλο πολυώνυμο q βαθμού 3 το οποίο συμφωνεί με το p στα σημεία b, c, d, e.

Έστω $p(b) = 1, p(c) = -1, p(d) = 7, p(e) = 8$.

$$p(b) = 1 \Rightarrow$$

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Έστω ένα πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.
Ισχυρισμός: Οι τιμές του πολυωνύμου στα b, c, d, e (όλα διαφορετικά μεταξύ τους) μας δίνει τους συντελεστές του πολυωνύμου. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει άλλο πολυώνυμο q βαθμού 3 το οποίο συμφωνεί με το p στα σημεία b, c, d, e.

Έστω $p(b) = 1, p(c) = -1, p(d) = 7, p(e) = 8$.

$$p(b) = 1 \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot b + a_2 \cdot b^2 + a_3 \cdot b^3 = 1$$

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Έστω ένα πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.
Ισχυρισμός: Οι τιμές του πολυωνύμου στα b, c, d, e (όλα διαφορετικά μεταξύ τους) μας δίνει τους συντελεστές του πολυωνύμου. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει άλλο πολυώνυμο q βαθμού 3 το οποίο συμφωνεί με το p στα σημεία b, c, d, e.

Έστω $p(b) = 1, p(c) = -1, p(d) = 7, p(e) = 8$.

$$p(b) = 1 \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot b + a_2 \cdot b^2 + a_3 \cdot b^3 = 1$$

$$p(c) = -1 \Rightarrow$$

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Έστω ένα πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.
Ισχυρισμός: Οι τιμές του πολυωνύμου στα b, c, d, e (όλα διαφορετικά μεταξύ τους) μας δίνει τους συντελεστές του πολυωνύμου. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει άλλο πολυώνυμο q βαθμού 3 το οποίο συμφωνεί με το p στα σημεία b, c, d, e.

Έστω $p(b) = 1, p(c) = -1, p(d) = 7, p(e) = 8$.

$$p(b) = 1 \Rightarrow {\color{red}a_0} + {\color{red}a_1} \cdot b + {\color{red}a_2} \cdot b^2 + {\color{red}a_3} \cdot b^3 = 1$$

$$p(c) = -1 \Rightarrow {\color{red}a_0} + {\color{red}a_1} \cdot c + {\color{red}a_2} \cdot c^2 + {\color{red}a_3} \cdot c^3 = -1$$

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Έστω ένα πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.
Ισχυρισμός: Οι τιμές του πολυωνύμου στα b, c, d, e (όλα διαφορετικά μεταξύ τους) μας δίνει τους συντελεστές του πολυωνύμου. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει άλλο πολυώνυμο q βαθμού 3 το οποίο συμφωνεί με το p στα σημεία b, c, d, e.

Έστω $p(b) = 1, p(c) = -1, p(d) = 7, p(e) = 8$.

$$p(b) = 1 \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot b + a_2 \cdot b^2 + a_3 \cdot b^3 = 1$$

$$p(c) = -1 \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot c + a_2 \cdot c^2 + a_3 \cdot c^3 = -1$$

$$p(d) = 3 \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot d + a_2 \cdot d^2 + a_3 \cdot d^3 = 7$$

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Έστω ένα πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.
Ισχυρισμός: Οι τιμές του πολυωνύμου στα b, c, d, e (όλα διαφορετικά μεταξύ τους) μας δίνει τους συντελεστές του πολυωνύμου. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει άλλο πολυώνυμο q βαθμού 3 το οποίο συμφωνεί με το p στα σημεία b, c, d, e.

Έστω $p(b) = 1, p(c) = -1, p(d) = 7, p(e) = 8$.

$$p(b) = 1 \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot b + a_2 \cdot b^2 + a_3 \cdot b^3 = 1$$

$$p(c) = -1 \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot c + a_2 \cdot c^2 + a_3 \cdot c^3 = -1$$

$$p(d) = 3 \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot d + a_2 \cdot d^2 + a_3 \cdot d^3 = 7$$

Όμοια για το $p(e)$.

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Άρα οι σχέσεις $p(b) = 1, p(c) = -1, p(d) = 7, p(e) = 8$ ισοδυναμούν με το γραμμικό σύστημα

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Άρα οι σχέσεις $p(b) = 1, p(c) = -1, p(d) = 7, p(e) = 8$ ισοδυναμούν με το γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

με αγνώστους τα a_0, a_1, a_2, a_3.

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Άρα οι σχέσεις $p(b) = 1, p(c) = -1, p(d) = 7, p(e) = 8$ ισοδυναμούν με το γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

με αγνώστους τα a_0, a_1, a_2, a_3.

Πότε αυτό το σύστημα έχει μοναδική λύση; Όταν $det(A) \neq 0$.

Ποια είναι η ορίζουσα του A;

Ο A λέγεται Vandermonde τάξης 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \end{bmatrix}$$

Ποια είναι η ορίζουσα του A;

Ο A λέγεται Vandermonde τάξης 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = (e-d)(e-c)(e-b)(d-c)(d-b)(c-b)$$

Ποια είναι η ορίζουσα του A;

Ο A λέγεται Vandermonde τάξης 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = (e-d)(e-c)(e-b)(d-c)(d-b)(c-b)$$

Αν όλα τα σημεία είναι διαφορετικά μεταξύ τους, τότε $det(A) \neq 0$ και άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση, άρα υπάρχει και μοναδικό πολυώνυμο!

Ποια είναι η ορίζουσα του A;

Ας κάνω $\Sigma_4 := \Sigma_4 - b \cdot \Sigma_3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\Sigma_4 := \Sigma_4 - b \cdot \Sigma_3}$$

Ποια είναι η ορίζουσα του A;

Ας κάνω $\Sigma_4 := \Sigma_4 - b \cdot \Sigma_3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\Sigma_4 := \Sigma_4 - b \cdot \Sigma_3} \begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & 0 \\ 1 & c & c^2 & c^3 - bc^2 \\ 1 & d & d^2 & d^3 - bd^2 \\ 1 & e & e^2 & e^3 - be^2 \end{bmatrix}$$

Ποια είναι η ορίζουσα του A;

Ας κάνω $\Sigma_4 := \Sigma_4 - b \cdot \Sigma_3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\Sigma_4 := \Sigma_4 - b\cdot\Sigma_3} \begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & 0 \\ 1 & c & c^2 & c^3 - bc^2 \\ 1 & d & d^2 & d^3 - bd^2 \\ 1 & e & e^2 & e^3 - be^2 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\Sigma_3 := \Sigma_3 - b\cdot\Sigma_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & c & c^2 - bc & c^3 - bc^2 \\ 1 & d & d^2 - bc & d^3 - bd^2 \\ 1 & e & e^2 - be & e^3 - be^2 \end{bmatrix}$$

Ποια είναι η ορίζουσα του A;

Ας κάνω $\Sigma_4 := \Sigma_4 - b \cdot \Sigma_3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\Sigma_4:=\Sigma_4-b\cdot\Sigma_3} \begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & 0 \\ 1 & c & c^2 & c^3-bc^2 \\ 1 & d & d^2 & d^3-bd^2 \\ 1 & e & e^2 & e^3-be^2 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\Sigma_3:=\Sigma_3-b\cdot\Sigma_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & c & c^2-bc & c^3-bc^2 \\ 1 & d & d^2-bc & d^3-bd^2 \\ 1 & e & e^2-be & e^3-be^2 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\Sigma_2:=\Sigma_2-b\cdot\Sigma_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c-b & c^2-bc & c^3-bc^2 \\ 1 & d-b & d^2-bc & d^3-bd^2 \\ 1 & e-b & e^2-be & e^3-be^2 \end{bmatrix}$$

Ποια είναι η ορίζουσα του A;

Ας κάνω $\Sigma_4 := \Sigma_4 - b \cdot \Sigma_3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\Sigma_4 := \Sigma_4 - b \cdot \Sigma_3} \begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & 0 \\ 1 & c & c^2 & c^3 - bc^2 \\ 1 & d & d^2 & d^3 - bd^2 \\ 1 & e & e^2 & e^3 - be^2 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\Sigma_3 := \Sigma_3 - b \cdot \Sigma_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & c & c^2 - bc & c^3 - bc^2 \\ 1 & d & d^2 - bc & d^3 - bd^2 \\ 1 & e & e^2 - be & e^3 - be^2 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\Sigma_2 := \Sigma_2 - b \cdot \Sigma_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c - b & c^2 - bc & c^3 - bc^2 \\ 1 & d - b & d^2 - bc & d^3 - bd^2 \\ 1 & e - b & e^2 - be & e^3 - be^2 \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα του αρχικού πίνακα είναι ίδια με του τελικού!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c-b & c^2-bc & c^3-bc^2 \\ 1 & d-b & d^2-bc & d^3-bd^2 \\ 1 & e-b & e^2-be & e^3-be^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c-b & c(c-b) & c^2(c-b) \\ 1 & d-b & d(d-b) & d^2(d-b) \\ 1 & e-b & e(e-b) & e^2(e-b) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c-b & c^2-bc & c^3-bc^2 \\ 1 & d-b & d^2-bc & d^3-bd^2 \\ 1 & e-b & e^2-be & e^3-be^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c-b & c(c-b) & c^2(c-b) \\ 1 & d-b & d(d-b) & d^2(d-b) \\ 1 & e-b & e(e-b) & e^2(e-b) \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσουμε τώρα ως προς την πρώτη γραμμή:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c-b & c^2-bc & c^3-bc^2 \\ 1 & d-b & d^2-bc & d^3-bd^2 \\ 1 & e-b & e^2-be & e^3-be^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c-b & c(c-b) & c^2(c-b) \\ 1 & d-b & d(d-b) & d^2(d-b) \\ 1 & e-b & e(e-b) & e^2(e-b) \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσουμε τώρα ως προς την πρώτη γραμμή:

$$det(A) = det\left(\begin{bmatrix} c-b & c(c-b) & c^2(c-b) \\ d-b & d(d-b) & d^2(d-b) \\ e-b & e(e-b) & e^2(e-b) \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c-b & c^2-bc & c^3-bc^2 \\ 1 & d-b & d^2-bc & d^3-bd^2 \\ 1 & e-b & e^2-be & e^3-be^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c-b & c(c-b) & c^2(c-b) \\ 1 & d-b & d(d-b) & d^2(d-b) \\ 1 & e-b & e(e-b) & e^2(e-b) \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσουμε τώρα ως προς την πρώτη γραμμή:

$$det(A) = det\left(\begin{bmatrix} c-b & c(c-b) & c^2(c-b) \\ d-b & d(d-b) & d^2(d-b) \\ e-b & e(e-b) & e^2(e-b) \end{bmatrix} \right)$$

$$= (c-b)(d-b)(e-b) \cdot det\left(\begin{bmatrix} 1 & c & c^2 \\ 1 & d & d^2 \\ 1 & e & e^2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c-b & c^2-bc & c^3-bc^2 \\ 1 & d-b & d^2-bc & d^3-bd^2 \\ 1 & e-b & e^2-be & e^3-be^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c-b & c(c-b) & c^2(c-b) \\ 1 & d-b & d(d-b) & d^2(d-b) \\ 1 & e-b & e(e-b) & e^2(e-b) \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσουμε τώρα ως προς την πρώτη γραμμή:

$$det(A) = det\left(\begin{bmatrix} c-b & c(c-b) & c^2(c-b) \\ d-b & d(d-b) & d^2(d-b) \\ e-b & e(e-b) & e^2(e-b) \end{bmatrix} \right)$$

$$= (c-b)(d-b)(e-b) \cdot det\left(\begin{bmatrix} 1 & c & c^2 \\ 1 & d & d^2 \\ 1 & e & e^2 \end{bmatrix} \right)$$

άρα πέσαμε πάλι σε έναν Vandermonde πίνακα, αλλά τάξης 2.
Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία (επαγωγικά).

Τι μάθαμε και τι πρέπει να ξέρουμε.

- Πως μία γραμμοπράξη σε έναν πίνακα αλλάζει την ορίζουσά του.
- Ότι $det(A) \neq 0$ ισοδυναμεί με αντιστρεψιμότητα του A.
- Ότι $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$.
- Και μην ξεχνάμε ότι $det(A^T) = det(A)$.

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!