

Προηγμένα Θέματα Αλγορίθμων

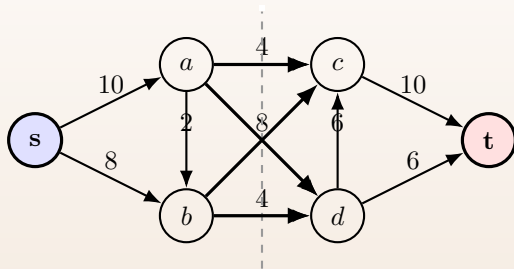
Διαλέξη 8: Μέγιστη Ροή-Ελάχιστη Τομή II

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Μέγιστη Ροή και Ελάχιστη Τομή σε Δίκτυο.

Δρομολόγηση μέγιστης ροής σε δίκτυο και εύρεση ελάχιστης τομής.



Είδαμε ότι (μέγιστη ροή) = (ελάχιστη τομή).

Αλγόριθμος Ford-Fulkerson

- 1: $f \leftarrow \vec{0}$
- 2: Φτιάξε το G_f .
- 3: Όσο υπάρχει $s - t$ μονοπάτι p στο G_f
- 4: Δρομολόγησε μία μονάδα ροής κατά μήκους του p .
- 5: //χρόνος $O(n)$
- 6: Ανανέωσε τη ροή f .
- 7: Ανανέωσε το G_f . //χρόνος $O(n)$
- 8: Επίστρεψε την f

Ο αλγόριθμος Ford-Fulkerson βρίσκει μία μέγιστη ροή και μία ελάχιστη τομή σε χρόνο $O((m + n) \cdot f^*)$ όπου f^* το κέρδος της μέγιστης ροής (ίσο με το κόστος της ελάχιστης τομής).

Αλγόριθμος Edmonds-Karp

- 1: $f \leftarrow \vec{0}$
- 2: Φτιάξε το G_f .
- 3: Όσο υπάρχει $s - t$ μονοπάτι στο G_f
- 4: Βρες ένα συντομότερο τέτοιο μονοπάτι p .
- 5: //Αναζήτηση Κατά βάθος σε $O(m + n)$
- 6: Δρομολόγησε όσο περισσότερη ροή μπορείς κατά μήκος του p .
- 7: //χρόνος $O(n)$
- 8: Ανανέωσε τη ροή f .
- 9: Ανανέωσε το G_f . //χρόνος $O(n)$
- 10: Επίστρεψε την f

Θεώρημα

Ο αλγόριθμος Edmonds-Karp τρέχει σε χρόνο $O(m^2n)$. Για την ακρίβεια $O(\min\{m^2n, mf^\})$*

Κάθε επαυξητικό μονοπάτι βρίσκεται σε χρόνο $O(m + n) = O(m)$

Θεώρημα

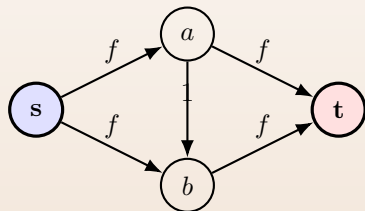
Ο αλγόριθμος Edmonds-Karp τρέχει σε χρόνο $O(m^2n)$. Για την ακρίβεια $O(\min\{m^2n, mf^\})$*

Κάθε επαυξητικό μονοπάτι βρίσκεται σε χρόνο $O(m + n) = O(m)$ και έχουμε $O(mn)$ προσευξήσεις (αντί για f^*).

Θεώρημα

Ο αλγόριθμος Edmonds-Karp τρέχει σε χρόνο $O(m^2n)$. Για την ακρίβεια $O(\min\{m^2n, mf^*\})$

Κάθε επαυξητικό μονοπάτι βρίσκεται σε χρόνο $O(m + n) = O(m)$ και έχουμε $O(mn)$ προσαυξήσεις (αντί για f^*).



Εδώ ο Edmonds-Karp θα τρέξει σε χρόνο $O(1)$, ενώ ο Ford-Fulkerson ενδεχομένως και σε χρόνο $\Theta(f)$ αν στέλνει ροή κατά μήκος της ακμής με χωρητικότητα 1.

Γρήγορη Ιδέα απόδειξης.

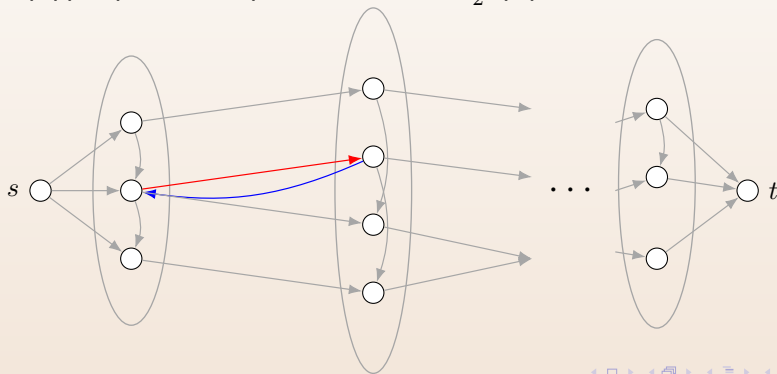
Κατά τη διάρκεια του αλγόριθμου, η απόσταση κάθε u από το s δεν μικραίνει.

★

Γρήγορη Ιδέα απόδειξης.

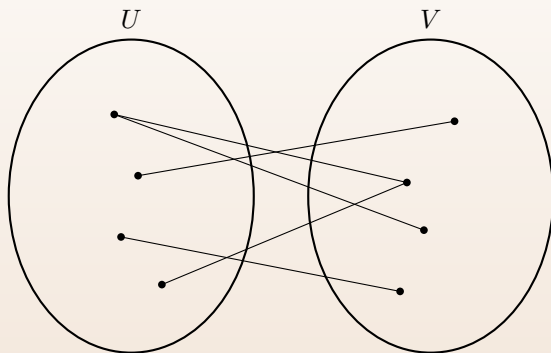
Κατά τη διάρκεια του αλγόριθμου, η απόσταση κάθε u από το s δεν μικραίνει.

★ Κάθε φορά μία ακμή e στο G_f εξαφανίζεται, η πιο ελαφριά στο επαυξητικό μονοπάτι. Μετά τότε δύναται να εμφανιστεί ξανά; Κάθε ακμή μπορεί να εξαφανιστεί το πολύ $\frac{n}{2}$ φορές. Γιατί;



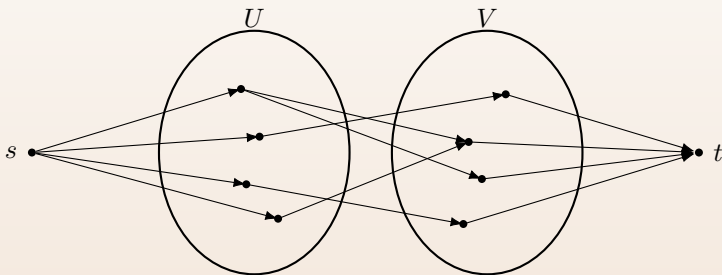
Μέγιστο Ταίριασμα.

Δίνεται διμερής γράφος με $G = A \cup B$ με m ακμές. Να βρεθεί το μέγιστο ταίριασμα στον G , δηλαδή το μέγιστο πλήθος ακμών (a, b) όπου κανένα άκρο δεν επαναλαμβάνεται.



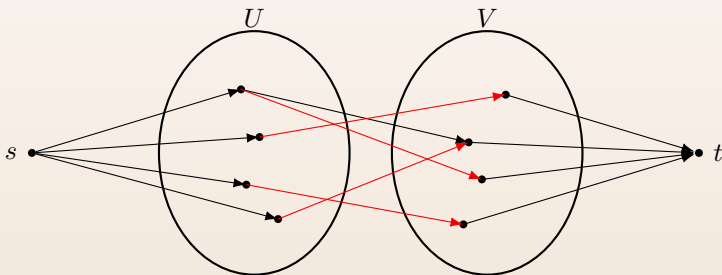
Μέγιστο Ταίριασμα.

Βάζουμε δύο κορυφές s, t , κάνουμε τις ακμές κατευθυνόμενες από το A στο B και βάζουμε ακμές από s σε κάθε $a \in A$ και από κάθε $b \in B$ σε κάθε t . Βάζουμε χωρητικότητα 1 σε όλες τις ακμές και βρίσκουμε μέγιστη ροή από s στο t .



Μέγιστο Ταίριασμα.

- ☞ Λόγω της χωρητικότητας στις ακμές $s - u$ κάθε u θα επιλεχθεί το πολύ μία φορά.
- ☞ Λόγω της χωρητικότητας στις ακμές $v - t$ κάθε v θα επιλεχθεί το πολύ μία φορά.
- ☞ Μπορούμε να διαβάσουμε ένα μέγιστο ταίριασμα από τις κορεσμένες $u - v$ ακμές.



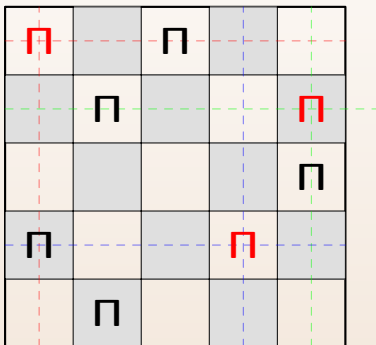
Ένα πρόβλημα με πύργους.

Δίνεται μια $n \times n$ σκακιέρα με k πύργους πάνω της. Θέλουμε να βρεθεί το μέγιστο πλήθος πύργων που μπορούμε να κρατήσουμε ώστε κανέναν να μην απειλεί κανέναν.

Π		Π		
	Π			Π
				Π
Π			Π	
	Π			

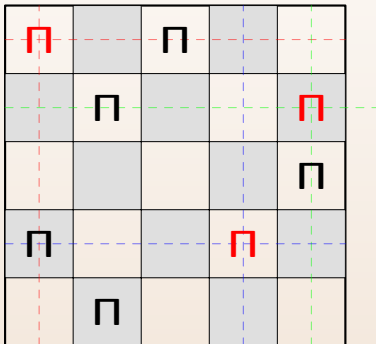
Ένα πρόβλημα με πύργους.

👁 Παρατηρούμε ότι αν διαλέξουμε ένα σύνολο πύργων μη αλληλοαπειλούμενων τότε είναι ο καθένας καλύπτει μια γραμμή και μια στήλη ακριβώς.



Ένα πρόβλημα με πύργους.

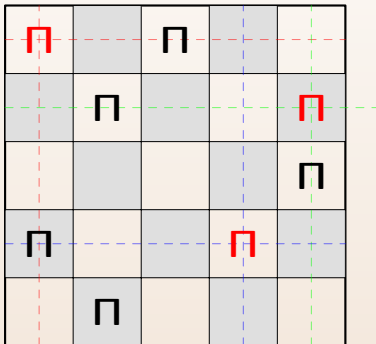
☞ Αντίστροφα, αν επιλέξω γραμμή και στήλη τότε ορίζω έναν πύργο (εφόσον υπάρχει στην τομή τους). Άρα αρκεί να διαλέξω ζεύγη γραμμών/στηλών ώστε καμία γραμμή να μην εμφανίζεται δύο φορές και καμία στήλη το ίδιο. Θυμίζει κάτι;



Q		Q		
	Q			Q
				Q
Q			Q	
	Q			

Ένα πρόβλημα με πύργους.

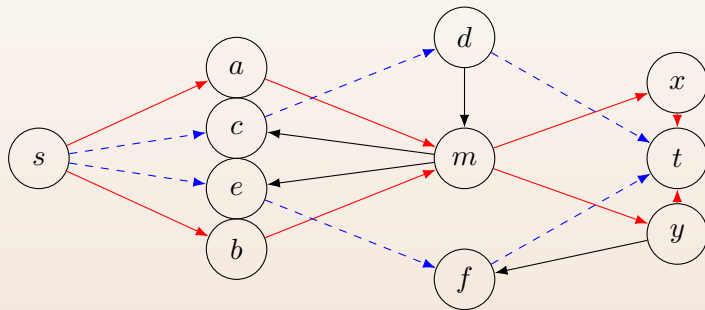
Έστω A το σύνολο των γραμμών και B το σύνολο των στηλών. Βάζω ακμή από $a \in A$ σε $b \in B$ αν υπάρχει πύργος στην τομή της γραμμής a με την γραμμή b . Βρίσκω το μέγιστο ταίριασμα με Edmonds-Karp ή Ford-Fulkerson σε χρόνο $O(kn)$.



Θεώρημα Menger.

Δίνεται κατευθυνόμενος γράφος $G(V, E)$ και δύο διακεκριμένες κορυφές s, t . Να βρεθεί το μέγιστο πλήθος $s - t$ μονοπατιών σε δύο περιπτώσεις:

- 1 — δεν επιτρέπεται μια ακμή να ανήκει σε δύο μονοπάτια.
- 2 — δεν επιτρέπεται μια κορυφή να ανήκει σε δύο μονοπάτια.



Θεώρημα Menger.

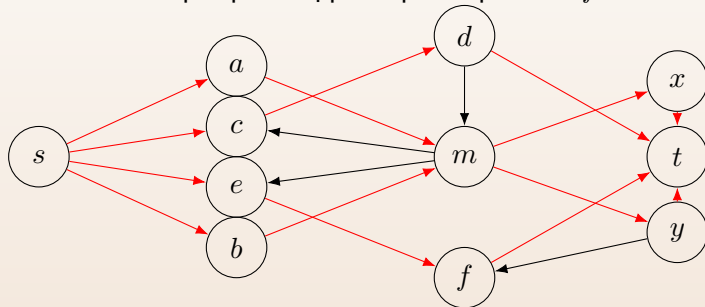
Βάζω χωρητικότητα 1 σε κάθε ακμή e και υπολογίζω τη μέγιστη $s - t$ ροή με κέρδος f^* .

Θεώρημα Menger.

Βάζω χωρητικότητα 1 σε κάθε ακμή e και υπολογίζω τη μέγιστη $s - t$ ροή με κέρδος f^* .

👉 Μια ανάθεση μέγιστη ροή αποσυντίθεται σε f^* μονοπάτια τα οποία δεν έχουν κοινή **ακμή**.

👁 Γιατί δεν μπορώ να βρω περισσότερα από f^* τέτοια μονοπάτια;



Θεώρημα Menger για μονοπάτια χωρίς κοινές κορυφές

Η μέγιστη ροή στο προηγούμενο δίκτυο δεν χρησιμοποιούσε μια ακμή δύο φορές.

Θεώρημα Menger για μονοπάτια χωρίς κοινές κορυφές

Η μέγιστη ροή στο προηγούμενο δίκτυο δεν χρησιμοποιούσε μια ακμή δύο φορές.

👉 Θέλω όμως να μην χρησιμοποιείται μια **κορυφή** δύο φορές.

Θεώρημα Menger για μονοπάτια χωρίς κοινές κορυφές

Η μέγιστη ροή στο προηγούμενο δίκτυο δεν χρησιμοποιούσε μια ακμή δύο φορές.

☛ Θέλω όμως να μην χρησιμοποιείται μια **κορυφή** δύο φορές.

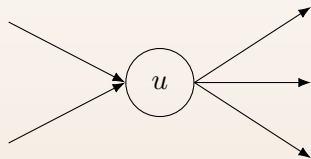
☛ Άρα θέλω χωρητικότητα στις κορυφές. Πώς;

Θεώρημα Menger για μονοπάτια χωρίς κοινές κορυφές

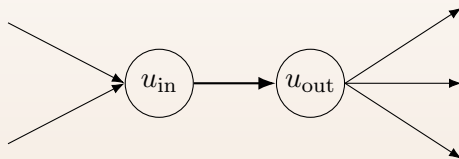
Η μέγιστη ροή στο προηγούμενο δίκτυο δεν χρησιμοποιούσε μια ακμή δύο φορές.

☛ Θέλω όμως να μην χρησιμοποιείται μια **κορυφή** δύο φορές.

☛ Άρα θέλω χωρητικότητα στις κορυφές. Πώς;



αρχικός κόμβος



τελική διάταξη

Θεώρημα Menger για μονοπάτια χωρίς κοινές κορυφές.

Αν τρέξουμε έναν αλγόριθμο μέγιστης ροής στον τροποποιημένο γράφο με τις διπλάσιες (σχεδόν) κορυφές, τότε θα βρούμε μία ροή κόστος f^* .

Θεώρημα Menger για μονοπάτια χωρίς κοινές κορυφές.

Αν τρέξουμε έναν αλγόριθμο μέγιστης ροής στον τροποποιημένο γράφο με τις διπλάσιες (σχεδόν) κορυφές, τότε θα βρούμε μία ροή κόστος f^* .

👉 Γιατί αυτό μας δίνει f^* μονοπάτια στον αρχικό χωρίς κοινή κορυφή;

Θεώρημα Menger για μονοπάτια χωρίς κοινές κορυφές.

Αν τρέξουμε έναν αλγόριθμο μέγιστης ροής στον τροποποιημένο γράφο με τις διπλάσιες (σχεδόν) κορυφές, τότε θα βρούμε μία ροή κόστος f^* .

👉 Γιατί αυτό μας δίνει f^* μονοπάτια στον αρχικό χωρίς κοινή κορυφή;

👉 Γιατί δεν μπορούμε να βρούμε περισσότερα από f^* μονοπάτια;

Θεώρημα Menger για μονοπάτια χωρίς κοινές κορυφές.

Αν τρέξουμε έναν αλγόριθμο μέγιστης ροής στον τροποποιημένο γράφο με τις διπλάσιες (σχεδόν) κορυφές, τότε θα βρούμε μία ροή κόστος f^* .

👉 Γιατί αυτό μας δίνει f^* μονοπάτια στον αρχικό χωρίς κοινή κορυφή;

👉 Γιατί δεν μπορούμε να βρούμε περισσότερα από f^* μονοπάτια;

Θεώρημα (Menger)

Το μέγιστο πλήθος $s - t$ μονοπατιών χωρίς κοινή ακμή ισούται με την ελάχιστη τομή του γράφου (ελάχιστο πλήθος ακμών που αποσυνδέουν το t από το s). Για μονοπάτια χωρίς κοινές κορυφές ισχύει το ίδιο στον τροποποιημένο γράφο.

Θεώρημα Dilworth.

Έστω μία σχέση μερική διάταξης $\mathcal{P}$, δηλαδή ένα σύνολο στοιχείων εφοδιασμένο με μια ανισότητα $\leq$.

Θεώρημα Dilworth.

Έστω μία σχέση μερική διάταξης $\mathcal{P}$, δηλαδή ένα σύνολο στοιχείων εφοδιασμένο με μια ανισότητα $\leq$.

★ Δύο στοιχεία x, y λέγονται συγκρίσιμα αν μπορούμε να συνάγουμε $x \leq y$ ή $y \leq x$.

Έστω μία σχέση μερική διάταξης $\mathcal{P}$, δηλαδή ένα σύνολο στοιχείων εφοδιασμένο με μια ανισότητα $\leq$.

★ Δύο στοιχεία x, y λέγονται συγκρίσιμα αν μπορούμε να συνάγουμε $x \leq y$ ή $y \leq x$.

★ Μια αλυσίδα μήκους k είναι ένα σύνολο στοιχείων ώστε $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_k$.

Θεώρημα Dilworth.

Έστω μία σχέση μερική διάταξης $\mathcal{P}$, δηλαδή ένα σύνολο στοιχείων εφοδιασμένο με μια ανισότητα $\leq$.

★ Δύο στοιχεία x, y λέγονται συγκρίσιμα αν μπορούμε να συνάγουμε $x \leq y$ ή $y \leq x$.

★ Μια αλυσίδα μήκους k είναι ένα σύνολο στοιχείων ώστε

$$u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_k.$$

★ Μια αντι-αλυσίδα είναι ένα σύνολο κορυφών $u_1, u_2, \dots, u_k$ ώστε να μην υπάρχουν δύο

Θεώρημα (Dilworth)

Το μέγεθος της μέγιστης αντι-αλυσίδας ισούται με το ελάχιστο πλήθος αλυσίδων που διαμερίζουν τη σχέση $\mathcal{P}$.

Θεώρημα Dilworth.

Έστω μία σχέση μερική διάταξης $\mathcal{P}$, δηλαδή ένα σύνολο στοιχείων εφοδιασμένο με μια ανισότητα $\leq$.

★ Δύο στοιχεία x, y λέγονται συγκρίσιμα αν μπορούμε να συνάγουμε $x \leq y$ ή $y \leq x$.

★ Μια αλυσίδα μήκους k είναι ένα σύνολο στοιχείων ώστε

$$u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_k.$$

★ Μια αντι-αλυσίδα είναι ένα σύνολο κορυφών $u_1, u_2, \dots, u_k$ ώστε να μην υπάρχουν δύο

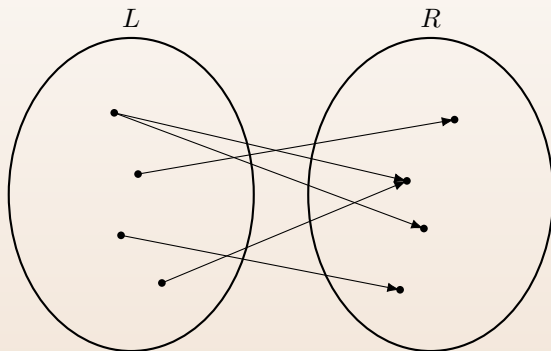
Θεώρημα (Dilworth)

Το μέγεθος της μέγιστης αντι-αλυσίδας ισούται με το ελάχιστο πλήθος αλυσίδων που διαμερίζουν τη σχέση $\mathcal{P}$.

Αλγόριθμος για να βρούμε μια μέγιστη αντι-αλυσίδα.

Για κάθε στοιχείο x φτιάχνουμε δύο μεταβλητές x_L, x_R και βάζουμε τις πρώτες σε ένα σύνολο L και τις δεύτερες σε ένα σύνολο R . Βάζουμε ακμή (x_L, y_R) αν μπορεί να προκύψει $x \leq y$ μέσα στην $\mathcal{P}$.

👉 Βρίσκουμε το μέγιστο ταίριασμα στον γράφο που προκύπτει.



Αλγόριθμος για να βρούμε μια μέγιστη αντι-αλυσίδα.

★ Έστω ότι παίρνουμε ένα ταίριασμα

$$\mathcal{M} := \{(x_L, y_R), (y_L, z_R), (w_L, q_R), (z_L, t_R)\}.$$

Αλγόριθμος για να βρούμε μια μέγιστη αντι-αλυσίδα.

★ Έστω ότι παίρνουμε ένα ταίριασμα

$$\mathcal{M} := \{(x_L, y_R), (y_L, z_R), (w_L, q_R), (z_L, t_R)\}.$$

👁 Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε δύο αλυσίδες $x \leq y \leq z \leq t$ και $w \leq q$.

Αλγόριθμος για να βρούμε μια μέγιστη αντι-αλυσίδα.

★ Έστω ότι παίρνουμε ένα ταίριασμα

$$\mathcal{M} := \{(x_L, y_R), (y_L, z_R), (w_L, q_R), (z_L, t_R)\}.$$

👁 Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε δύο αλυσίδες $x \leq y \leq z \leq t$ και $w \leq q$.

👁 Μπορούμε να διαμερίσω το σύνολο των στοιχείων σε ($\#$ πλήθος αταίριαστων κόμβων του L στο $\mathcal{M}$) αλυσίδες (γιατί;).

Αλγόριθμος για να βρούμε μια μέγιστη αντι-αλυσίδα.

★ Έστω ότι παίρνουμε ένα ταίριασμα

$$\mathcal{M} := \{(x_L, y_R), (y_L, z_R), (w_L, q_R), (z_L, t_R)\}.$$

👁 Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε δύο αλυσίδες $x \leq y \leq z \leq t$ και $w \leq q$.

👁 Μπορούμε να διαμερίσω το σύνολο των στοιχείων σε ($\#$ πλήθος αταίριαστων κόμβων του L στο $\mathcal{M}$) αλυσίδες (γιατί;).

👁 Αντίστοιχα, κάθε διαμέριση σε αντιαλυσίδες μπορεί να αντιστοιχεί σε ένα ταίριασμα του $\mathcal{M}$ (γιατί;).

Αλγόριθμος για να βρούμε μια μέγιστη αντι-αλυσίδα.

★ Έστω ότι παίρνουμε ένα ταίριασμα

$$\mathcal{M} := \{(x_L, y_R), (y_L, z_R), (w_L, q_R), (z_L, t_R)\}.$$

👁 Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε δύο αλυσίδες $x \leq y \leq z \leq t$ και $w \leq q$.

👁 Μπορούμε να διαμερίσω το σύνολο των στοιχείων σε ($\#$ πλήθος αταίριαστων κόμβων του L στο $\mathcal{M}$) αλυσίδες (γιατί;).

👁 Αντίστοιχα, κάθε διαμέριση σε αντιαλυσίδες μπορεί να αντιστοιχεί σε ένα ταίριασμα του $\mathcal{M}$ (γιατί;).

👉 Βρίσκουμε ένα μέγιστο ταίριασμα $\mathcal{M}$. Οι αταίριαστοι κόμβοι αποτελούν μια αντι-αλυσίδα (γιατί;)

Αλγόριθμος για να βρούμε μια μέγιστη αντι-αλυσίδα.

★ Έστω ότι παίρνουμε ένα ταίριασμα

$$\mathcal{M} := \{(x_L, y_R), (y_L, z_R), (w_L, q_R), (z_L, t_R)\}.$$

👁 Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε δύο αλυσίδες $x \leq y \leq z \leq t$ και $w \leq q$.

👁 Μπορούμε να διαμερίσω το σύνολο των στοιχείων σε ($\#$ πλήθος αταίριαστων κόμβων του L στο $\mathcal{M}$) αλυσίδες (γιατί;).

👁 Αντίστοιχα, κάθε διαμέριση σε αντιαλυσίδες μπορεί να αντιστοιχεί σε ένα ταίριασμα του $\mathcal{M}$ (γιατί;).

👉 Βρίσκουμε ένα μέγιστο ταίριασμα $\mathcal{M}$. Οι αταίριαστοι κόμβοι αποτελούν μια αντι-αλυσίδα (γιατί;) και μάλιστα μέγιστου μεγέθους (λόγω Dilworth).

Εφαρμογές I: Πρόβλημα Κατάτμησης Εικόνας.

Συχνά στην Όραση Υπολογιστών, θέλουμε να διαχωρίσουμε την εικόνα σε μικρότερα αντικείμενα (χαρακτηριστικά στην Ιατρική Απεικόνιση).

Εφαρμογές I: Πρόβλημα Κατάτμησης Εικόνας.

Συχνά στην Όραση Υπολογιστών, θέλουμε να διαχωρίσουμε την εικόνα σε μικρότερα αντικείμενα (χαρακτηριστικά στην Ιατρική Απεικόνιση).

👉 Αν θέλουμε να επεξεργαστούμε εικόνες όπως η παρακάτω (ένα αντικείμενο σε έναν σχετικά διαφορετικό περιβάλλοντα χώρο), πως θα το απομονώναμε;



Πρόβλημα Κατάτμησης Εικόνας.

Έστω, για εικόνες, απόσταση $d(\cdot, \cdot)$ μεταξύ δύο πίξελ.

Πρόβλημα Κατάτμησης Εικόνας.

Έστω, για εικόνες, απόσταση $d(\cdot, \cdot)$ μεταξύ δύο πίξελ.

Για παράδειγμα, σε ασπρόμαυρες εικόνες απλά παίρνουμε απόλυτη τιμή της διαφοράς τους (αριθμός από το 0 ως το 255).

👁 Άρα για να φτιάξουμε έναν γράφο G με κορυφές όλα τα πίξελ της εικόνας, και ακμές μεταξύ γειτονικών πίξελ x, y με βάρος $d(x, y)$.



Πρόβλημα Κατάτμησης Εικόνας.

Θα θέλαμε να μάθουμε την *περιφέρεια* του λιονταριού (ή όποιου αντικειμένου).

Πρέπει να βρούμε την ελάχιστη τομή σε αυτό τον γράφο όπου οι ακμές μεταξύ πολύ διαφορετικών (γειτονικών) πίξελ είναι πολύ *φθηνές* και μεταξύ όμοιων (γειτονικών) πίξελ είναι πολύ ακριβές.



Εφαρμογές II: Πρόβλημα Αξιοπιστίας Δικτύου.

Δίνεται ένα δίκτυο $G(V, E)$ με πιθανότητα αποτυχίας p , η οποία εκφράζει την πιθανότητα μία σύνδεση e να χαλάσει.

Εφαρμογές II: Πρόβλημα Αξιοπιστίας Δικτύου.

Δίνεται ένα δίκτυο $G(V, E)$ με πιθανότητα αποτυχίας p , η οποία εκφράζει την πιθανότητα μία σύνδεση e να χαλάσει.

★ Ποια είναι η πιθανότητα να χαλάσει η $s - t$ σύνδεση; (σταθερότητα δικτύου)

Εφαρμογές II: Πρόβλημα Αξιοπιστίας Δικτύου.

Δίνεται ένα δίκτυο $G(V, E)$ με πιθανότητα αποτυχίας p , η οποία εκφράζει την πιθανότητα μία σύνδεση e να χαλάσει.

★ Ποια είναι η πιθανότητα να χαλάσει η $s - t$ σύνδεση; (σταθερότητα δικτύου)

Πρακτικά, πρέπει για κάθε (s, t) μονοπάτι μία σύνδεση να χαλάσει.

Εφαρμογές II: Πρόβλημα Αξιοπιστίας Δικτύου.

Δίνεται ένα δίκτυο $G(V, E)$ με πιθανότητα αποτυχίας p , η οποία εκφράζει την πιθανότητα μία σύνδεση e να χαλάσει.

★ Ποια είναι η πιθανότητα να χαλάσει η $s - t$ σύνδεση; (σταθερότητα δικτύου)

Πρακτικά, πρέπει για κάθε (s, t) μονοπάτι μία σύνδεση να χαλάσει.

👉 Συνήθως, προσεγγίζουμε την αποτυχία σύνδεσης ως $\Theta(p^k)$ όπου k το μέγεθος της ελάχιστης $s - t$ τομής.