

Προηγμένα Θέματα Αλγορίθμων

Διαλέξη 6: Ισχυρή Συνεκτικότητα και Εφαρμογές II

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Έστω μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_n$ που παίρνουν τιμές στο $\{T, F\}$.

Ικανοποιησιμότητα: 2-SAT

Έστω μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_n$ που παίρνουν τιμές στο $\{T, F\}$.

Μια 2-SAT φόρμουλα είναι η σύζευξη m φράσεων, όπου κάθε φράση είναι η διάζευξη **δύο** όρων. Κάθε όρος είναι της μορφής x_i ή $\neg x_i$ για κάποιο i .

Ικανοποιησιμότητα: 2-SAT

Έστω μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_n$ που παίρνουν τιμές στο $\{T, F\}$.

Μια 2-SAT φόρμουλα είναι η σύζευξη m φράσεων, όπου κάθε φράση είναι η διάζευξη **δύο** όρων. Κάθε όρος είναι της μορφής x_i ή $\neg x_i$ για κάποιο i .

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_3 \vee x_2).$$

Ικανοποιησιμότητα: 2-SAT

Έστω μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_n$ που παίρνουν τιμές στο $\{T, F\}$.

Μια 2-SAT φόρμουλα είναι η σύζευξη m φράσεων, όπου κάθε φράση είναι η διάζευξη **δύο** όρων. Κάθε όρος είναι της μορφής x_i ή $\neg x_i$ για κάποιο i .

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_3 \vee x_2).$$

$$\phi = (\neg x_1 \vee x_5) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_4) \wedge (x_5 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_3 \vee \neg x_5).$$

Ικανοποιησιμότητα: 2-SAT

Έστω μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_n$ που παίρνουν τιμές στο $\{T, F\}$.

Μια 2-SAT φόρμουλα είναι η σύζευξη m φράσεων, όπου κάθε φράση είναι η διάζευξη **δύο** όρων. Κάθε όρος είναι της μορφής x_i ή $\neg x_i$ για κάποιο i .

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_3 \vee x_2).$$

$$\phi = (\neg x_1 \vee x_5) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_4) \wedge (x_5 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_3 \vee \neg x_5).$$

👁 Θα δούμε ότι μπορεί να βρεθεί μια αποτίμηση 2-SAT φόρμουλας σε γραμμικό $O(m + n)$.

Ικανοποιησιμότητα: 2-SAT

Έστω μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_n$ που παίρνουν τιμές στο $\{T, F\}$.

Μια 2-SAT φόρμουλα είναι η σύζευξη m φράσεων, όπου κάθε φράση είναι η διάζευξη **δύο** όρων. Κάθε όρος είναι της μορφής x_i ή $\neg x_i$ για κάποιο i .

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_3 \vee x_2).$$

$$\phi = (\neg x_1 \vee x_5) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_4) \wedge (x_5 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_3 \vee \neg x_5).$$

👁 Θα δούμε ότι μπορεί να βρεθεί μια αποτίμηση 2-SAT φόρμουλας σε γραμμικό $O(m + n)$. Αυτό έρχεται σε πλήρη αντίθεση με τις 3-SAT φόρμουλες.

2-SAT και κατευθυνόμενα γραφήματα.

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_3 \vee x_2).$$

2-SAT και κατευθυνόμενα γραφήματα.

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_3 \vee x_2).$$

Πότε είναι η ϕ ικανοποιήσιμη;

❶ Αν $x_1 = F$ τότε πρέπει $\neg x_2 = T$.

2-SAT και κατευθυνόμενα γραφήματα.

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_3 \vee x_2).$$

Πότε είναι η ϕ ικανοποιήσιμη;

- 1 Αν $x_1 = F$ τότε πρέπει $\neg x_2 = T$.
- 2 Αν $\neg x_2 = F$ τότε πρέπει $x_1 = T$.

2-SAT και κατευθυνόμενα γραφήματα.

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_3 \vee x_2).$$

Πότε είναι η ϕ ικανοποιήσιμη;

❶ Αν $x_1 = F$ τότε πρέπει $\neg x_2 = T$.

❷ Αν $\neg x_2 = F$ τότε πρέπει $x_1 = T$.

👁 Παρατηρούμε ότι $x_1 \vee \neg x_2 \equiv \neg x_1 \Rightarrow \neg x_2$ και $x_1 \vee \neg x_2 \equiv x_2 \Rightarrow x_1$.

2-SAT και κατευθυνόμενα γραφήματα.

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_3 \vee x_2).$$

Πότε είναι η ϕ ικανοποιήσιμη;

- 1 Αν $x_1 = F$ τότε πρέπει $\neg x_2 = T$.
- 2 Αν $\neg x_2 = F$ τότε πρέπει $x_1 = T$.

👁 Παρατηρούμε ότι $x_1 \vee \neg x_2 \equiv \neg x_1 \Rightarrow \neg x_2$ και $x_1 \vee \neg x_2 \equiv x_2 \Rightarrow x_1$.
Αυτό μας υποδεικνύει **κατευθυνόμενες ακμές** $(\neg x_1, \neg x_2)$ και (x_2, x_1) .

2-SAT και κατευθυνόμενα γραφήματα.

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_3 \vee x_2).$$

Πότε είναι η ϕ ικανοποιήσιμη;

- 1 Αν $x_1 = F$ τότε πρέπει $\neg x_2 = T$.
- 2 Αν $\neg x_2 = F$ τότε πρέπει $x_1 = T$.

👁 Παρατηρούμε ότι $x_1 \vee \neg x_2 \equiv \neg x_1 \Rightarrow \neg x_2$ και $x_1 \vee \neg x_2 \equiv x_2 \Rightarrow x_1$.
Αυτό μας υποδεικνύει **κατευθυνόμενες ακμές** $(\neg x_1, \neg x_2)$ και (x_2, x_1) .
Σε ποιο γράφο όμως;

2-SAT και κατευθυνόμενα γραφήματα.

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_3 \vee x_2).$$

Πότε είναι η ϕ ικανοποιήσιμη;

- 1 Αν $x_1 = F$ τότε πρέπει $\neg x_2 = T$.
- 2 Αν $\neg x_2 = F$ τότε πρέπει $x_1 = T$.

👁 Παρατηρούμε ότι $x_1 \vee \neg x_2 \equiv \neg x_1 \Rightarrow \neg x_2$ και $x_1 \vee \neg x_2 \equiv x_2 \Rightarrow x_1$.
Αυτό μας υποδεικνύει **κατευθυνόμενες** ακμές $(\neg x_1, \neg x_2)$ και (x_2, x_1) .
Σε ποιο γράφο όμως;

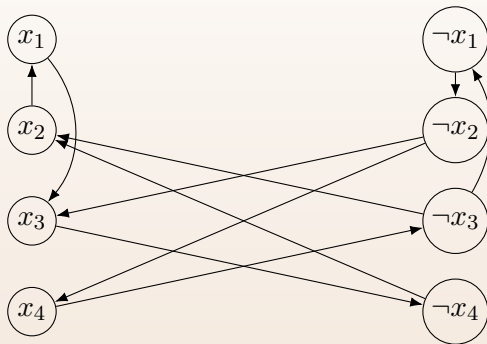
👉 Φτιάχνουμε έναν γράφο με κορυφές τα $x_1, \neg x_1, x_2, \neg x_2, \dots$ και βάζουμε δύο ακμές για κάθε όρο.

2-SAT και κατευθυνόμενα γραφήματα.

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_3 \vee x_2).$$

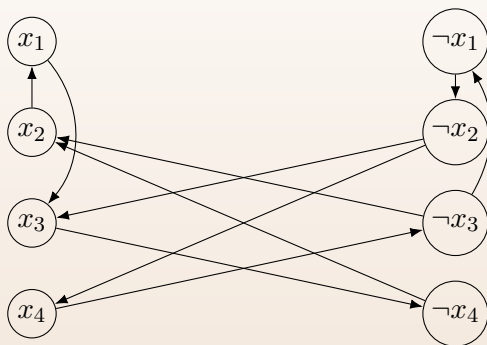
2-SAT και κατευθυνόμενα γραφήματα.

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_3 \vee x_2).$$



2-SAT και κατευθυνόμενα γραφήματα.

👁️ Αν υπάρχει μονοπάτι από το x_1 στο $\neg x_1$, τότε αυτό σημαίνει ότι δεν μπορώ να θέσω το $x_1 = T$. Όμοια, αν υπάρχει από το $\neg x_1$ στο x_1 δεν μπορώ να θέσω $x_1 = F$.



2-SAT και κατευθυνόμενα γραφήματα.

👁 Αναγκαία συνθήκη: Για κάθε i τα x_i στο $\neg x_i$ να μην είναι στην ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα!

2-SAT και κατευθυνόμενα γραφήματα.

👁 Αναγκαία συνθήκη: Για κάθε i τα x_i στο $\neg x_i$ να μην είναι στην ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα!

Η παραπάνω συνθήκη, όπως θα δείξουμε, είναι και ικανή!

Θεώρημα (2-SAT σε γραμμικό χρόνο)

*Η ϕ είναι ικανοποιήσιμη αν και μόνο αν για κάθε i τα $x_i, \neg x_i$ **δεν** είναι στην ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα. Επιπρόσθετα, μία αποτίμηση τιμών στα x_i η οποία ικανοποιεί την ϕ μπορεί να βρεθεί σε $O(m + n)$ χρόνο.*

2-SAT και ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Έστω G_ϕ ο γράφος που προκύπτει από την φόρμουλα ϕ .

2-SAT και ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Έστω G_ϕ ο γράφος που προκύπτει από την φόρμουλα ϕ .

Βρίσκουμε τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του G_ϕ και τις ταξινομούμε τοπολογικά.

2-SAT και ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Έστω G_ϕ ο γράφος που προκύπτει από την φόρμουλα ϕ .

Βρίσκουμε τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του G_ϕ και τις ταξινομούμε τοπολογικά.

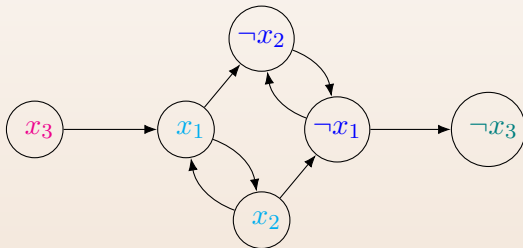
$$\phi \equiv (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3)$$

2-SAT και ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Έστω G_ϕ ο γράφος που προκύπτει από την φόρμουλα ϕ .

Βρίσκουμε τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του G_ϕ και τις ταξινομούμε τοπολογικά.

$$\phi \equiv (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3)$$



2-SAT και ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Συγκρίνουμε τις θέσεις του x_i και $\neg x_i$ στην τοπολογική ταξινόμηση.

2-SAT και ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

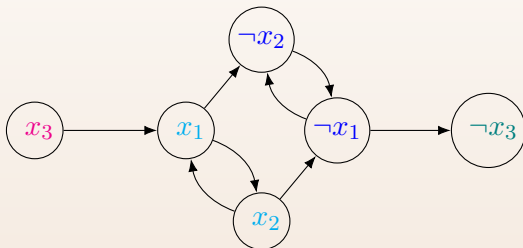
Συγκρίνουμε τις θέσεις του x_i και $\neg x_i$ στην τοπολογική ταξινόμηση.

- 1 Αν το x_i είναι δεξιότερα, θέτουμε $x_i = T$
- 2 Αν το $\neg x_i$ είναι δεξιότερα, θέτουμε $x_i = F$.

2-SAT και ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Συγκρίνουμε τις θέσεις του x_i και $\neg x_i$ στην τοπολογική ταξινόμηση.

- 1 Αν το x_i είναι δεξιότερα, θέτουμε $x_i = T$
- 2 Αν το $\neg x_i$ είναι δεξιότερα, θέτουμε $x_i = F$.

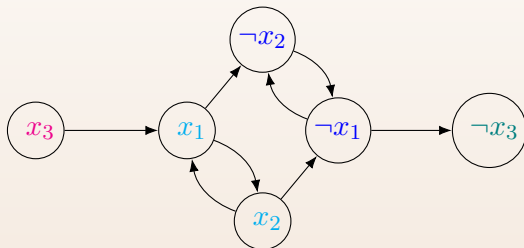


$$x_3 = F,$$

2-SAT και ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Συγκρίνουμε τις θέσεις του x_i και $\neg x_i$ στην τοπολογική ταξινόμηση.

- 1 Αν το x_i είναι δεξιότερα, θέτουμε $x_i = T$
- 2 Αν το $\neg x_i$ είναι δεξιότερα, θέτουμε $x_i = F$.

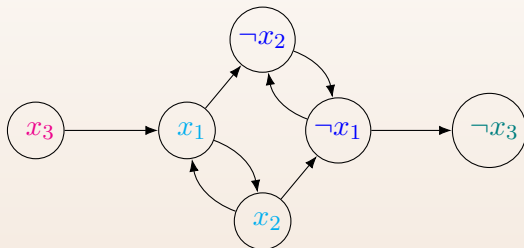


$$x_3 = F, x_1 = F, x_2 = F$$

2-SAT και ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Συγκρίνουμε τις θέσεις του x_i και $\neg x_i$ στην τοπολογική ταξινόμηση.

- 1 Αν το x_i είναι δεξιότερα, θέτουμε $x_i = T$
- 2 Αν το $\neg x_i$ είναι δεξιότερα, θέτουμε $x_i = F$.



$$x_3 = F, x_1 = F, x_2 = F \Rightarrow \phi(F, F, F) = T \checkmark.$$

Απόδειξη ορθότητας.

Έστω ότι το $\neg x_i$ είναι δεξιότερα από το x_i , άρα θέτω $x_i = F$.

Απόδειξη ορθότητας.

Έστω ότι το $\neg x_i$ είναι δεξιότερα από το x_i , άρα θέτω $x_i = F$. Κάθε φράση που περιέχει μέσα το $\neg x_i$ ικανοποιείται τετριμμένα.

Απόδειξη ορθότητας.

Έστω ότι το $\neg x_i$ είναι δεξιότερα από το x_i , άρα θέτω $x_i = F$. Κάθε φράση που περιέχει μέσα το $\neg x_i$ ικανοποιείται τετριμμένα.

Θα δείξω ότι ικανοποιείται και κάθε φράση της μορφής $x_i \vee z_j$, όπου z_j είναι είτε της μορφής x_j είτε $\neg x_j$ για κάποιο j . Θα δείξουμε ότι ο αλγόριθμος θέτει $z_j = T$.

Απόδειξη ορθότητας.

Έστω ότι το $\neg x_i$ είναι δεξιότερα από το x_i , άρα θέτω $x_i = F$. Κάθε φράση που περιέχει μέσα το $\neg x_i$ ικανοποιείται τετριμμένα.

Θα δείξω ότι ικανοποιείται και κάθε φράση της μορφής $x_i \vee z_j$, όπου z_j είναι είτε της μορφής x_j είτε $\neg x_j$ για κάποιο j . Θα δείξουμε ότι ο αλγόριθμος θέτει $z_j = T$.

Η συγκεκριμένη φράση ορίζει

- 1 μια ακμή $(\neg x_i, z_j)$

Απόδειξη ορθότητας.

Έστω ότι το $\neg x_i$ είναι δεξιότερα από το x_i , άρα θέτω $x_i = F$. Κάθε φράση που περιέχει μέσα το $\neg x_i$ ικανοποιείται τετριμμένα.

Θα δείξω ότι ικανοποιείται και κάθε φράση της μορφής $x_i \vee z_j$, όπου z_j είναι είτε της μορφής x_j είτε $\neg x_j$ για κάποιο j . Θα δείξουμε ότι ο αλγόριθμος θέτει $z_j = T$.

Η συγκεκριμένη φράση ορίζει

- 1 μια ακμή $(\neg x_i, z_j)$, άρα το z_j είναι σε δεξιότερη ή στην ίδια συνιστώστα με το $\neg x_i$,

Απόδειξη ορθότητας.

Έστω ότι το $\neg x_i$ είναι δεξιότερα από το x_i , άρα θέτω $x_i = F$. Κάθε φράση που περιέχει μέσα το $\neg x_i$ ικανοποιείται τετριμμένα.

Θα δείξω ότι ικανοποιείται και κάθε φράση της μορφής $x_i \vee z_j$, όπου z_j είναι είτε της μορφής x_j είτε $\neg x_j$ για κάποιο j . Θα δείξουμε ότι ο αλγόριθμος θέτει $z_j = T$.

Η συγκεκριμένη φράση ορίζει

- 1 μια ακμή $(\neg x_i, z_j)$, άρα το z_j είναι σε δεξιότερη ή στην ίδια συνιστώστα με το $\neg x_i$,
- 2 μια ακμή $(\neg z_j, x_i)$

Απόδειξη ορθότητας.

Έστω ότι το $\neg x_i$ είναι δεξιότερα από το x_i , άρα θέτω $x_i = F$. Κάθε φράση που περιέχει μέσα το $\neg x_i$ ικανοποιείται τετριμμένα.

Θα δείξω ότι ικανοποιείται και κάθε φράση της μορφής $x_i \vee z_j$, όπου z_j είναι είτε της μορφής x_j είτε $\neg x_j$ για κάποιο j . Θα δείξουμε ότι ο αλγόριθμος θέτει $z_j = T$.

Η συγκεκριμένη φράση ορίζει

- 1 μια ακμή $(\neg x_i, z_j)$, άρα το z_j είναι σε δεξιότερη ή στην ίδια συνιστώσα με το $\neg x_i$,
- 2 μια ακμή $(\neg z_j, x_i)$, άρα το $\neg z_j$ είναι σε αριστερότερη ή στην ίδια συνιστώσα με το x_i .

Απόδειξη ορθότητας.

Έστω ότι το $\neg x_i$ είναι δεξιότερα από το x_i , άρα θέτω $x_i = F$. Κάθε φράση που περιέχει μέσα το $\neg x_i$ ικανοποιείται τετριμμένα.

Θα δείξω ότι ικανοποιείται και κάθε φράση της μορφής $x_i \vee z_j$, όπου z_j είναι είτε της μορφής x_j είτε $\neg x_j$ για κάποιο j . Θα δείξουμε ότι ο αλγόριθμος θέτει $z_j = T$.

Η συγκεκριμένη φράση ορίζει

- 1 μια ακμή $(\neg x_i, z_j)$, άρα το z_j είναι σε δεξιότερη ή στην ίδια συνιστώσα με το $\neg x_i$,
- 2 μια ακμή $(\neg z_j, x_i)$, άρα το $\neg z_j$ είναι σε αριστερότερη ή στην ίδια συνιστώσα με το x_i .

Όμως $\neg x_i$ δεξιότερα του x_i , άρα z_j δεξιότερα του $\neg z_j$

Απόδειξη ορθότητας.

Έστω ότι το $\neg x_i$ είναι δεξιότερα από το x_i , άρα θέτω $x_i = F$. Κάθε φράση που περιέχει μέσα το $\neg x_i$ ικανοποιείται τετριμμένα.

Θα δείξω ότι ικανοποιείται και κάθε φράση της μορφής $x_i \vee z_j$, όπου z_j είναι είτε της μορφής x_j είτε $\neg x_j$ για κάποιο j . Θα δείξουμε ότι ο αλγόριθμος θέτει $z_j = T$.

Η συγκεκριμένη φράση ορίζει

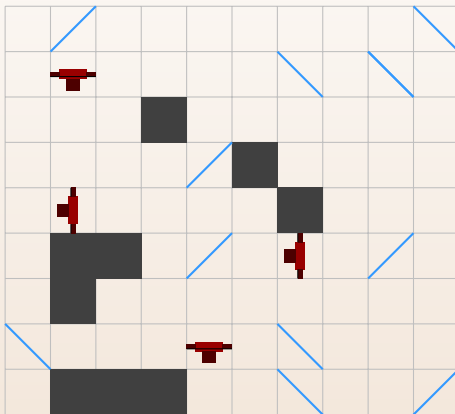
- 1 μια ακμή $(\neg x_i, z_j)$, άρα το z_j είναι σε δεξιότερη ή στην ίδια συνιστώσα με το $\neg x_i$,
- 2 μια ακμή $(\neg z_j, x_i)$, άρα το $\neg z_j$ είναι σε αριστερότερη ή στην ίδια συνιστώσα με το x_i .

Όμως $\neg x_i$ δεξιότερα του x_i , άρα z_j δεξιότερα του $\neg z_j \Rightarrow z_j = T \checkmark$

$\dots \neg z_j, \dots, x_i, \dots \neg x_i, \dots z_j, \dots$

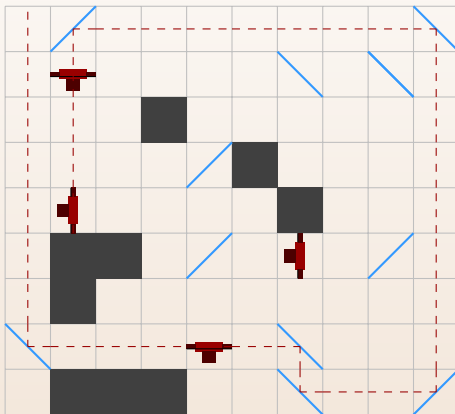
Ένας γρίφος με Όπλα και Καθρέφτες.

Δίνεται πλέγμα σε κάποια τετραγωνάκια του οποίου ενδέχεται να υπάρχει καθρέφτης, εμπόδιο ή όπλο. Ο καθρέφτης είναι τοποθετημένος είτε στην κύρια είτε στη δευτερεύουσα διαγώνιο. Το όπλο είναι τοποθετημένο οριζόντια ή κάθετα και ρίχνει και από τις δύο του κάνες.



Ένας γρίφος με Όπλα και Καθρέφτες.

Όλα τα **όπλα** θα ρίξουν μία ακτίνα τη στιγμή X . Η ακτίνα που ρίχνει κάθε **όπλο** ανακλάται στους **καθρέφτες** και αλλάζει πορεία μέχρι να συναντήσει εμπόδιο ή την περιφέρεια του πλέγματος. Όταν συναντάει κάποιο άλλο όπλο, το καταστρέφει και συνεχίζει την πορεία της.



Ένας γρίφος με Όπλα και Καθρέφτες.

Μπορούμε για κάθε **όπλο** να **αποφασίσουμε** αν θα τοποθετηθεί
κάθετα ή οριζόντια.

Ένας γρίφος με Όπλα και Καθρέφτες.

Μπορούμε για κάθε **όπλο** να **αποφασίσουμε** αν θα τοποθετηθεί
κάθετα ή οριζόντια.

★ Υπάρχει τρόπος να τα στρέψουμε έτσι ώστε η ακτίνα του όπλου να
μην καταστρέφει κανένα άλλο **όπλο**;

Ένας γρίφος με Όπλα και Καθρέφτες.

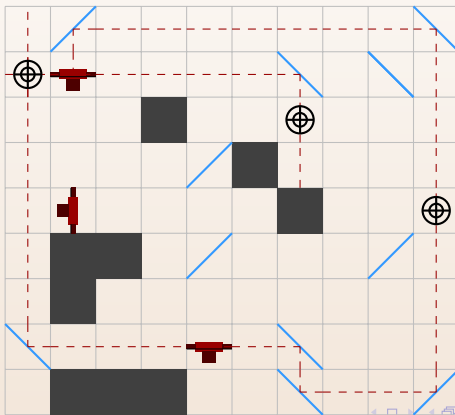
Μπορούμε για κάθε **όπλο** να **αποφασίσουμε** αν θα τοποθετηθεί
κάθετα ή οριζόντια.

★ Υπάρχει τρόπος να τα στρέψουμε έτσι ώστε η ακτίνα του όπλου να
μην καταστρέφει κανένα άλλο **όπλο**;

Ένας γρίφος με Όπλα και Καθρέφτες.

Μπορούμε για κάθε **όπλο** να **αποφασίσουμε** αν θα τοποθετηθεί κάθετα ή οριζόντια.

★ Υπάρχει τρόπος να τα στρέψουμε έτσι ώστε η ακτίνα του όπλου να μην καταστρέφει κανένα άλλο **όπλο**; Τι συμβαίνει αν έχουμε και στόχους τους οποίους οι ακτίνες απαιτούμε να καταστρέψουν;



Ένας γρίφος με Όπλα και Καθρέφτες.

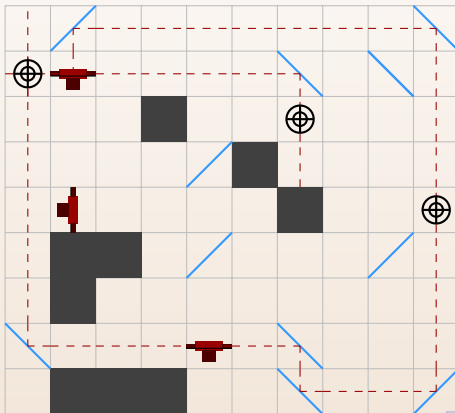
I. Για κάθε **όπλο** και καθεμία από τις δύο περιστροφές του προσομοιώνουμε την κίνηση της ακτίνας και βρίσκουμε ποιους στόχους και ποια **όπλα** χτυπάει.

Ένας γρίφος με Όπλα και Καθρέφτες.

I. Για κάθε **όπλο** και καθεμία από τις δύο περιστροφές του προσομοιώνουμε την κίνηση της ακτίνας και βρίσκουμε ποιους στόχους και ποια **όπλα** χτυπάει. Αν υπάρχει **οπλό** του οποίου και οι δύο κατευθύνσεις οδηγούν στην καταστροφή κάποιου **όπλου**, σταματάμε .

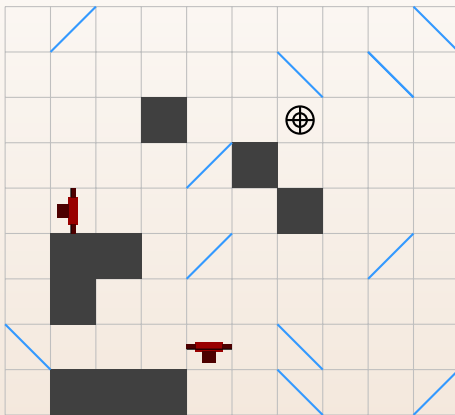
Ένας γρίφος με Όπλα και Καθρέφτες.

Ι. Για κάθε **όπλο** και καθεμία από τις δύο περιστροφές του προσομοιώνουμε την κίνηση της ακτίνας και βρίσκουμε ποιους στόχους και ποια **όπλα** χτυπάει. Αν υπάρχει **οπλό** του οποίου και οι δύο κατευθύνσεις οδηγούν στην καταστροφή κάποιου **όπλου**, σταματάμε .



Ένας γρίφος με Όπλα και Καθρέφτες.

II. Τα **όπλα** για τα οποία έχουμε μόνο μία δυνατή κατεύθυνση, τα στρέφουμε προς αυτήν, και τα βγάζουμε μαζί με τους στόχους τους οποίους χτυπάνε.



Το 2-SAT κάνει την εμφάνισή του.

Θα κωδικοποιήσουμε το εναπομείνον πρόβλημα ως 2-SAT.
Δημιουργούμε:

Το 2-SAT κάνει την εμφάνισή του.

Θα κωδικοποιήσουμε το εναπομείνον πρόβλημα ως 2-SAT.

Δημιουργούμε:

- 1 μια μεταβλητή x_i για κάθε **όπλο**: αν $x_i = T$ το όπλο στρέφεται κάθετα, αλλιώς οριζόντια.

Το 2-SAT κάνει την εμφάνισή του.

Θα κωδικοποιήσουμε το εναπομείνον πρόβλημα ως 2-SAT.

Δημιουργούμε:

- 1 μια μεταβλητή x_i για κάθε **όπλο**: αν $x_i = T$ το όπλο στρέφεται κάθετα, αλλιώς οριζόντια.
- 2 μια φράση για κάθε στόχο:

Το 2-SAT κάνει την εμφάνισή του.

Θα κωδικοποιήσουμε το εναπομείνον πρόβλημα ως 2-SAT.

Δημιουργούμε:

- 1 μια μεταβλητή x_i για κάθε **όπλο**: αν $x_i = T$ το όπλο στρέφεται κάθετα, αλλιώς οριζόντια.
- 2 μια φράση για κάθε στόχο: όλα τα **όπλα** τα οποία χτυπάνε τον στόχο θα συμμετέχουν στη φράση.

Το 2-SAT κάνει την εμφάνισή του.

Θα κωδικοποιήσουμε το εναπομείνον πρόβλημα ως 2-SAT.

Δημιουργούμε:

- ① μια μεταβλητή x_i για κάθε **όπλο**: αν $x_i = T$ το όπλο στρέφεται κάθετα, αλλιώς οριζόντια.
- ② μια φράση για κάθε στόχο: όλα τα **όπλα** τα οποία χτυπάνε τον στόχο θα συμμετέχουν στη φράση. Για παράδειγμα, ας πούμε ότι
 - το **όπλο** 3 χτυπάει τον στόχο όταν τοποθετηθεί οριζόντια,

Το 2-SAT κάνει την εμφάνισή του.

Θα κωδικοποιήσουμε το εναπομείνον πρόβλημα ως 2-SAT.

Δημιουργούμε:

- ❶ μια μεταβλητή x_i για κάθε **όπλο**: αν $x_i = T$ το όπλο στρέφεται κάθετα, αλλιώς οριζόντια.
- ❷ μια φράση για κάθε στόχο: όλα τα **όπλα** τα οποία χτυπάνε τον στόχο θα συμμετέχουν στη φράση. Για παράδειγμα, ας πούμε ότι
 - το **όπλο** 3 χτυπάει τον στόχο όταν τοποθετηθεί οριζόντια,
 - το **όπλο** 5 χτυπάει τον στόχο όταν τοποθετηθεί κάθετα,

Το 2-SAT κάνει την εμφάνισή του.

Θα κωδικοποιήσουμε το εναπομείνον πρόβλημα ως 2-SAT.

Δημιουργούμε:

- 1 μια μεταβλητή x_i για κάθε **όπλο**: αν $x_i = T$ το όπλο στρέφεται κάθετα, αλλιώς οριζόντια.
- 2 μια φράση για κάθε στόχο: όλα τα **όπλα** τα οποία χτυπάνε τον στόχο θα συμμετέχουν στη φράση. Για παράδειγμα, ας πούμε ότι
 - το **όπλο** 3 χτυπάει τον στόχο όταν τοποθετηθεί οριζόντια,
 - το **όπλο** 5 χτυπάει τον στόχο όταν τοποθετηθεί κάθετα,
 - το **όπλο** 9 χτυπάει τον στόχο όταν τοποθετηθεί οριζόντια,

Το 2-SAT κάνει την εμφάνισή του.

Θα κωδικοποιήσουμε το εναπομείνον πρόβλημα ως 2-SAT.

Δημιουργούμε:

- 1 μια μεταβλητή x_i για κάθε **όπλο**: αν $x_i = T$ το όπλο στρέφεται κάθετα, αλλιώς οριζόντια.
- 2 μια φράση για κάθε στόχο: όλα τα **όπλα** τα οποία χτυπάνε τον στόχο θα συμμετέχουν στη φράση. Για παράδειγμα, ας πούμε ότι
 - το **όπλο** 3 χτυπάει τον στόχο όταν τοποθετηθεί οριζόντια,
 - το **όπλο** 5 χτυπάει τον στόχο όταν τοποθετηθεί κάθετα,
 - το **όπλο** 9 χτυπάει τον στόχο όταν τοποθετηθεί οριζόντια,τότε έχουμε τη φράση $\neg x_3 \vee x_5 \vee \neg x_9$ για το στόχο.

Άρα φτιάχνουμε μια SAT φόρμουλα με #στόχους φράσεις και #**όπλα** μεταβλητές.

Το 2-SAT κάνει την εμφάνισή του.

Όμως μια φράση της μορφής $\neg x_3 \vee x_5 \vee \neg x_9$ δημιουργεί ένα 3-SAT στριγμιότυπου (ή και παραπάνω), το οποίο είναι NP-δύσκολο.

Το 2-SAT κάνει την εμφάνισή του.

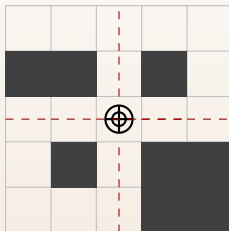
Όμως μια φράση της μορφής $\neg x_3 \vee x_5 \vee \neg x_9$ δημιουργεί ένα 3-SAT στριγμιότυπου (ή και παραπάνω), το οποίο είναι NP-δύσκολο.

Αλλά μπορεί αλήθεια μια τέτοια φράση να προκύψει στο πρόβλημα μας;

Το 2-SAT κάνει την εμφάνισή του.

Όμως μια φράση της μορφής $\neg x_3 \vee x_5 \vee \neg x_9$ δημιουργεί ένα 3-SAT στριγμιότυπου (ή και παραπάνω), το οποίο είναι NP-δύσκολο.

Αλλά μπορεί αλήθεια μια τέτοια φράση να προκύψει στο πρόβλημα μας;

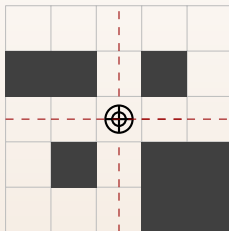


👁️ Αν υπήρχε μια φράση με τουλάχιστον τρεις όρους τότε σημαίνει ότι υπάρχουν δύο **όπλα** τα οποία σε κάποια κατεύθυνση ρίχνουν ακτίνες οι οποίες φτάνουν τον στόχο με την ίδια κατεύθυνση (πχ κάθετα)

Το 2-SAT κάνει την εμφάνισή του.

Όμως μια φράση της μορφής $\neg x_3 \vee x_5 \vee \neg x_9$ δημιουργεί ένα 3-SAT στριγμιότυπου (ή και παραπάνω), το οποίο είναι NP-δύσκολο.

Αλλά μπορεί αλήθεια μια τέτοια φράση να προκύψει στο πρόβλημα μας;

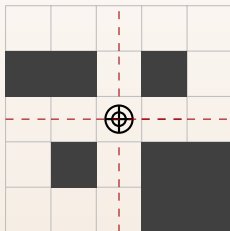


👁️ Αν υπήρχε μια φράση με τουλάχιστον τρεις όρους τότε σημαίνει ότι υπάρχουν δύο **όπλα** τα οποία σε κάποια κατεύθυνση ρίχνουν ακτίνες οι οποίες φτάνουν τον στόχο με την ίδια κατεύθυνση (πχ κάθετα), άρα το ένα θα κατέστρεφε το άλλο!

Το 2-SAT κάνει την εμφάνισή του.

Όμως μια φράση της μορφής $\neg x_3 \vee x_5 \vee \neg x_9$ δημιουργεί ένα 3-SAT στριγμιότυπου (ή και παραπάνω), το οποίο είναι NP-δύσκολο.

Αλλά μπορεί αλήθεια μια τέτοια φράση να προκύψει στο πρόβλημα μας;



👁️ Αν υπήρχε μια φράση με τουλάχιστον τρεις όρους τότε σημαίνει ότι υπάρχουν δύο **όπλα** τα οποία σε κάποια κατεύθυνση ρίχνουν ακτίνες οι οποίες φτάνουν τον στόχο με την ίδια κατεύθυνση (πχ κάθετα), άρα το ένα θα κατέστρεφε το άλλο! Αυτά τα όπλα τα έχουμε ήδη βγάλει!

Άρα η φόρμουλα που θα δημιουργήσουμε θα είναι μια 2-SAT φόρμουλα η οποία λύνεται σε γραμμικό χρόνο ως προς το $\#$ στόχων + $\#$ όπλων.

Άρα η φόρμουλα που θα δημιουργήσουμε θα είναι μια 2-SAT φόρμουλα η οποία λύνεται σε γραμμικό χρόνο ως προς το $\# \text{στόχων} + \# \text{όπλων}$.

Το πιο αργό βήμα του αλγορίθμου είναι να κάνουμε την προσομοίωση των ακτινών, σε χρόνο $\# \text{όπλων} \cdot O(mn)$.

Άρα η φόρμουλα που θα δημιουργήσουμε θα είναι μια 2-SAT φόρμουλα η οποία λύνεται σε γραμμικό χρόνο ως προς το $\# \text{στόχων} + \# \text{όπλων}$.

Το πιο αργό βήμα του αλγορίθμου είναι να κάνουμε την προσομοίωση των ακτινών, σε χρόνο $\# \text{όπλων} \cdot O(mn)$.

👉 Τόσο το 2-SAT όσο και αυτό ο γρίφος με του Καθρέφτες είναι μια επίδειξη της δύναμης των ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών σε προβλήματα που σε πρώτη ματιά μοιάζουν άσχετα.