

Προηγμένα Θέματα Αλγορίθμων

Διαλέξη 5: Ισχυρή Συνεκτικότητα και Εφαρμογές I

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ισχυρή Συνεκτικότητα σε κατευθυνόμενο γράφο $G(V, E)$.

Ένας γράφος αποκαλείται ισχυρά συνεκτικός αν από οποιονδήποτε κόμβο u φτάνω σε οποιονδήποτε κόμβο v .

Ισχυρή Συνεκτικότητα σε κατευθυνόμενο γράφο $G(V, E)$.

Ένας γράφος αποκαλείται ισχυρά συνεκτικός αν από οποιονδήποτε κόμβο u φτάνω σε οποιονδήποτε κόμβο v .

👉 Ισχυρή συνεκτικότητα σημαίνει ότι κάθε δύο κόμβοι u, v βρίσκονται σε κύκλο (όχι απαραίτητα απλό).

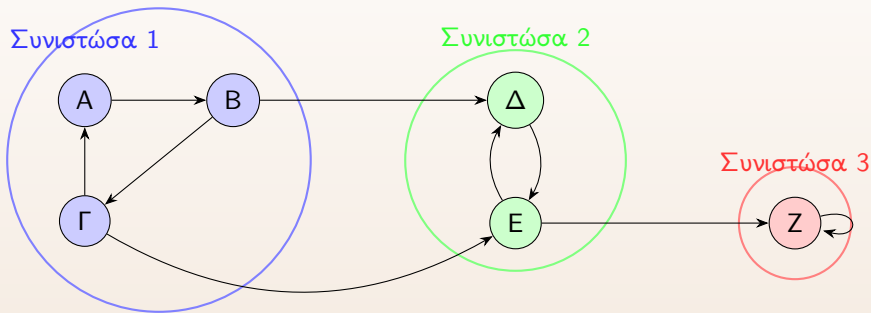
Ισχυρή Συνεκτικότητα σε κατευθυνόμενο γράφο $G(V, E)$.

Ένας γράφος αποκαλείται ισχυρά συνεκτικός αν από οποιονδήποτε κόμβο u φτάνω σε οποιονδήποτε κόμβο v .

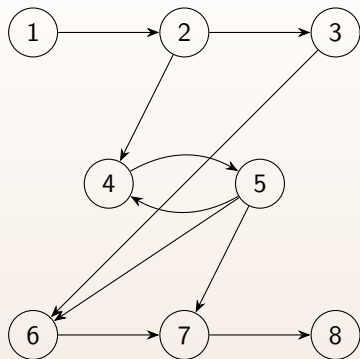
👉 Ισχυρή συνεκτικότητα σημαίνει ότι κάθε δύο κόμβοι u, v βρίσκονται σε κύκλο (όχι απαραίτητα απλό).

Ισχυρά συνεκτική συνιστώσα S ενός γράφου λέγεται ένα υποσύνολο κόμβων του V ώστε ο υπογράφος με κορυφές το S να είναι *μεγιστοτικά* ισχυρά συνεκτικός. Δηλαδή μην υπάρχει κορυφή $u \in V \setminus S$ ώστε ο γράφος με κορυφές $S \cup \{u\}$ να είναι ισχυρά συνεκτικός.

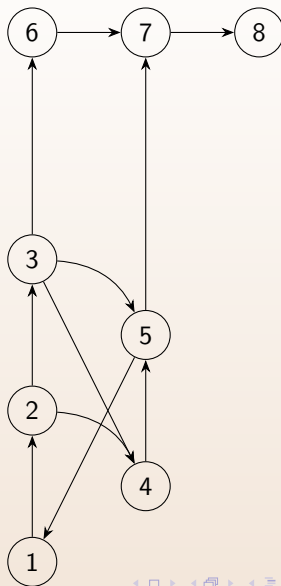
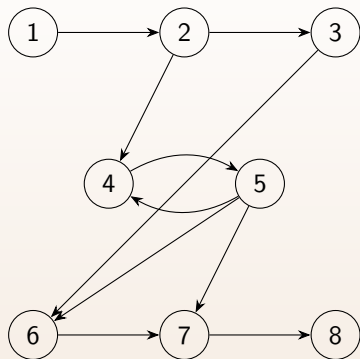
Ισχυρά συνεκτική συνιστώσα.



Για να βρούμε τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.



Για να βρούμε τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.



Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες και DAG.

Μπορούμε να φτιάξουμε ένα νέο γράφημα $\tilde{G}$ το οποίο έχει σαν σύνολο κορυφών $\tilde{V}$ τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του G .

Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες και DAG.

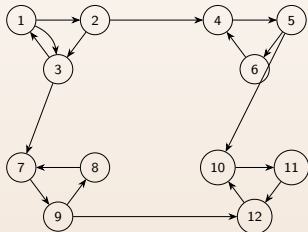
Μπορούμε να φτιάξουμε ένα νέο γράφημα $\tilde{G}$ το οποίο έχει σαν σύνολο κορυφών $\tilde{V}$ τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του G .

Για $\tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}$ η ακμή $(\tilde{u}, \tilde{v})$ υπάρχει στον $\tilde{G}$ αν και μόνο αν

Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες και DAG.

Μπορούμε να φτιάξουμε ένα νέο γράφημα $\tilde{G}$ το οποίο έχει σαν σύνολο κορυφών $\tilde{V}$ τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του G .

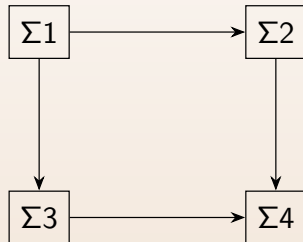
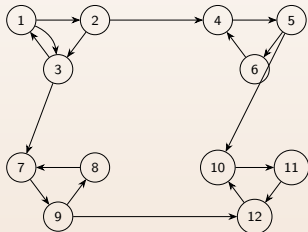
Για $\tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}$ η ακμή $(\tilde{u}, \tilde{v})$ υπάρχει στον $\tilde{G}$ αν και μόνο αν υπάρχει u, v στις αντίστοιχες ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του V με $(u, v) \in E$.



Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες και DAG.

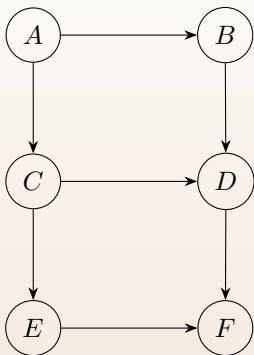
Μπορούμε να φτιάξουμε ένα νέο γράφημα $\tilde{G}$ το οποίο έχει σαν σύνολο κορυφών $\tilde{V}$ τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του G .

Για $\tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}$ η ακμή $(\tilde{u}, \tilde{v})$ υπάρχει στον $\tilde{G}$ αν και μόνο αν υπάρχει u, v στις αντίστοιχες ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του V με $(u, v) \in E$.



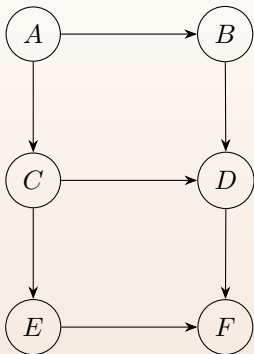
Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες και DAG.

👉 Κάθε DAG επιδέχεται τοπολογικής ταξινόμησης.



Ισχυρά συνεκτικές συνιστώες και DAG.

■ Κάθε DAG επιδέχεται τοπολογικής ταξινόμησης.



Μία τοπολογική ταξινόμηση για το παραπάνω DAG είναι:

$A \rightarrow B \rightarrow Z \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F$

ή, με διαφορετική σειρά των B και Z:

$A \rightarrow Z \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow F$

Που εμφανίζονται οι ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

- 1 Σε μεταγλωττιστές μέσω του γράφου ελέγχου:

Που εμφανίζονται οι ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

- ① Σε μεταγλωττιστές μέσω του γράφου ελέγχου:
 - για βελτιστοποίηση ανάθεσης καταχωρητών
 - για απαλοιφή νεκρού κώδικα.

Που εμφανίζονται οι ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

- ① Σε μεταγλωττιστές μέσω του γράφου ελέγχου:
 - για βελτιστοποίηση ανάθεσης καταχωρητών
 - για απαλοιφή νεκρού κώδικα.
- ② Σε βιολογικά δίκτυα:
 - για κατανόηση των δυναμικών του δικτύων πρωτεϊνών, βρίσκοντας πρωτεΐνες οι οποίες ενδεχομένως συμμετέχουν στην ίδια βιολογική διαδικασία

Που εμφανίζονται οι ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

- ❶ Σε μεταγλωττιστές μέσω του γράφου ελέγχου:
 - για βελτιστοποίηση ανάθεσης καταχωρητών
 - για απαλοιφή νεκρού κώδικα.
- ❷ Σε βιολογικά δίκτυα:
 - για κατανόηση των δυναμικών του δικτύων πρωτεϊνών, βρίσκοντας πρωτεΐνες οι οποίες ενδεχομένως συμμετέχουν στην ίδια βιολογική διαδικασία
 - σε δίκτυα γονιδίων, για να βρεθούν γονίδια τα οποία αλληλοεπηρεάζονται, δηλαδή επηρεάζουν το ένα επηρεάζει το βαθμό έκφρασης του άλλου

Που εμφανίζονται οι ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

- ❶ Σε μεταγλωττιστές μέσω του γράφου ελέγχου:
 - για βελτιστοποίηση ανάθεσης καταχωρητών
 - για απαλοιφή νεκρού κώδικα.
- ❷ Σε βιολογικά δίκτυα:
 - για κατανόηση των δυναμικών του δικτύων πρωτεϊνών, βρίσκοντας πρωτεΐνες οι οποίες ενδεχομένως συμμετέχουν στην ίδια βιολογική διαδικασία
 - σε δίκτυα γονιδίων, για να βρεθούν γονίδια τα οποία αλληλοεπηρεάζονται, δηλαδή επηρεάζουν το ένα επηρεάζει το βαθμό έκφρασης του άλλου
 - σε μεταβολικές διαδρομές (ορμόνες, ενδοκρινικό σύστημα)

Που εμφανίζονται οι ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

- ❶ Σε μεταγλωττιστές μέσω του γράφου ελέγχου:
 - για βελτιστοποίηση ανάθεσης καταχωρητών
 - για απαλοιφή νεκρού κώδικα.
- ❷ Σε βιολογικά δίκτυα:
 - για κατανόηση των δυναμικών του δικτύων πρωτεϊνών, βρίσκοντας πρωτεΐνες οι οποίες ενδεχομένως συμμετέχουν στην ίδια βιολογική διαδικασία
 - σε δίκτυα γονιδίων, για να βρεθούν γονίδια τα οποία αλληλοεπηρεάζονται, δηλαδή επηρεάζουν το ένα επηρεάζει το βαθμό έκφρασης του άλλου
 - σε μεταβολικές διαδρομές (ορμόνες, ενδοκρινικό σύστημα)
- ❸ Σε κοινωνικά δίκτυα για εντοπισμό κοινοτήτων.

Πώς βρίσκουμε ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες;

👉 Ο απλός αλγόριθμος τρέχει σε $O(n) \cdot O(m + n) = O(mn)$.

Βήματα

- 1 Για κάθε u , βρες ποιους κόμβους μπορεί να προσπελάσει.

Πώς βρίσκουμε ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες;

👉 Ο απλός αλγόριθμος τρέχει σε $O(n) \cdot O(m + n) = O(mn)$.

Βήματα

- 1 Για κάθε u , βρες ποιους κόμβους μπορεί να προσπελάσει.
- 2 Αν $u \rightarrow v$ και $v \rightarrow u$, τους βάζουμε στην ίδια συνιστώσα. ✓

Πώς βρίσκουμε ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες;

👉 Ο απλός αλγόριθμος τρέχει σε $O(n) \cdot O(m + n) = O(mn)$.

Βήματα

- 1 Για κάθε u , βρες ποιους κόμβους μπορεί να προσπελάσει.
- 2 Αν $u \rightarrow v$ και $v \rightarrow u$, τους βάζουμε στην ίδια συνιστώσα. ✓
- 3 Συμπίεση των συνιστωσών σε DAG.

Πώς βρίσκουμε ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες;

👉 Ο απλός αλγόριθμος τρέχει σε $O(n) \cdot O(m + n) = O(mn)$.

Βήματα

- 1 Για κάθε u , βρες ποιους κόμβους μπορεί να προσπελάσει.
- 2 Αν $u \rightarrow v$ και $v \rightarrow u$, τους βάζουμε στην ίδια συνιστώσα. ✓
- 3 Συμπίεση των συνιστωσών σε DAG.
- 4 Ορισμός ακμής μεταξύ συνιστωσών: $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ αν $\exists (u \in \Sigma, u' \in \Sigma')$.

Πώς βρίσκουμε ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες;

👉 Ο απλός αλγόριθμος τρέχει σε $O(n) \cdot O(m + n) = O(mn)$.

Βήματα

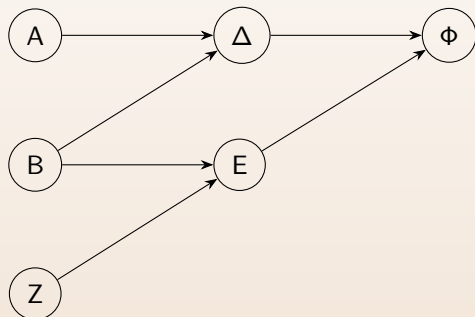
- 1 Για κάθε u , βρες ποιους κόμβους μπορεί να προσπελάσει.
- 2 Αν $u \rightarrow v$ και $v \rightarrow u$, τους βάζουμε στην ίδια συνιστώσα. ✓
- 3 Συμπίεση των συνιστωσών σε DAG.
- 4 Ορισμός ακμής μεταξύ συνιστωσών: $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ αν $\exists (u \in \Sigma, u' \in \Sigma')$.
- 5 Τοπολογική ταξινόμηση του DAG σε $O(m)$. ✓

Τοπολογική ταξινόμηση ενός DAG: υπενθύμιση

- 1: function $\text{dfs}(u)$
- 2: Αν έχεις ήδη επισκεφτεί το u , επέστρεψε.
- 3: Τρέξε $\text{dfs}(v)$ για όλα τα παιδιά v του u
- 4: Γράψε κάτω τον u
- 5: Για κάθε x κάνε $\text{dfs}(x)$ // $O(m + n)$ χρόνος

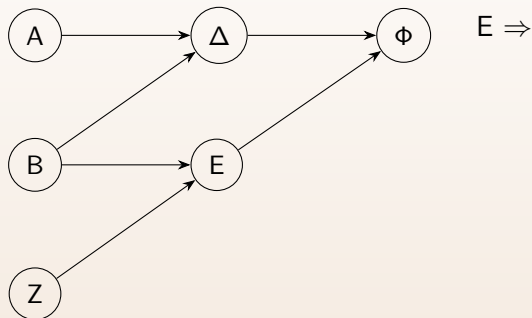
👉 Όποτε επιστρέφει η κλήση του u τότε έχει ταξινομήσει τοπολογικά το DAG το οποίο 'βλέπει' ο u .

Στο τέλος, όλοι οι κόμβοι σε μια σειρά. Αν τη διαβάσουμε ανάποδα, είναι είναι μια τοπολογική ταξινόμηση.



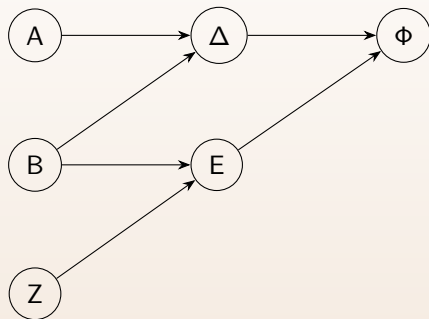
Παράδειγμα τοπολογικής ταξινόμησης.

Ας πούμε ότι καλούμε τη `dfs()` με τη σειρά E, B, Δ, Φ, A, Z.



Παράδειγμα τοπολογικής ταξινόμησης.

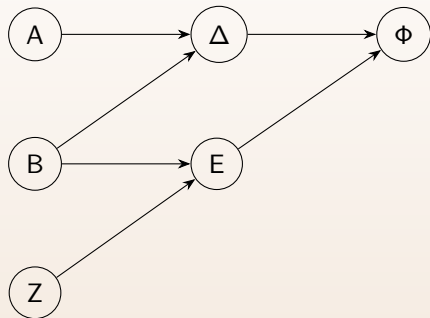
Ας πούμε ότι καλούμε τη $\text{dfs}()$ με τη σειρά E, B, Δ, Φ, A, Z.



$E \Rightarrow$ γράφει κάτω Φ, E.

Παράδειγμα τοπολογικής ταξινόμησης.

Ας πούμε ότι καλούμε τη `dfs()` με τη σειρά E, B, Δ, Φ, A, Z.

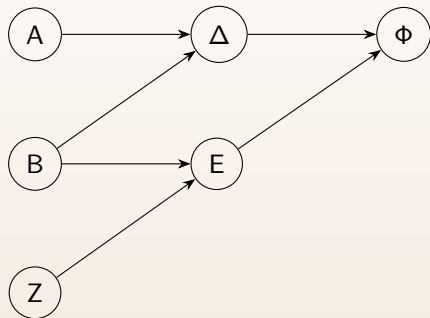


$E \Rightarrow$ γράφει κάτω Φ, E.

$B \Rightarrow$ γράφει κάτω το Δ, μετά το B, άρα έχουμε Φ, E, Δ, B.

Παράδειγμα τοπολογικής ταξινόμησης.

Ας πούμε ότι καλούμε τη `dfs()` με τη σειρά E, B, Δ, Φ, A, Z.



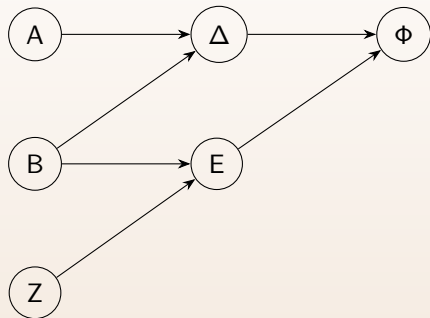
E $\Rightarrow$ γράφει κάτω Φ, E.

B $\Rightarrow$ γράφει κάτω το Δ, μετά το B, άρα έχουμε Φ, E, Δ, B.

Δ $\Rightarrow$ δεν κάνει τίποτα

Παράδειγμα τοπολογικής ταξινόμησης.

Ας πούμε ότι καλούμε τη `dfs()` με τη σειρά E, B, Δ, Φ, A, Z.



E $\Rightarrow$ γράφει κάτω Φ, E.

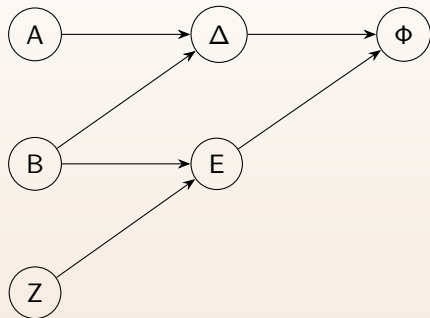
B $\Rightarrow$ γράφει κάτω το Δ, μετά το B, άρα έχουμε Φ, E, Δ, B.

Δ $\Rightarrow$ δεν κάνει τίποτα

Φ $\Rightarrow$ δεν κάνει τίποτα

Παράδειγμα τοπολογικής ταξινόμησης.

Ας πούμε ότι καλούμε τη `dfs()` με τη σειρά E, B, Δ, Φ, A, Z.



E $\Rightarrow$ γράφει κάτω Φ, E.

B $\Rightarrow$ γράφει κάτω το Δ, μετά το B, άρα έχουμε Φ, E, Δ, B.

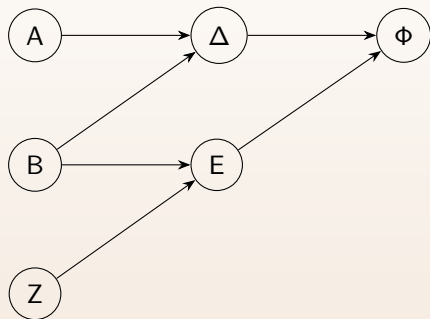
Δ $\Rightarrow$ δεν κάνει τίποτα

Φ $\Rightarrow$ δεν κάνει τίποτα

A και μετά στο Z $\Rightarrow$ μας δίνει Φ, E, Δ, B, A, Z.

Παράδειγμα τοπολογικής ταξινόμησης.

Ας πούμε ότι καλούμε τη `dfs()` με τη σειρά E, B, Δ, Φ, A, Z.



E $\Rightarrow$ γράφει κάτω Φ, E.

B $\Rightarrow$ γράφει κάτω το Δ, μετά το B, άρα έχουμε Φ, E, Δ, B.

Δ $\Rightarrow$ δεν κάνει τίποτα

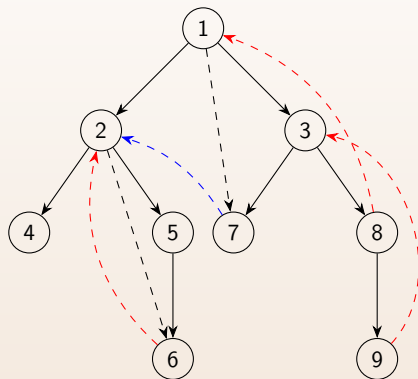
Φ $\Rightarrow$ δεν κάνει τίποτα

A και μετά στο Z $\Rightarrow$ μας δίνει Φ, E, Δ, B, A, Z.

★ Τοπολογική ταξινόμηση:
Z, A, B, Δ, E, Φ.

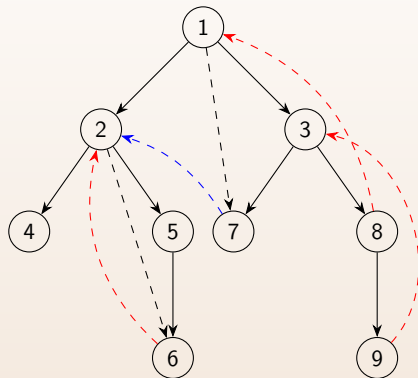
Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

★ Κάνουμε αναζήτηση κατά βάθος. **Πίσω** ακμές, **Διαγώνιες** ακμές.



Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

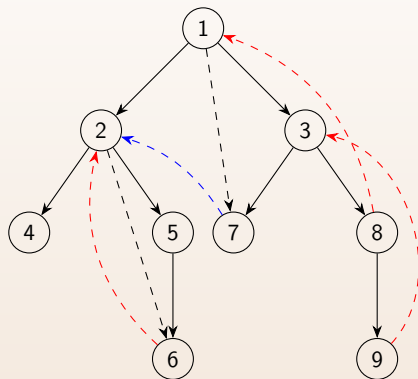
★ Κάνουμε αναζήτηση κατά βάθος. **Πίσω** ακμές, **Διαγώνιες** ακμές.



Υπάρχουν 4 ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

★ Κάνουμε αναζήτηση κατά βάθος. **Πίσω** ακμές, **Διαγώνιες** ακμές.

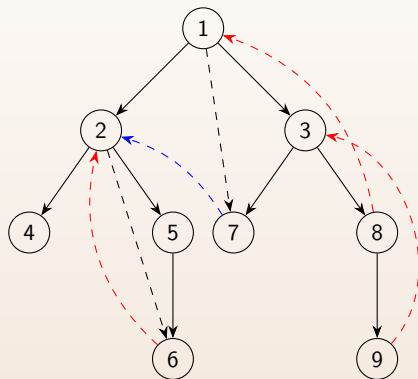


Υπάρχουν 4 ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Οι κόμβοι 2, 5, 6 είναι ισχυρά συνδεδεμένοι.

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

★ Κάνουμε αναζήτηση κατά βάθος. **Πίσω** ακμές, **Διαγώνιες** ακμές.



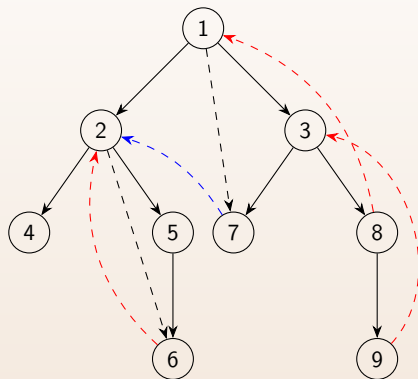
Υπάρχουν 4 ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Οι κόμβοι 2, 5, 6 είναι ισχυρά συνδεδεμένοι.

Οι κόμβοι 1, 3, 8, 9 είναι ισχυρά συνδεδεμένοι.

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

★ Κάνουμε αναζήτηση κατά βάθος. **Πίσω** ακμές, **Διαγώνιες** ακμές.



Υπάρχουν 4 ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Οι κόμβοι 2, 5, 6 είναι ισχυρά συνδεδεμένοι.

Οι κόμβοι 1, 3, 8, 9 είναι ισχυρά συνδεδεμένοι.

Οι κόμβοι 1 και 7 είναι ο καθένας μια ισχυρή συνιστώσα μόνος του.

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

👉 Κάθε κόμβος u κρατάει το $\text{depth}[u]$ ως η απόσταση από την ρίζα.

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

- ☛ Κάθε κόμβος u κρατάει το $\text{depth}[u]$ ως η απόσταση από την ρίζα.
- ☛ Μία μεταβλητή $\text{low}[u]$ σαν **σήμα**:

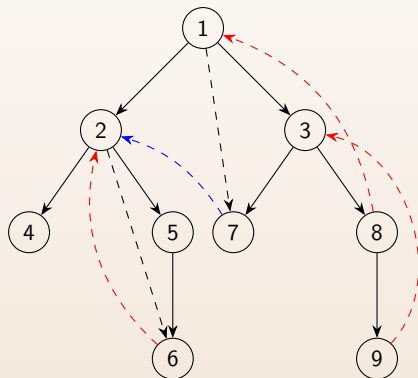
Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

- ☛ Κάθε κόμβος u κρατάει το $\text{depth}[u]$ ως η απόσταση από την ρίζα.
- ☛ Μία μεταβλητή $\text{low}[u]$ σαν **σήμα**: ποιος είναι ο κόμβος ελάχιστου βάθους, ισχυρά συνδεδεμένος με τον u , τον οποίο μπορεί να καταλάβει ο u αν κοιτάει μόνο αυτόν και τα παιδιά του;

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

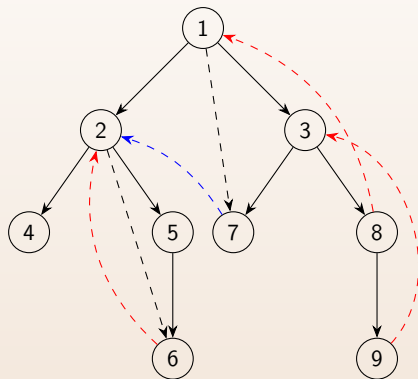
- 👉 Κάθε κόμβος u κρατάει το $\text{depth}[u]$ ως η απόσταση από την ρίζα.
- 👉 Μία μεταβλητή $\text{low}[u]$ σαν **σήμα**: ποιος είναι ο κόμβος ελάχιστου βάθους, ισχυρά συνδεδεμένος με τον u , τον οποίο μπορεί να καταλάβει ο u αν κοιτάει μόνο αυτόν και τα παιδιά του;

Πως θα ξαναγράψαμε το $\text{dfs}(u)$;



Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

- 👉 Κάθε κόμβος u κρατάει το $\text{depth}[u]$ ως η απόσταση από την ρίζα.
- 👉 Μία μεταβλητή $\text{low}[u]$ σαν **σήμα**: ποιος είναι ο κόμβος ελάχιστου βάθους, ισχυρά συνδεδεμένος με τον u , τον οποίο μπορεί να καταλάβει ο u αν κοιτάει μόνο αυτόν και τα παιδιά του;



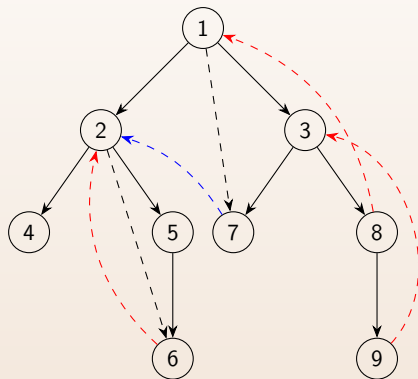
Πως θα ξαναγράψαμε το $\text{dfs}(u)$;

Για κάθε ακμή (u, v) :

- Αν είναι **πίσω** ακμή κάνε
 $\text{low}[u] = \min\{\text{low}[u], \text{depth}[v]\}$

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

- 👉 Κάθε κόμβος u κρατάει το $\text{depth}[u]$ ως η απόσταση από την ρίζα.
- 👉 Μία μεταβλητή $\text{low}[u]$ σαν **σήμα**: ποιος είναι ο κόμβος ελάχιστου βάθους, ισχυρά συνδεδεμένος με τον u , τον οποίο μπορεί να καταλάβει ο u αν κοιτάει μόνο αυτόν και τα παιδιά του;



Πως θα ξαναγράψαμε το $\text{dfs}(u)$;

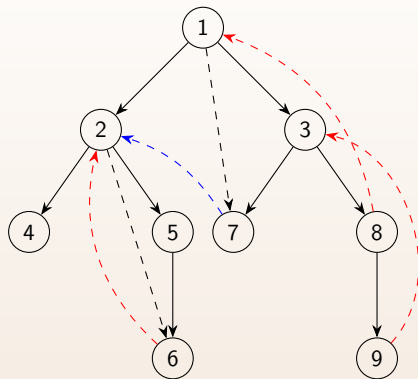
Για κάθε ακμή (u, v) :

- Αν είναι **πίσω** ακμή κάνε $\text{low}[u] = \min\{\text{low}[u], \text{depth}[v]\}$
- Αν είναι **μπροστά** ακμή κάνε $\text{low}[u] = \min\{\text{low}[u], \text{low}[v]\}$.

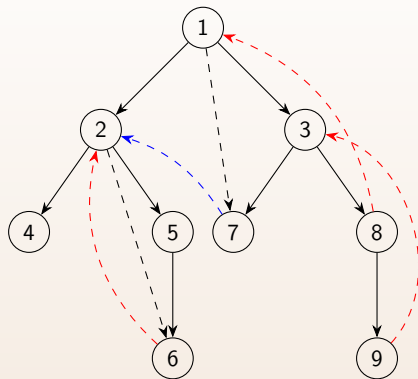
Αν ισχύει $\text{low}[u] = \text{depth}[u]$ ως πούμε τον u **κρίσιμο σημείο**.

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

$$-\text{low}[1] = 1.$$



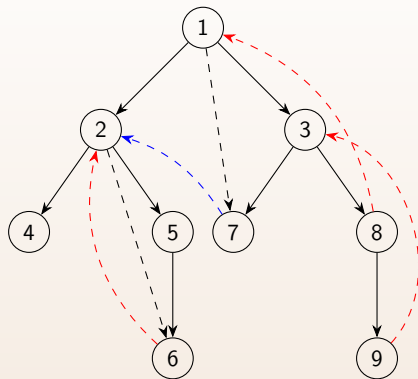
Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.



$$-\text{low}[1] = 1.$$

$$-\text{low}[2] = 2.$$

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

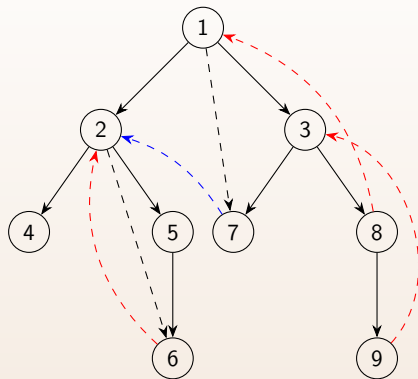


$$-\text{low}[1] = 1.$$

$$-\text{low}[2] = 2.$$

$$-\text{low}[4] = 3.$$

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

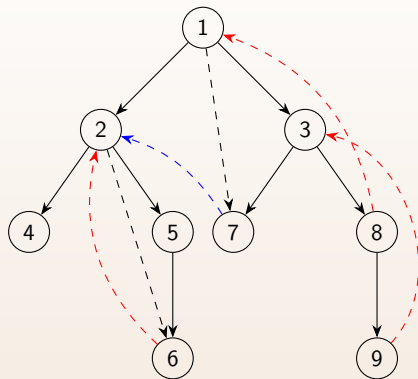


$-\text{low}[1] = 1.$

$-\text{low}[2] = 2.$

$-\text{low}[4] = 3.$ Εδώ η κλήση στον 4 ολοκληρώνεται, και ο 4 είναι μια συνιστώσα μόνος του.

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.



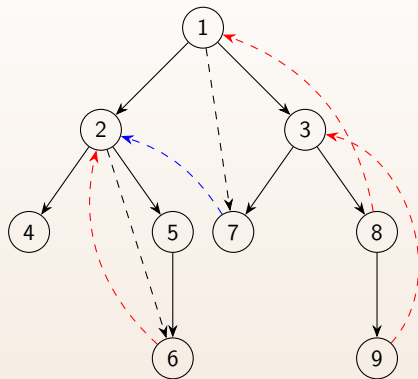
$low[1] = 1.$

$low[2] = 2.$

$low[4] = 3.$ Εδώ η κλήση στον 4 ολοκληρώνεται, και ο 4 είναι μια συνιστώσα μόνος του.

$low[5] = 3.$

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.



$$-low[1] = 1.$$

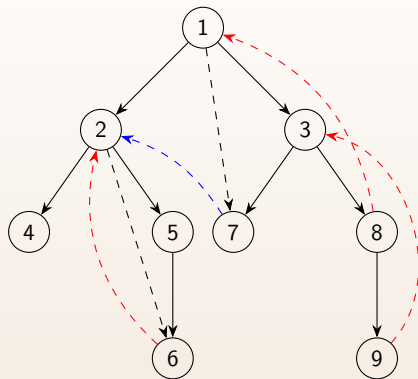
$$-low[2] = 2.$$

$-low[4] = 3$. Εδώ η κλήση στον 4 ολοκληρώνεται, και ο 4 είναι μια συνιστώσα μόνος του.

$$-low[5] = 3.$$

$$-low[6] = 4.$$

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.



$low[1] = 1.$

$low[2] = 2.$

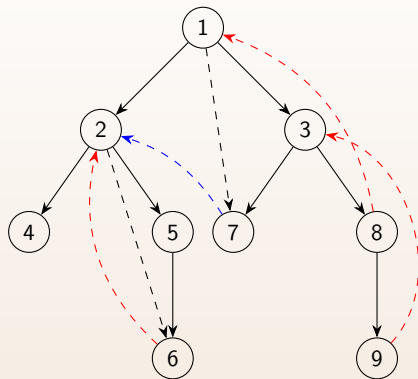
$low[4] = 3.$ Εδώ η κλήση στον 4 ολοκληρώνεται, και ο 4 είναι μια συνιστώσα μόνος του.

$low[5] = 3.$

$low[6] = 4.$

$low[6] = 2$ (λόγω της πίσω ακμής (6, 2)).

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.



$low[1] = 1.$

$low[2] = 2.$

$low[4] = 3.$ Εδώ η κλήση στον 4 ολοκληρώνεται, και ο 4 είναι μια συνιστώσα μόνος του.

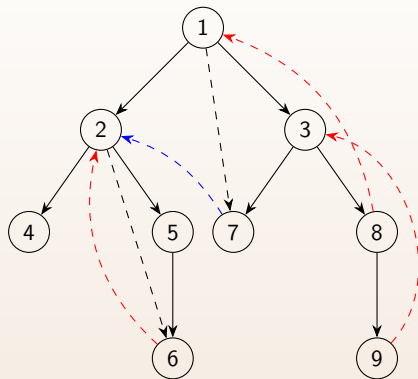
$low[5] = 3.$

$low[6] = 4.$

$low[6] = 2$ (λόγω της πίσω ακμής (6, 2)).

$low[5] = 2$ (επειδή παίρνει το σήμα από το 6).

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.



$low[1] = 1.$

$low[2] = 2.$

$low[4] = 3.$ Εδώ η κλήση στον 4 ολοκληρώνεται, και ο 4 είναι μια συνιστώσα μόνος του.

$low[5] = 3.$

$low[6] = 4.$

$low[6] = 2$ (λόγω της πίσω ακμής $(6, 2)$).

$low[5] = 2$ (επειδή παίρνει το σήμα από το 6).

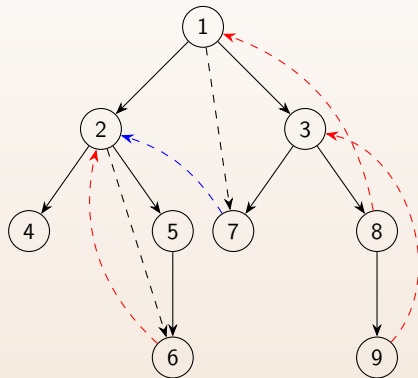
-Η κλήση στον 2 ολοκληρώνεται, και συνειδητοποιεί ότι είναι κρίσιμο σημείο.

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Μεταβολή του αλγόριθμου ώστε να βρίσκει τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

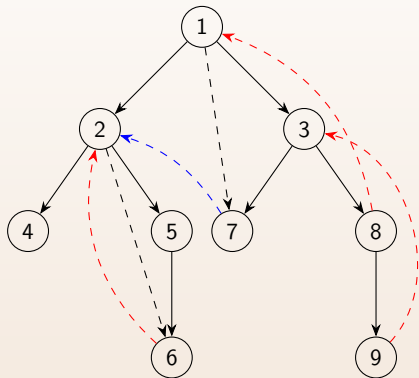
Μεταβολή του αλγόριθμου ώστε να βρίσκει τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες. Κρατάμε και μια στοίβα S .



Κάθε φορά που κάνουμε $\text{dfs}(x)$ για ένα καινούριο x βάζουμε το x στη στοίβα.

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Μεταβολή του αλγόριθμου ώστε να βρίσκει τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες. Κρατάμε και μια στοίβα S .

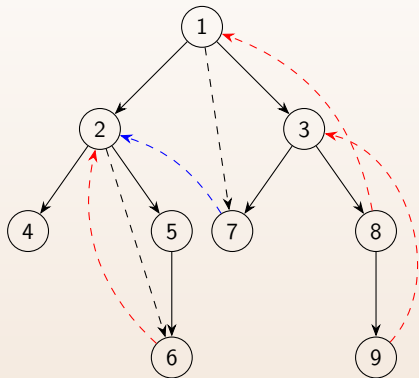


Κάθε φορά που κάνουμε $\text{dfs}(x)$ για ένα καινούριο x βάζουμε το x στη στοίβα.

Αν η κλήση στον u φτάσει στο τέλος της και $\text{depth}[u] = \text{low}[u]$

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Μεταβολή του αλγόριθμου ώστε να βρίσκει τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες. Κρατάμε και μια στοίβα S .



Κάθε φορά που κάνουμε $\text{dfs}(x)$ για ένα καινούριο x βάζουμε το x στη στοίβα.

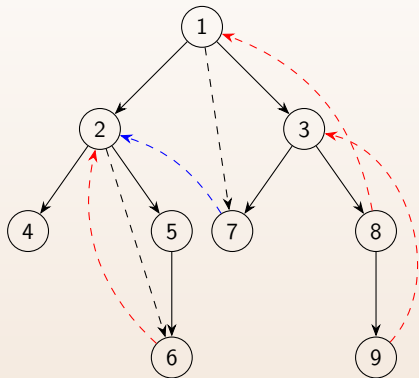
Αν η κλήση στον u φτάσει στο τέλος της και $\text{depth}[u] = \text{low}[u]$

$\Rightarrow$

ό,τι έχει μείνει στη στοίβα από την αρχή έως και τον u είναι η ισχυρά συνεκτική συνιστώσα στην οποία ανήκει ο u !

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Μεταβολή του αλγόριθμου ώστε να βρίσκει τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες. Κρατάμε και μια στοίβα S .



Κάθε φορά που κάνουμε $\text{dfs}(x)$ για ένα καινούριο x βάζουμε το x στη στοίβα.

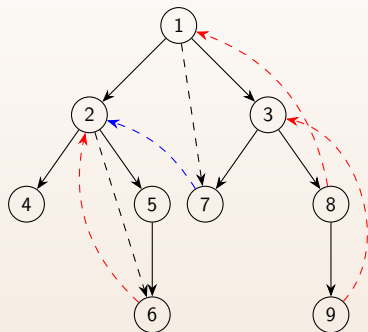
Αν η κλήση στον u φτάσει στο τέλος της και $\text{depth}[u] = \text{low}[u]$

$\Rightarrow$

ό,τι έχει μείνει στη στοίβα από την αρχή έως και τον u είναι η ισχυρά συνεκτική συνιστώσα στην οποία ανήκει ο u !

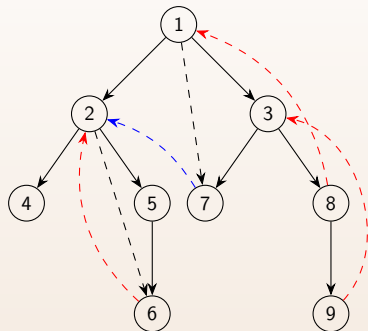
Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Ας δούμε πως θα ανακαλύψει την ισχυρά συνεκτική συνιστώσα των 1, 3, 8, 9



Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

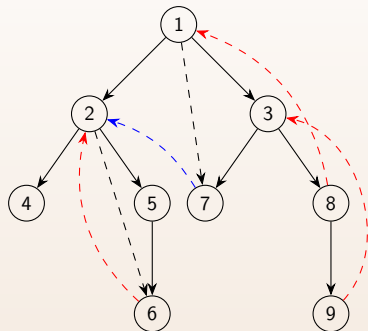
Ας δούμε πως θα ανακαλύψει την ισχυρά συνεκτική συνιστώσα των 1, 3, 8, 9



..., $\text{low}[3] = 2$,

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

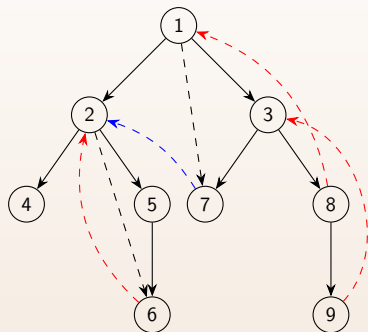
Ας δούμε πως θα ανακαλύψει την ισχυρά συνεκτική συνιστώσα των 1, 3, 8, 9



$\dots, \text{low}[3] = 2, \text{low}[7] = 3.$

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Ας δούμε πως θα ανακαλύψει την ισχυρά συνεκτική συνιστώσα των 1, 3, 8, 9

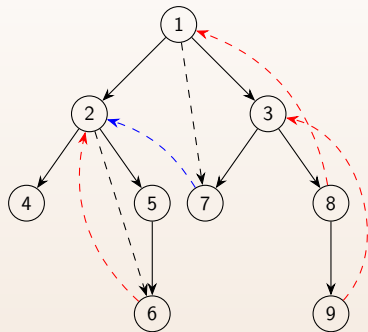


..., $\text{low}[3] = 2, \text{low}[7] = 3$.

Σε εκείνο το σημείο $S = [7, 3, 1]$.

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Ας δούμε πως θα ανακαλύψει την ισχυρά συνεκτική συνιστώσα των 1, 3, 8, 9



..., $\text{low}[3] = 2, \text{low}[7] = 3$.

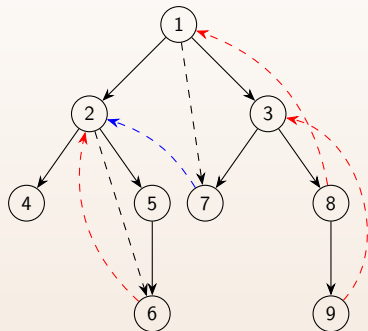
Σε εκείνο το σημείο $S = [7, 3, 1]$. Ο

7 τελειώνει και ικανοποιεί

$\text{low}[7] = \text{depth}[7]$,

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Ας δούμε πως θα ανακαλύψει την ισχυρά συνεκτική συνιστώσα των 1, 3, 8, 9

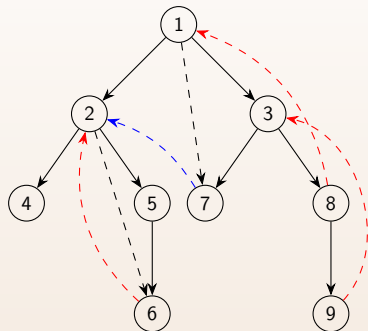


..., $\text{low}[3] = 2, \text{low}[7] = 3$.

Σε εκείνο το σημείο $S = [7, 3, 1]$. Ο 7 τελειώνει και ικανοποιεί $\text{low}[7] = \text{depth}[7]$, άρα είναι μια συνιστώσα μόνος του και βγαίνει από το S .

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Ας δούμε πως θα ανακαλύψει την ισχυρά συνεκτική συνιστώσα των 1, 3, 8, 9



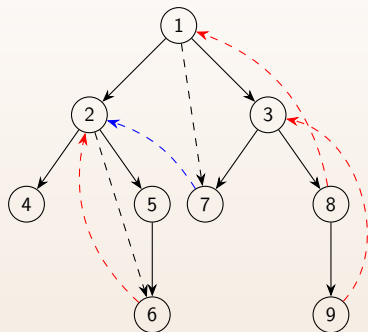
..., $\text{low}[3] = 2, \text{low}[7] = 3$.

Σε εκείνο το σημείο $S = [7, 3, 1]$. Ο 7 τελειώνει και ικανοποιεί $\text{low}[7] = \text{depth}[7]$, άρα είναι μια συνιστώσα μόνος του και βγαίνει από το S .

$\text{low}[8] = 3$,

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Ας δούμε πως θα ανακαλύψει την ισχυρά συνεκτική συνιστώσα των 1, 3, 8, 9



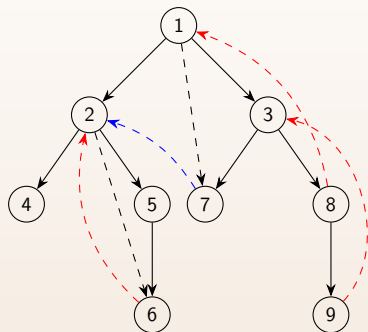
..., $\text{low}[3] = 2, \text{low}[7] = 3$.

Σε εκείνο το σημείο $S = [7, 3, 1]$. Ο 7 τελειώνει και ικανοποιεί $\text{low}[7] = \text{depth}[7]$, άρα είναι μια συνιστώσα μόνος του και βγαίνει από το S .

$\text{low}[8] = 3, \text{low}[8] = 1$ (λόγω πίσω ακμής),

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Ας δούμε πως θα ανακαλύψει την ισχυρά συνεκτική συνιστώσα των 1, 3, 8, 9



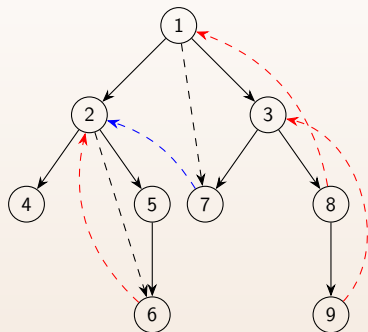
..., $\text{low}[3] = 2, \text{low}[7] = 3$.

Σε εκείνο το σημείο $S = [7, 3, 1]$. Ο 7 τελειώνει και ικανοποιεί $\text{low}[7] = \text{depth}[7]$, άρα είναι μια συνιστώσα μόνος του και βγαίνει από το S .

$\text{low}[8] = 3, \text{low}[8] = 1$ (λόγω πίσω ακμής), $\text{low}[9] = 4$,

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Ας δούμε πως θα ανακαλύψει την ισχυρά συνεκτική συνιστώσα των 1, 3, 8, 9



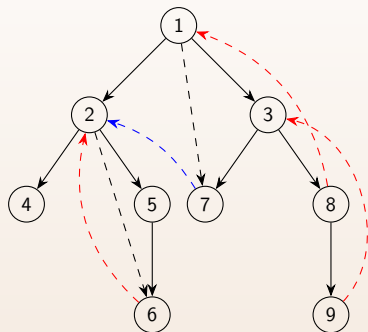
..., $\text{low}[3] = 2, \text{low}[7] = 3$.

Σε εκείνο το σημείο $S = [7, 3, 1]$. Ο 7 τελειώνει και ικανοποιεί $\text{low}[7] = \text{depth}[7]$, άρα είναι μια συνιστώσα μόνος του και βγαίνει από το S .

$\text{low}[8] = 3, \text{low}[8] = 1$ (λόγω **πίσω** ακμής), $\text{low}[9] = 4, \text{low}[9] = 2$ (λόγω **πίσω** ακμής),

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Ας δούμε πως θα ανακαλύψει την ισχυρά συνεκτική συνιστώσα των 1, 3, 8, 9



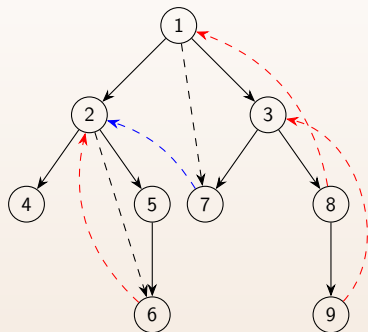
..., $\text{low}[3] = 2, \text{low}[7] = 3$.

Σε εκείνο το σημείο $S = [7, 3, 1]$. Ο 7 τελειώνει και ικανοποιεί $\text{low}[7] = \text{depth}[7]$, άρα είναι μια συνιστώσα μόνος του και βγαίνει από το S .

$\text{low}[8] = 3, \text{low}[8] = 1$ (λόγω **πίσω** ακμής), $\text{low}[9] = 4, \text{low}[9] = 2$ (λόγω **πίσω** ακμής), $\text{low}[8]$ μένει ίδιο

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Ας δούμε πως θα ανακαλύψει την ισχυρά συνεκτική συνιστώσα των 1, 3, 8, 9



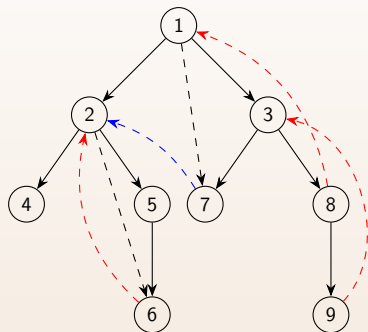
..., $\text{low}[3] = 2, \text{low}[7] = 3$.

Σε εκείνο το σημείο $S = [7, 3, 1]$. Ο 7 τελειώνει και ικανοποιεί $\text{low}[7] = \text{depth}[7]$, άρα είναι μια συνιστώσα μόνος του και βγαίνει από το S .

$\text{low}[8] = 3, \text{low}[8] = 1$ (λόγω **πίσω** ακμής), $\text{low}[9] = 4, \text{low}[9] = 2$ (λόγω **πίσω** ακμής), $\text{low}[8]$ μένει ίδιο, $\text{low}[3] = 1$ λόγω του σήματος από τον 8,

Αλγόριθμος του Tarjan για ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.

Ας δούμε πως θα ανακαλύψει την ισχυρά συνεκτική συνιστώσα των 1, 3, 8, 9



..., $\text{low}[3] = 2, \text{low}[7] = 3$.

Σε εκείνο το σημείο $S = [7, 3, 1]$. Ο 7 τελειώνει και ικανοποιεί $\text{low}[7] = \text{depth}[7]$, άρα είναι μια συνιστώσα μόνος του και βγαίνει από το S .

$\text{low}[8] = 3, \text{low}[8] = 1$ (λόγω **πίσω** ακμής), $\text{low}[9] = 4, \text{low}[9] = 2$ (λόγω **πίσω** ακμής), $\text{low}[8]$ μένει ίδιο, $\text{low}[3] = 1$ λόγω του σήματος από τον 8, ο 1 ικανοποιεί το κριτήριο με την στοίβα να είναι $[9, 8, 3, 1]$ ✓

Αλγόριθμος Tarjan

```
1: function tarjan( $u$ )
2:   Αν έχουμε ήδη επισκεφτεί το  $u$ , επιστρέφουμε.
3:    $\text{low}[u] = \text{depth}[u]$ .
4:    $\text{cur\_ord} = \text{cur\_ord} + 1, \text{depth}[u] = \text{cur\_ord}$ 
5:   Βάλε το  $u$  στο  $S$ 
6:   Για κάθε πίσω ακμή  $(u, v)$   $\text{low}[u] = \text{depth}[v]$ 
7:   Για κάθε μπροστά ακμή  $(u, v)$ 
8:     Τρέξε  $\text{tarjan}(v)$ .
9:      $\text{low}[u] = \min\{\text{low}[u], \text{low}[v]\}$ 
10:  Αν  $\text{depth}[u] = \text{low}[u]$ 
11:    Αδειάζουμε τις κορυφές στο  $S$  από πάνω μέχρι και το  $u$ .
12:    Οι κορυφές αυτές είναι μια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα.
13:     $\text{cur\_ord} = \text{cur\_ord} - 1$ 
14:
15:  $S = \emptyset, \text{cur\_ord} = 0$ 
16: Για κάθε  $x$  τρέχουμε  $\text{tarjan}(x)$  //  $O(m + n)$  χρόνος
```

Θεώρημα (Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες σε γραμμικό χρόνο)

Ο αλγόριθμος του Tarjan βρίσκει τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες ενός γράφου με n κορυφές και m ακμές σε χρόνο $O(m + n)$.

Ταυτόχρονα, μπορεί να εμπλουτιστεί ώστε να παράγει και το DAG του συμπιεσμένου γράφου ταυτόχρονα. ✓