

Προηγμένα Θέματα Αλγορίθμων

Πιθανοτικοί Αλγόριθμοι II

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ένας μετρητής.

Έστω ότι θέλουμε να υλοποιήσουμε έναν μετρητή για ένα ρολόι.

Ένας μετρητής.

Έστω ότι θέλουμε να υλοποιήσουμε έναν μετρητή για ένα ρολόι.

$$X = 0$$

Σε κάθε χτύπο, κάνε $X := X + 1$.

Μπορούμε να κρατήσουμε $\log n$ bits και να υλοποιήσουμε τον μετρητή (αν μετράει ως το n).

Ένας μετρητής.

Έστω ότι θέλουμε να υλοποιήσουμε έναν μετρητή για ένα ρολόι.

$$X = 0$$

Σε κάθε χτύπο, κάνε $X := X + 1$.

Μπορούμε να κρατήσουμε $\log n$ bits και να υλοποιήσουμε τον μετρητή (αν μετράει ως το n).

Μπορούμε καλύτερα;

👁 Αν έχουμε $\log_2 n - 1$ bits τότε μπορούμε να κωδικοποιήσουμε $2^{\log_2 n - 1} = \frac{n}{2}$ αριθμούς

Καλύτερα από $\log n$ bits;

👁 Αν έχουμε $\log_2 n - 1$ bits τότε μπορούμε να κωδικοποιήσουμε $2^{\log_2 n - 1} = \frac{n}{2}$ αριθμούς

$\Rightarrow$

δύο αριθμοί $[i, j]$ αντιστοιχούν στα ίδια bits (αρχή Περιστεροφωλιάς)
ό,τι και να κάνουμε.

Μπορούμε μήπως να κάνουμε καλύτερα αν χρησιμοποιήσουμε
τυχειριότητα;

Ο αλγόριθμος του Morris.

👉 Θα χρησιμοποιήσουμε τυχαιότητα.

Ο αλγόριθμος του Morris.

☛ Θα χρησιμοποιήσουμε τυχαιότητα.

Αλγόριθμος Morris

$$X = 0$$

Σε κάθε χτύπο, κάνε $X := X + 1$ με πιθανότητα $\frac{1}{2^X}$.

Επέστρεψε το $2^X - 1$

Ο αλγόριθμος του Morris.

☛ Θα χρησιμοποιήσουμε τυχειότητα.

Αλγόριθμος Morris

$$X = 0$$

Σε κάθε χτύπο, κάνε $X := X + 1$ με πιθανότητα $\frac{1}{2^X}$.

Επέστρεψε το $2^X - 1$

👁 Προσοχή: Το X εδώ είναι πρακτικά το $\log(\text{ΜΕΤΡΗΤΗΣ} - 1)$, άρα φαίνεται να γράφω κάτω $\log \log(n - 1)$ bits!

Ο αλγόριθμος του Morris.

☛ Θα χρησιμοποιήσουμε τυχαιότητα.

Αλγόριθμος Morris

$$X = 0$$

Σε κάθε χτύπο, κάνε $X := X + 1$ με πιθανότητα $\frac{1}{2^X}$.

Επέστρεψε το $2^X - 1$

👁 Προσοχή: Το X εδώ είναι πρακτικά το $\log(\text{ΜΕΤΡΗΤΗΣ} - 1)$, άρα φαίνεται να γράφω κάτω $\log \log(n - 1)$ bits!

Είναι δυνατόν ποτέ αυτό να επιστρέφει *ακριβώς* τον μετρητή;

Θα δείξουμε ότι αν έχουν γίνει n χτύποι τότε (μια παραλλαγή του αλγόριθμου) του Morris επιστρέφει έναν αριθμό $\hat{n}$ ώστε $(1 - \epsilon)n \leq \hat{n} \leq (1 + \epsilon)n$.

Και τυχαιότητα και προσέγγιση.

Θα δείξουμε ότι αν έχουν γίνει n χτύποι τότε (μια παραλλαγή του αλγόριθμου) του Morris επιστρέφει έναν αριθμό $\hat{n}$ ώστε $(1 - \epsilon)n \leq \hat{n} \leq (1 + \epsilon)n$.

👉 Είναι απαραίτητο να υπάρχει και τυχαιότητα και να δίνεται προσεγγιστική απάντηση αν θέλουμε να σπάσουμε το φράγμα των $\log n$ bits.

Και τυχαιότητα και προσέγγιση.

Θα δείξουμε ότι αν έχουν γίνει n χτύποι τότε (μια παραλλαγή του αλγόριθμου) του Morris επιστρέφει έναν αριθμό $\hat{n}$ ώστε $(1 - \epsilon)n \leq \hat{n} \leq (1 + \epsilon)n$.

☛ Είναι απαραίτητο να υπάρχει και τυχαιότητα και να δίνεται προσεγγιστική απάντηση αν θέλουμε να σπάσουμε το φράγμα των $\log n$ bits.

☛ Αυτό που ουσιαστικά συμβαίνει είναι ότι αποθηκεύουμε μία αθροιστική προσέγγιση του λογαρίθμου του μετρητή.

Και τυχαιότητα και προσέγγιση.

Θα δείξουμε ότι αν έχουν γίνει n χτύποι τότε (μια παραλλαγή του αλγόριθμου) του Morris επιστρέφει έναν αριθμό $\hat{n}$ ώστε $(1 - \epsilon)n \leq \hat{n} \leq (1 + \epsilon)n$.

☛ Είναι απαραίτητο να υπάρχει και τυχαιότητα και να δίνεται προσεγγιστική απάντηση αν θέλουμε να σπάσουμε το φράγμα των $\log n$ bits.

☛ Αυτό που ουσιαστικά συμβαίνει είναι ότι αποθηκεύουμε μία αθροιστική προσέγγιση του λογαρίθμου του μετρητή.

Προσοχή, ότι δεν μπορούμε να γράψουμε κάτω καν το n , δεν έχουμε τόσα bits!

Και τυχαιότητα και προσέγγιση.

Θα δείξουμε ότι αν έχουν γίνει n χτύποι τότε (μια παραλλαγή του αλγόριθμου) του Morris επιστρέφει έναν αριθμό $\hat{n}$ ώστε $(1 - \epsilon)n \leq \hat{n} \leq (1 + \epsilon)n$.

☛ Είναι απαραίτητο να υπάρχει και τυχαιότητα και να δίνεται προσεγγιστική απάντηση αν θέλουμε να σπάσουμε το φράγμα των $\log n$ bits.

☛ Αυτό που ουσιαστικά συμβαίνει είναι ότι αποθηκεύουμε μία αθροιστική προσέγγιση του λογαρίθμου του μετρητή.

Προσοχή, ότι δεν μπορούμε να γράψουμε κάτω καν το n , δεν έχουμε τόσα bits!

Ανισότητα Chebyshev.

Για μία τυχαία μεταβλητή $\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$.

Ανισότητα Chebyshev.

Για μία τυχαία μεταβλητή $\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$.

Markov

Έστω $X \geq 0$ τυχαία μεταβλητή. Τότε, $\Pr[X \geq \lambda \cdot E[X]] \leq \frac{1}{\lambda}$.

Chebyshev

Έστω X τυχαία μεταβλητή. Τότε $\Pr[|X - E[X]| \geq \lambda] \leq \frac{\text{Var}(X)}{\lambda^2}$.

Ανισότητα Chebyshev.

Για μία τυχαία μεταβλητή $\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$.

Markov

Έστω $X \geq 0$ τυχαία μεταβλητή. Τότε, $\Pr[X \geq \lambda \cdot E[X]] \leq \frac{1}{\lambda}$.

Chebyshev

Έστω X τυχαία μεταβλητή. Τότε $\Pr[|X - E[X]| \geq \lambda] \leq \frac{\text{Var}(X)}{\lambda^2}$.

Εμπειρικά, $X \in \left[E[X] - O\left(\sqrt{\text{Var}(X)}\right), E[X] + O\left(\sqrt{\text{Var}(X)}\right) \right]$ με καλή (σταθερή) πιθανότητα.

Απόδειξη ανισότητας Chebyshev

Εφαρμόζω την ανισότητα Markov στη **μη αρνητική** τυχαία μεταβλητή $|X - E[X]|^2$.

Απόδειξη ανισότητας Chebyshev

Εφαρμόζω την ανισότητα Markov στη **μη αρνητική** τυχαία μεταβλητή $|X - E[X]|^2$.

$$\begin{aligned}\Pr(|X - E[X]| \geq \lambda) &= \Pr(|X - E[X]|^2 \geq \lambda^2) \\ &\leq \frac{E[|X - E[X]|^2]}{\lambda^2} \\ &= \frac{E[X^2 - X \cdot E[X] + (E[X])^2]}{\lambda^2} \\ &= \frac{E[X^2] - (E[X])^2}{\lambda^2} \\ &= \frac{\text{Var}(X)}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

Ανάλυση του αλγόριθμου του Morris.

Αλγόριθμος Morris

$$X = 0$$

Σε κάθε χτύπο, κάνε $X := X + 1$ με πιθανότητα $\frac{1}{2^X}$.

Επέστρεψε το $2^X - 1$

Ανάλυση του αλγόριθμου του Morris.

Αλγόριθμος Morris

$$X = 0$$

Σε κάθε χτύπο, κάνε $X := X + 1$ με πιθανότητα $\frac{1}{2^X}$.

Επέστρεψε το $2^X - 1$

Έστω X_n ο μετρητής μετά από n χτύπους.

Ισχυρισμός I (Μέση Τιμή) : $E[2^{X_n}] = n + 1$.

Ισχυρισμός II (Διακύμανση): $E[2^{2X_n}] = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$.

Ανάλυση του αλγόριθμου του Morris.

Αλγόριθμος Morris

$$X = 0$$

Σε κάθε χτύπο, κάνε $X := X + 1$ με πιθανότητα $\frac{1}{2^X}$.

Επέστρεψε το $2^X - 1$

Έστω X_n ο μετρητής μετά από n χτύπους.

Ισχυρισμός I (Μέση Τιμή) : $E[2^{X_n}] = n + 1$.

Ισχυρισμός II (Διακύμανση): $E[2^{2X_n}] = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$.

Με αυτούς τους δύο ισχυρισμούς θα εφαρμόσουμε την ανισότητα του Chebyshev στην τυχαία μεταβλητή $Y_n := 2^{X_n}$.

$$\begin{aligned} E[Y_{n+1}] &= E[2^{X_{n+1}}] = \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(X_n = j) E[2^{X_{n+1}} \mid X_n = j] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(X_n = j) \left(2^j \left(1 - \frac{1}{2^j} \right) + \frac{1}{2^j} \cdot 2^{j+1} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(X_n = j) (2^j + 1) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(X_n = j) 2^j + \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(X_n = j) \\ &= E[2^{X_n}] + 1 = Y_n + 1. \end{aligned}$$

☞ $Y_n = n + 1.$

$$\begin{aligned} E[Y_{n+1}] &= E[2^{X_{n+1}}] = \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(X_n = j) E[2^{X_{n+1}} \mid X_n = j] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(X_n = j) \left(2^j \left(1 - \frac{1}{2^j} \right) + \frac{1}{2^j} \cdot 2^{j+1} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(X_n = j) (2^j + 1) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(X_n = j) 2^j + \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(X_n = j) \\ &= E[2^{X_n}] + 1 = Y_n + 1. \end{aligned}$$

👉 $Y_n = n + 1$. Λογικό να επιστρέψουμε ως απάντηση το $2^{X_n} - 1$.

$$\begin{aligned} E[Y_{n+1}^2] &= E[2^{2 \cdot X_{n+1}}] = \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(X_n = j) E[2^{2X_{n+1}} \mid X_n = j] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(X_n = j) \left(4^j \left(1 - \frac{1}{2^j} \right) + \frac{1}{2^j} \cdot 4^{j+1} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(X_n = j) (4^j + 3 \cdot 2^j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(X_n = j) \cdot 2^{2j} + 3 \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(X_n = j) \cdot 2^j \\ &= E[2^{2X_n}] + 3 \cdot E[2^{X_n}] = E[Y_n^2] + 3 \cdot E[Y_n]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E[Y_{n+1}^2] &= E[2^{2 \cdot X_{n+1}}] = \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(X_n = j) E[2^{2X_{n+1}} \mid X_n = j] \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(X_n = j) \left(4^j \left(1 - \frac{1}{2^j} \right) + \frac{1}{2^j} \cdot 4^{j+1} \right) \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(X_n = j) (4^j + 3 \cdot 2^j) \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(X_n = j) \cdot 2^{2j} + 3 \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(X_n = j) \cdot 2^j \\
 &= E[2^{2X_n}] + 3 \cdot E[2^{X_n}] = E[Y_n^2] + 3 \cdot E[Y_n].
 \end{aligned}$$


 $E[Y_n^2] = E[2^{2X_n}] = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1.$

Πάμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα Chebyshev.

★ 1. $E[Y_n] = n + 1.$

Πάμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα Chebyshev.

★ I. $E[Y_n] = n + 1.$

★ II. $E[Y_n^2] = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$

Πάμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα Chebyshev.

★ I. $E[Y_n] = n + 1.$

★ II. $E[Y_n^2] = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 \Rightarrow$

Πάμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα Chebyshev.

★ I. $E[Y_n] = n + 1.$

★ II. $E[Y_n^2] = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 \Rightarrow \text{Var}(Y_n) = E[Y_n^2] - (E[Y_n])^2 = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n.$

Πάμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα Chebyshev.

★ I. $E[Y_n] = n + 1.$

★ II. $E[Y_n^2] = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 \Rightarrow \text{Var}(Y_n) = E[Y_n^2] - (E[Y_n])^2 = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n.$

Chebyshev

Έστω Y_n τυχαία μεταβλητή. Τότε

$$\Pr[|Y_n - E[Y_n]| \geq \epsilon \cdot E[Y_n]] \leq \frac{\text{Var}(Y_n)}{\epsilon^2 \cdot E[Y_n]^2}.$$

Πάμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα Chebyshev.

★ I. $E[Y_n] = n + 1.$

★ II. $E[Y_n^2] = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 \Rightarrow \text{Var}(Y_n) = E[Y_n^2] - (E[Y_n])^2 = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n.$

Chebyshev

Έστω Y_n τυχαία μεταβλητή. Τότε

$$\Pr[|Y_n - E[Y_n]| \geq \epsilon \cdot E[Y_n]] \leq \frac{\text{Var}(Y_n)}{\epsilon^2 \cdot E[Y_n]^2}.$$

Παίρνουμε πως $\Pr[|Y_n - E[Y_n]| \geq \epsilon E[Y_n]] \leq \frac{1}{2\epsilon^2}$

Πάμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα Chebyshev.

★ I. $E[Y_n] = n + 1.$

★ II. $E[Y_n^2] = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 \Rightarrow \text{Var}(Y_n) = E[Y_n^2] - (E[Y_n])^2 = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n.$

Chebyshev

Έστω Y_n τυχαία μεταβλητή. Τότε

$$\Pr[|Y_n - E[Y_n]| \geq \epsilon \cdot E[Y_n]] \leq \frac{\text{Var}(Y_n)}{\epsilon^2 \cdot E[Y_n]^2}.$$

Παίρνουμε πως $\Pr[|Y_n - E[Y_n]| \geq \epsilon E[Y_n]] \leq \frac{1}{2\epsilon^2} \Rightarrow$ για $\epsilon = 1/4$ το δεξιά μέλος γίνεται οχτώ...

Πάμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα Chebyshev.

★ I. $E[Y_n] = n + 1.$

★ II. $E[Y_n^2] = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 \Rightarrow \text{Var}(Y_n) = E[Y_n^2] - (E[Y_n])^2 = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n.$

Chebyshev

Έστω Y_n τυχαία μεταβλητή. Τότε

$$\Pr[|Y_n - E[Y_n]| \geq \epsilon \cdot E[Y_n]] \leq \frac{\text{Var}(Y_n)}{\epsilon^2 \cdot E[Y_n]^2}.$$

Παίρνουμε πως $\Pr[|Y_n - E[Y_n]| \geq \epsilon E[Y_n]] \leq \frac{1}{2\epsilon^2} \Rightarrow$ για $\epsilon = 1/4$ το δεξιά μέλος γίνεται οχτώ...

Η διακύμανση είναι μεγάλη...

Η δύναμη του μέσου όρου.

👁 Έστω ότι έχω ένα τυχαίο πείραμα του οποίου το αποτέλεσμα είναι μία τυχαία μεταβλητή X , η οποία έχει μεγάλη διακύμανση.

Η δύναμη του μέσου όρου.

👁 Έστω ότι έχω ένα τυχαίο πείραμα του οποίου το αποτέλεσμα είναι μία τυχαία μεταβλητή X , η οποία έχει μεγάλη διακύμανση.

👁 Ας τρέξω το πείραμα k φορές **ανεξάρτητα** και παίρνω αποτελέσματα $X_1, X_2, \dots, X_k$. Θέτω $\bar{X} := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i$.

Η δύναμη του μέσου όρου.

👁 Έστω ότι έχω ένα τυχαίο πείραμα του οποίου το αποτέλεσμα είναι μία τυχαία μεταβλητή X , η οποία έχει μεγάλη διακύμανση.

👁 Ας τρέξω το πείραμα k φορές **ανεξάρτητα** και παίρνω αποτελέσματα $X_1, X_2, \dots, X_k$. Θέτω $\bar{X} := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i$.

Ο μέσος όρος μειώνει την διακύμανση

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{k} \cdot \text{Var}(X)$$

Η δύναμη του μέσου όρου.

👁 Έστω ότι έχω ένα τυχαίο πείραμα του οποίου το αποτέλεσμα είναι μία τυχαία μεταβλητή X , η οποία έχει μεγάλη διακύμανση.

👁 Ας τρέξω το πείραμα k φορές **ανεξάρτητα** και παίρνω αποτελέσματα $X_1, X_2, \dots, X_k$. Θέτω $\bar{X} := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i$.

Ο μέσος όρος μειώνει την διακύμανση

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{k} \cdot \text{Var}(X)$$

Πριν ένας μετρητής είχε διακύμανση περίπου $\frac{1}{\epsilon^2}$ μεγαλύτερη από όσο έπρεπε.

Η δύναμη του μέσου όρου.

👁 Έστω ότι έχω ένα τυχαίο πείραμα του οποίου το αποτέλεσμα είναι μία τυχαία μεταβλητή X , η οποία έχει μεγάλη διακύμανση.

👁 Ας τρέξω το πείραμα k φορές **ανεξάρτητα** και παίρνω αποτελέσματα $X_1, X_2, \dots, X_k$. Θέτω $\bar{X} := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i$.

Ο μέσος όρος μειώνει την διακύμανση

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{k} \cdot \text{Var}(X)$$

Πριν ένας μετρητής είχε διακύμανση περίπου $\frac{1}{\epsilon^2}$ μεγαλύτερη από όσο έπρεπε. Ας κρατήσω $\approx \frac{1}{\epsilon^2}$ μετρητές (με **καινούρια** τυχαιότητα) και ας πάρω τον μέσο όρο των απαντήσεων!

Βελτιωμένος Αλγόριθμος Morris

$$R = \frac{2}{\epsilon^2}$$

$$X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_R = 0$$

Σε κάθε χτύπο, κάνε για κάθε $i \in [R]$

$$X_i := X_i + 1 \text{ με πιθανότητα } \frac{1}{2^{X_i}}.$$

$$\text{Επέστρεψε το } \bar{X} := \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (2^{X_i} - 1)$$

Βελτιωμένος Αλγόριθμος Morris

$$R = \frac{2}{\epsilon^2}$$

$$X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_R = 0$$

Σε κάθε χτύπο, κάνε για κάθε $i \in [R]$

$$X_i := X_i + 1 \text{ με πιθανότητα } \frac{1}{2^{X_i}}.$$

$$\text{Επέστρεψε το } \bar{X} := \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (2^{X_i} - 1)$$

$$\star E[\bar{X}] = n + 1 \text{ και } \text{Var}(\bar{X}) \leq \frac{1}{4}\epsilon^2 n^2$$

Βελτιωμένος Αλγόριθμος Morris.

Βελτιωμένος Αλγόριθμος Morris

$$R = \frac{2}{\epsilon^2}$$

$$X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_R = 0$$

Σε κάθε χτύπο, κάνε για κάθε $i \in [R]$

$$X_i := X_i + 1 \text{ με πιθανότητα } \frac{1}{2^{X_i}}.$$

$$\text{Επέστρεψε το } \bar{X} := \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (2^{X_i} - 1)$$

$$\star E[\bar{X}] = n + 1 \text{ και } \text{Var}(\bar{X}) \leq \frac{1}{4} \epsilon^2 n^2 \Rightarrow \Pr[|\bar{X} - E[X]| \geq \epsilon \cdot E[X]] \leq \frac{1}{4} \checkmark$$

Βελτιωμένος Αλγόριθμος Morris

$$R = \frac{2}{\epsilon^2}$$

$$X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_R = 0$$

Σε κάθε χτύπο, κάνε για κάθε $i \in [R]$

$$X_i := X_i + 1 \text{ με πιθανότητα } \frac{1}{2^{X_i}}.$$

$$\text{Επέστρεψε το } \bar{X} := \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (2^{X_i} - 1)$$

$$\star E[\bar{X}] = n + 1 \text{ και } \text{Var}(\bar{X}) \leq \frac{1}{4} \epsilon^2 n^2 \Rightarrow \Pr[|\bar{X} - E[X]| \geq \epsilon \cdot E[X]] \leq \frac{1}{4} \checkmark$$

$$\blacktriangleleft O\left(\frac{1}{\epsilon^2} \cdot \log \log n\right) \text{ bits.}$$

Διπλά Βελτιωμένος Αλγόριθμος Morris.

Κατασκευάσαμε έναν αλγόριθμο που βρίσκει καλή προσέγγιση με πιθανότητα $\frac{3}{4}$. Αν όμως θέλαμε $1 - \delta$;

Διπλά Βελτιωμένος Αλγόριθμος Morris.

Κατασκευάσαμε έναν αλγόριθμο που βρίσκει καλή προσέγγιση με πιθανότητα $\frac{3}{4}$. Αν όμως θέλαμε $1 - \delta$;

Θα μπορούσαμε να πάρουμε τον μέσο όρο $R \approx \frac{1}{\epsilon^{2.8}}$ μετρητών.

Διπλά Βελτιωμένος Αλγόριθμος Morris.

Κατασκευάσαμε έναν αλγόριθμο που βρίσκει καλή προσέγγιση με πιθανότητα $\frac{3}{4}$. Αν όμως θέλαμε $1 - \delta$;

Θα μπορούσαμε να πάρουμε τον μέσο όρο $R \approx \frac{1}{\epsilon^2 \cdot \delta}$ μετρητών.

Μπορούμε όμως καλύτερα: σε $O\left(\frac{\log(1/\delta)}{\epsilon^2} \cdot \log \log n\right)$ bits

Διπλά Βελτιωμένος Αλγόριθμος Morris

$$t = \Theta(\log(1/\delta))$$

Κράτησε παράλληλα t μετρητές $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_t$ από τον Βελτιωμένο Αλγόριθμο.

Επέστρεψε την διάμεσο των $2^{\bar{X}_i} - 1$.

Ανάλυση του νέου αλγόριθμου.

☛ Κάθε $Y_i := 2^{\bar{X}_i} - 1$ ικανοποιεί ότι $(1 - \epsilon)n \leq Y_i \leq (1 + \epsilon)n$ με πιθανότητα $\frac{3}{4}$.

Ανάλυση του νέου αλγόριθμου.

☛ Κάθε $Y_i := 2^{\bar{X}_i} - 1$ ικανοποιεί ότι $(1 - \epsilon)n \leq Y_i \leq (1 + \epsilon)n$ με πιθανότητα $\frac{3}{4}$.

★ Θα λέμε ότι ο i μετρητής είναι καλός αν $(1 - \epsilon)n \leq Y_i \leq (1 + \epsilon)n$.

Ανάλυση του νέου αλγόριθμου.

☛ Κάθε $Y_i := 2^{\bar{X}_i} - 1$ ικανοποιεί ότι $(1 - \epsilon)n \leq Y_i \leq (1 + \epsilon)n$ με πιθανότητα $\frac{3}{4}$.

★ Θα λέμε ότι ο i μετρητής είναι καλός αν $(1 - \epsilon)n \leq Y_i \leq (1 + \epsilon)n$.

Ας γράψουμε κάτω τα αποτελέσματα για όλους τους μετρητές: 1 για Καλός, 0 για Κακός.

111101010110001101

Ανάλυση του νέου αλγόριθμου.

☛ Κάθε $Y_i := 2^{\bar{X}_i} - 1$ ικανοποιεί ότι $(1 - \epsilon)n \leq Y_i \leq (1 + \epsilon)n$ με πιθανότητα $\frac{3}{4}$.

★ Θα λέμε ότι ο i μετρητής είναι καλός αν $(1 - \epsilon)n \leq Y_i \leq (1 + \epsilon)n$.

Ας γράψουμε κάτω τα αποτελέσματα για όλους τους μετρητές: 1 για Καλός, 0 για Κακός.

111101010110001101

👁 Για να είναι σωστό το αποτέλεσμα αρκεί να υπάρχουν περισσότερα 1 από 0.

Ανάλυση του νέου αλγόριθμου.

☞ Κάθε $Y_i := 2^{\bar{X}_i} - 1$ ικανοποιεί ότι $(1 - \epsilon)n \leq Y_i \leq (1 + \epsilon)n$ με πιθανότητα $\frac{3}{4}$.

★ Θα λέμε ότι ο i μετρητής είναι καλός αν $(1 - \epsilon)n \leq Y_i \leq (1 + \epsilon)n$.

Ας γράψουμε κάτω τα αποτελέσματα για όλους τους μετρητές: 1 για Καλός, 0 για Κακός.

111101010110001101

👁 Για να είναι σωστό το αποτέλεσμα αρκεί να υπάρχουν περισσότερα 1 από 0.

☞ Τότε η διάμεσος σίγουρα πέφτει στο διάστημα $[(1 - \epsilon)n, (1 + \epsilon)n]$.

Ανάλυση του νέου αλγόριθμου.

👁 Ουσιαστικά είναι σαν να ρίχνουμε t ανεξάρτητα νομίσματα όπου η πιθανότητα της Κορώνας είναι $\frac{3}{4}$ και να ρωτάμε ‘ποια η πιθανότητα τα περισσότερα να είναι γράμματα;’

Ανάλυση του νέου αλγόριθμου.

👁 Ουσιαστικά είναι σαν να ρίχνουμε t ανεξάρτητα νομίσματα όπου η πιθανότητα της Κορώνας είναι $\frac{3}{4}$ και να ρωτάμε ‘ποια η πιθανότητα τα περισσότερα να είναι γράμματα;’

Έστω τυχαίες μεταβλητές $Z_1, Z_2, \dots, Z_t$ που είναι 1 αν το αντίστοιχο νόμισμα είναι Κορώνα, αλλιώς 0.

Ανάλυση του νέου αλγόριθμου.

👁 Ουσιαστικά είναι σαν να ρίχνουμε t ανεξάρτητα νομίσματα όπου η πιθανότητα της Κορώνας είναι $\frac{3}{4}$ και να ρωτάμε 'ποια η πιθανότητα τα περισσότερα να είναι γράμματα;'

Έστω τυχαίες μεταβλητές $Z_1, Z_2, \dots, Z_t$ που είναι 1 αν το αντίστοιχο νόμισμα είναι Κορώνα, αλλιώς 0.

$$\Pr\left[\sum_{i=1}^t Z_i < t/2\right] =$$

$$\Pr\left[\exists S \subseteq [t], |S| = \frac{t}{2} : Z_i = 0, \forall i \in S\right] \leq$$

$$\binom{t}{t/2} \cdot (1/4)^{t/2} \leq \delta$$

Ανάλυση του νέου αλγόριθμου.

👁 Ουσιαστικά είναι σαν να ρίχνουμε t ανεξάρτητα νομίσματα όπου η πιθανότητα της Κορώνας είναι $\frac{3}{4}$ και να ρωτάμε 'ποια η πιθανότητα τα περισσότερα να είναι γράμματα;'

Έστω τυχαίες μεταβλητές $Z_1, Z_2, \dots, Z_t$ που είναι 1 αν το αντίστοιχο νόμισμα είναι Κορώνα, αλλιώς 0.

$$\begin{aligned}\Pr\left[\sum_{i=1}^t Z_i < t/2\right] &= \\ \Pr\left[\exists S \subseteq [t], |S| = \frac{t}{2} : Z_i = 0, \forall i \in S\right] &\leq \\ \binom{t}{t/2} \cdot (1/4)^{t/2} &\leq \delta\end{aligned}$$

Συνολική αποτίμηση.

Μπορούμε να σχεδιάσουμε έναν προσεγγιστικό μετρητή με $O\left(\frac{\log(1/\delta)}{\epsilon^2} \cdot \log \log n\right)$ bits.

Συνολική αποτίμηση.

Μπορούμε να σχεδιάσουμε έναν προσεγγιστικό μετρητή με $O\left(\frac{\log(1/\delta)}{\epsilon^2} \cdot \log \log n\right)$ bits.

Μείωση Διακύμανσης

Αν έχουμε έναν τυχαίο αλγόριθμο (ή πείραμα) και το επαναλάβουμε k φορές **ανεξάρτητα**, μπορούμε να ρίξουμε την διακύμανση της απάντησης κατά έναν παράγοντα k .

Μείωση Πιθανότητας Λάθους

Αν έχουμε έναν τυχαίο αλγόριθμο (ή πείραμα) που επιτυγχάνει με πιθανότητα $\geq \frac{2}{3}$ μπορούμε επαναλαμβάνοντάς το $\approx \log(1/\delta)$ φορές να ρίξουμε την πιθανότητα αστοχίας στο δ .