

Προηγμένα Θέματα Αλγορίθμων

Γραμμικός Προγραμματισμός I

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ο όχι τόσο τρελός επιστήμονας.

Ο τρελός επιστήμονας θέλει να παράξει 5 λίτρα ενός μείγματος χρησιμοποιώντας δύο υγρά:

- Υγρό Α: κέρδος 3 ευρώ, διαθεσιμότητα μέχρι 3 λίτρα.
- Υγρό Β: κέρδος 4 ευρώ, διαθεσιμότητα μέχρι 4 λίτρα.



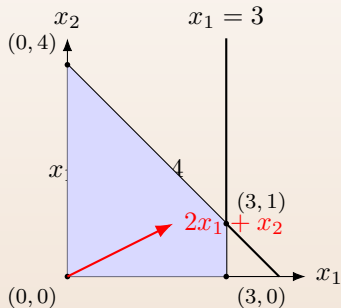
Ο όχι τόσο τρελός επιστήμονας.

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 4x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5, \\ & x_1 \leq 3, \\ & x_2 \leq 3, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

👉 Στην πραγματικότητα αυτό είναι το *κλασματικό* πρόβλημα Σακιδίου. Αλλά εμπίπτει σε μία πιο γενική κατηγορία: Γραμμικός Προγραμματισμός.

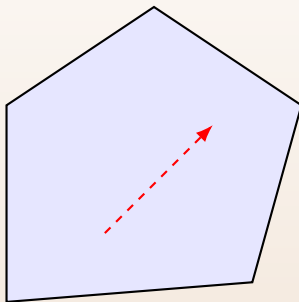
Παράδειγμα Γραμμικού Προγράμματος.

$$\begin{aligned}\max \quad & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 4, \\ & x_1 \leq 3, \\ & x_1, x_2 \geq 0.\end{aligned}$$



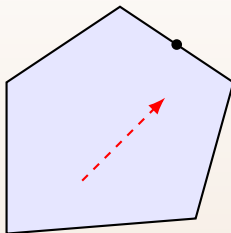
Γραμμικά Προγράμματα δύο μεταβλητών.

- ☛ Κάθε περιορισμός ορίζει ένα ημι-επίπεδο.
- ☛ Ουσιαστικά μας ζητείται να βρούμε το διάνυσμα μέσα στο πολύεδρο που έχει το μεγαλύτερο εσωτερικό γινόμενο με το κόκκινο διάνυσμα.



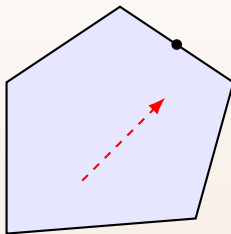
Βέλτιστη λύση και κορυφή.

👁 Η βέλτιστη λύση (εφόσον το πολύεδρο είναι μη κενό και πεπερασμένου κέρδους) μπορεί να βρεθεί σε **κορυφή** του πολυέδρου.



Βέλτιστη λύση και κορυφή.

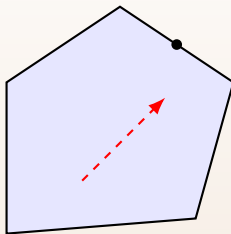
👁 Η βέλτιστη λύση (εφόσον το πολύεδρο είναι μη κενό και πεπερασμένου κέρδους) μπορεί να βρεθεί σε **κορυφή** του πολυέδρου.



Έστω $c_1x_1 + c_2x_2$ η συνάρτηση βελτιστοποίησης και έστω ότι είμαι σε ένα σημείο (x_1, x_2) στο πολύεδρο.

Βέλτιστη λύση και κορυφή.

👁 Η βέλτιστη λύση (εφόσον το πολύεδρο είναι μη κενό και πεπερασμένου κέρδους) μπορεί να βρεθεί σε **κορυφή** του πολυέδρου.

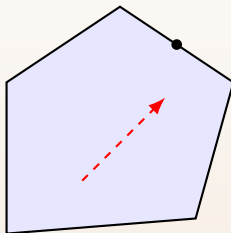


Έστω $c_1x_1 + c_2x_2$ η συνάρτηση βελτιστοποίησης και έστω ότι είμαι σε ένα σημείο (x_1, x_2) στο πολύεδρο.

★ Ας υποθέτω ότι το σημείο αυτό δεν είναι κορυφή

Βέλτιστη λύση και κορυφή.

👁 Η βέλτιστη λύση (εφόσον το πολύεδρο είναι μη κενό και πεπερασμένου κέρδους) μπορεί να βρεθεί σε **κορυφή** του πολυέδρου.

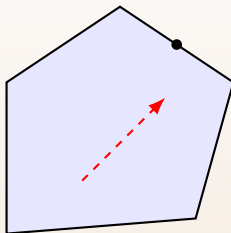


Έστω $c_1x_1 + c_2x_2$ η συνάρτηση βελτιστοποίησης και έστω ότι είμαι σε ένα σημείο (x_1, x_2) στο πολύεδρο.

★ Ας υποθέτω ότι το σημείο αυτό δεν είναι κορυφή $\Rightarrow$ υπάρχει μια ευθεία που περιέχει το σημείο και μπορώ να κινηθώ και στις δύο κατευθύνσεις της, *μένοντας μέσα* στο πολύεδρο.

Βέλτιστη λύση και κορυφή.

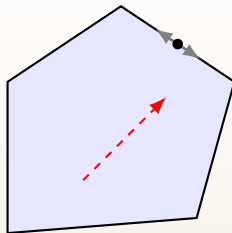
👁 Η βέλτιστη λύση (εφόσον το πολύεδρο είναι μη κενό και πεπερασμένου κέρδους) μπορεί να βρεθεί σε **κορυφή** του πολυέδρου.



Έστω $c_1x_1 + c_2x_2$ η συνάρτηση βελτιστοποίησης και έστω ότι είμαι σε ένα σημείο (x_1, x_2) στο πολύεδρο.

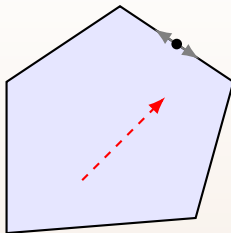
★ Ας υποθέτω ότι το σημείο αυτό δεν είναι κορυφή $\Rightarrow$ υπάρχει μια ευθεία που περιέχει το σημείο και μπορώ να κινηθώ και στις δύο κατευθύνσεις της, *μένοντας μέσα* στο πολύεδρο.

Βέλτιστη λύση και κορυφή.



★ Έχω δύο σημεία: $(x_1 + \epsilon, x_2 + \alpha \cdot \epsilon)$ και $(x_1 - \epsilon, x_2 - \alpha \cdot \epsilon)$

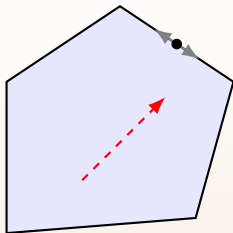
Βέλτιστη λύση και κορυφή.



★ Έχω δύο σημεία: $(x_1 + \epsilon, x_2 + \alpha \cdot \epsilon)$ και $(x_1 - \epsilon, x_2 - \alpha \cdot \epsilon)$

👁 Ένα από τα δύο δεν αυξάνει τη συνάρτηση βελτιστοποίησης:

Βέλτιστη λύση και κορυφή.

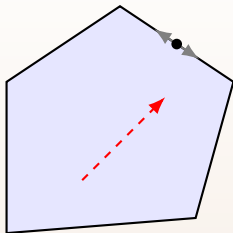


★ Έχω δύο σημεία: $(x_1 + \epsilon, x_2 + \alpha \cdot \epsilon)$ και $(x_1 - \epsilon, x_2 - \alpha \cdot \epsilon)$

👁 Ένα από τα δύο δεν αυξάνει τη συνάρτηση βελτιστοποίησης: Δεν γίνεται να ισχύει ταυτόχρονα

$$c_1(x_1 + \epsilon) + c_2(x_2 + \alpha \cdot \epsilon), c_1(x_1 - \epsilon) + c_2(x_2 - \alpha \cdot \epsilon) \leq c_1x_1 + c_2x_2.$$

Βέλτιστη λύση και κορυφή.



★ Έχω δύο σημεία: $(x_1 + \epsilon, x_2 + \alpha \cdot \epsilon)$ και $(x_1 - \epsilon, x_2 - \alpha \cdot \epsilon)$

👁 Ένα από τα δύο δεν αυξάνει τη συνάρτηση βελτιστοποίησης: Δεν γίνεται να ισχύει ταυτόχρονα

$$c_1(x_1 + \epsilon) + c_2(x_2 + \alpha \cdot \epsilon), c_1(x_1 - \epsilon) + c_2(x_2 - \alpha \cdot \epsilon) \leq c_1x_1 + c_2x_2.$$

👉 Άρα, μπορώ να κινηθώ $\epsilon > 0$ προς της μία κατεύθυνση πάντα και να καταλήξω σε κορυφή.

Γενική μορφή Γραμμικού Πρόγραμματος.

Έστω μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_n$ οι οποίες παίρνουν πραγματικές τιμές.

Γενική μορφή Γραμμικού Πρόγραμματος.

Έστω μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_n$ οι οποίες παίρνουν πραγματικές τιμές.

☛ Ένα γραμμικό πρόγραμμα είναι μια γραμμική συνάρτηση βελτιστοποίησης πάνω σε γραμμικούς περιορισμούς.

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq \beta_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq \beta_2 \\ & \dots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq \beta_m \end{aligned}$$

Γενική μορφή $\Rightarrow$ Κανονική Μορφή

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n \geq \beta_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n \leq \beta_2 \\ & \dots \end{aligned}$$

Γενική μορφή $\Rightarrow$ Κανονική Μορφή

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq \beta_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq \beta_2 \\ & \dots \end{aligned}$$

- ❶ Η συνάρτηση βελτιστοποίησης μπορεί πάντα να γίνει συνάρτηση ελαχιστοποίησης (γιατί;).

Γενική μορφή $\Rightarrow$ Κανονική Μορφή

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq \beta_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq \beta_2 \\ & \dots \end{aligned}$$

- 1 Η συνάρτηση βελτιστοποίησης μπορεί πάντα να γίνει συνάρτηση ελαχιστοποίησης (**γιατί;**).
- 2 Κάθε ισότητα μπορεί να αντικατασταθεί με δύο ανισότητες (**πώς;**)

Γενική μορφή $\Rightarrow$ Κανονική Μορφή

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq \beta_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq \beta_2 \\ & \dots \end{aligned}$$

- 1 Η συνάρτηση βελτιστοποίησης μπορεί πάντα να γίνει συνάρτηση ελαχιστοποίησης (**γιατί;**).
- 2 Κάθε ισότητα μπορεί να αντικατασταθεί με δύο ανισότητες (**πώς;**)
- 3 Κάθε περιορισμός μπορεί να γίνει της μορφής $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq \beta_i$.

Γενική μορφή $\Rightarrow$ Κανονική Μορφή

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n \geq \beta_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n \leq \beta_2 \\ & \dots \end{aligned}$$

- 1 Η συνάρτηση βελτιστοποίησης μπορεί πάντα να γίνει συνάρτηση ελαχιστοποίησης (**γιατί;**).
- 2 Κάθε ισότητα μπορεί να αντικατασταθεί με δύο ανισότητες (**πώς;**)
- 3 Κάθε περιορισμός μπορεί να γίνει της μορφής $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots a_{in}x_n \geq \beta_i$.
- 4 Μπορούμε να εξαναγκάσουμε $x_i \geq 0$:

Γενική μορφή $\Rightarrow$ Κανονική Μορφή

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n \geq \beta_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n \leq \beta_2 \\ & \dots \end{aligned}$$

- 1 Η συνάρτηση βελτιστοποίησης μπορεί πάντα να γίνει συνάρτηση ελαχιστοποίησης (**γιατί;**).
- 2 Κάθε ισότητα μπορεί να αντικατασταθεί με δύο ανισότητες (**πώς;**)
- 3 Κάθε περιορισμός μπορεί να γίνει της μορφής $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots a_{in}x_n \geq \beta_i$.
- 4 Μπορούμε να εξαναγκάσουμε $x_i \geq 0$: Ορίζουμε νέες μεταβλητές $x_i^+, x_i^- \geq 0$ και γράφουμε $x_i = x_i^+ - x_i^-$.

Κανονική μορφή Γραμμικού Προγράμματος.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Οπότε οι κεντρικές ερώτηση είναι:

Κανονική μορφή Γραμμικού Προγράμματος.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Οπότε οι κεντρικές ερώτηση είναι:

★ Πώς λύνουμε γραμμικά προγράμματα; (δεν θα το απαντήσουμε)

Κανονική μορφή Γραμμικού Προγράμματος.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Οπότε οι κεντρικές ερωτήσεις είναι:

- ★ Πώς λύνουμε γραμμικά προγράμματα; (δεν θα το απαντήσουμε)
- ★ Τι ιδιότητες έχουν τα διαφορετικά γραμμικά προγράμματα;

Κανονική μορφή Γραμμικού Προγράμματος.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Οπότε οι κεντρικές ερώτηση είναι:

- ★ Πώς λύνουμε γραμμικά προγράμματα; (δεν θα το απαντήσουμε)
- ★ Τι ιδιότητες έχουν τα διαφορα γραμμικά προγράμματα;
- ★ Ποια προβλήματα κωδικοποιούνται ως γραμμικά προγράμματα και τι μπορούμε να συμπεράνουμε;

Κανονική μορφή Γραμμικού Προγράμματος.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Οπότε οι κεντρικές ερώτηση είναι:

- ★ Πώς λύνουμε γραμμικά προγράμματα; (δεν θα το απαντήσουμε)
- ★ Τι ιδιότητες έχουν τα διαφορα γραμμικά προγράμματα;
- ★ Ποια προβλήματα κωδικοποιούνται ως γραμμικά προγράμματα και τι μπορούμε να συμπεράνουμε;

Ένας μετασχηματισμός.

Επιλέγουμε $y_1, y_2, \dots, y_m \geq 0$.

Ένας μετασχηματισμός.

Επιλέγουμε $y_1, y_2, \dots, y_m \geq 0$.

$$\text{minimize } c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$y_1 \cdot (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) \geq y_1\beta_1$$

$$y_2 \cdot (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) \geq y_2\beta_2$$

...

$$y_m \cdot (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n) \geq y_m\beta_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Ένας μετασχηματισμός.

$$\begin{aligned} &\text{minimize } c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ &\quad y_1 \cdot (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n) \\ &\quad + \\ &\quad y_2 \cdot (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n) \\ &\quad + \\ &\quad \dots \\ &\quad y_m \cdot (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n) \\ &\quad \geq \\ &\quad y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \dots + y_m\beta_m. \\ &\quad x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

Ένας μετασχηματισμός.

$$\begin{aligned} & y_1 a_{11} x_1 + y_1 a_{12} x_2 + \dots y_1 a_{1n} x_n \\ & + \\ & y_1 a_{21} x_1 + y_1 a_{22} x_2 + \dots y_2 a_{2n} x_n \\ & + \\ & \dots \\ & y_m a_{m1} x_1 + y_m a_{m2} x_2 + \dots y_m a_{mn} x_n \\ & \geq \\ & y_1 \beta_1 + y_2 \beta_2 + \dots + y_m \beta_m. \end{aligned}$$

👁 Αν για κάθε $i \in [n]$ διαλέξουμε τα $y_1, y_2, \dots, y_n$ και καταφέρουμε $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{im}y_m \geq c_i$

Ένας μετασχηματισμός.

$$\begin{aligned} & y_1 a_{11} x_1 + y_1 a_{12} x_2 + \dots y_1 a_{1n} x_n \\ & + \\ & y_1 a_{21} x_1 + y_1 a_{22} x_2 + \dots y_2 a_{2n} x_n \\ & + \\ & \dots \\ & y_m a_{m1} x_1 + y_m a_{m2} x_2 + \dots y_m a_{mn} x_n \\ & \geq \\ & y_1 \beta_1 + y_2 \beta_2 + \dots + y_m \beta_m. \end{aligned}$$

👁 Αν για κάθε $i \in [n]$ διαλέξουμε τα $y_1, y_2, \dots, y_n$ και καταφέρουμε $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{im}y_m \geq c_i$
 $\Rightarrow$ παίρνουμε ένα κάτω φράγμα στην συνάρτηση ελαχιστοποίησης $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$.

Ένας καινούριο γραμμικό πρόγραμμα.

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots + \beta_n x_n \\ & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots a_{m1}y_m \leq c_1 \\ & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots a_{m2}y_m \leq c_2 \\ & \dots \\ & a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots a_{mn}y_m \leq c_n \\ & y_1, y_2, \dots, y_m \geq 0 \end{aligned}$$

Ένας καινούριο γραμμικό πρόγραμμα.

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots + \beta_n x_n \\ & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots a_{m1}y_m \leq c_1 \\ & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots a_{m2}y_m \leq c_2 \\ & \dots \\ & a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots a_{mn}y_m \leq c_n \\ & y_1, y_2, \dots, y_m \geq 0 \end{aligned}$$

👉 Αυτό το γραμμικό πρόγραμμα ονομάζεται *δυϊκό* και το αρχικό πρόγραμμα *πρωτεύον* και ισχύει

Ένας καινούριο γραμμικό πρόγραμμα.

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots + \beta_n x_n \\ & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots a_{m1}y_m \leq c_1 \\ & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots a_{m2}y_m \leq c_2 \\ & \dots \\ & a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots a_{mn}y_m \leq c_n \\ & y_1, y_2, \dots, y_m \geq 0 \end{aligned}$$

👉 Αυτό το γραμμικό πρόγραμμα ονομάζεται **δυϊκό** και το αρχικό πρόγραμμα **πρωτεύον** και ισχύει

$$(\text{κόστος πρωτεύοντος}) \geq (\text{κέρδος δυϊκού}).$$

Πρωτεύον και Δυϊκό.

Πρωτεύον

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Δυϊκό

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b^\top y \\ & A^\top y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Πρωτεύον και Δυϊκό.

Πρωτεύον

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Δυϊκό

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b^\top y \\ & A^\top y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Ασθενής Δυϊκότητα

Έστω μια λύση $\tilde{x}$ για το πρωτεύον και μία $\tilde{y}$ για το Πρωτεύον. Τότε

$$c^T \tilde{x} \leq \tilde{y}^T A \tilde{x} \leq b^T \tilde{y}$$

Πρωτεύον και Δυϊκό.

Πρωτεύον

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Δυϊκό

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b^\top y \\ & A^\top y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

★ Κάθε περιορισμός στο Πρωτεύον γίνεται μεταβλητή στο Δυϊκό.

Πρωτεύον και Δυϊκό.

Πρωτεύον

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Δυϊκό

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b^\top y \\ & A^\top y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

- ★ Κάθε περιορισμός στο Πρωτεύον γίνεται μεταβλητή στο Δυϊκό.
- ★ Κάθε μεταβλητή στο Πρωτεύον γίνεται περιορισμός στο Δυϊκό.

Πρωτεύον και Δυϊκό.

Πρωτεύον

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Δυϊκό

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b^\top y \\ & A^\top y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

- ★ Κάθε περιορισμός στο Πρωτεύον γίνεται μεταβλητή στο Δυϊκό.
- ★ Κάθε μεταβλητή στο Πρωτεύον γίνεται περιορισμός στο Δυϊκό.
- ★ Το διάνυσμα βελτιστοποίησης του Πρωτεύοντος γίνεται το σταθερό διάνυσμα στο Δυϊκό.

Πρωτεύον και Δυϊκό.

Πρωτεύον

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Δυϊκό

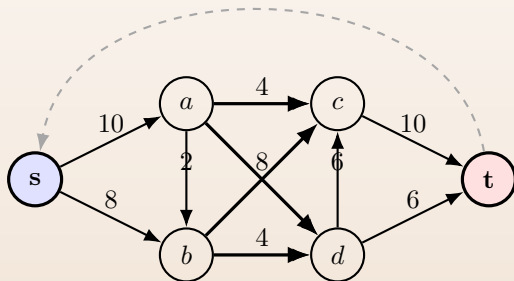
$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b^\top y \\ & A^\top y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

- ★ Κάθε περιορισμός στο Πρωτεύον γίνεται μεταβλητή στο Δυϊκό.
- ★ Κάθε μεταβλητή στο Πρωτεύον γίνεται περιορισμός στο Δυϊκό.
- ★ Το διάνυσμα βελτιστοποίησης του Πρωτεύοντος γίνεται το σταθερό διάνυσμα στο Δυϊκό.
- ★ Το σταθερό διάνυσμα στο Πρωτεύον γίνεται το διάνυσμα βελτιστοποίησης στο Δυϊκό.

Ξανά το πρόβλημα Μέγιστης Ροής.

Ας κάνουμε μία μικρή παραλλαγή (για ευκολία):

👉 Ας βάλουμε και μία ακμή από το t στο s άπειρης χωρητικότητας και ας απαιτήσουμε να περάσουμε όσο το δυνατόν περισσότερη ροή από το t στο s απαιτώντας να ισχύει η αρχή διατήρησης της ροής σε κάθε κόμβο πλέον.



Κωδικοποίηση σε Γραμμικό Πρόγραμμα.

Κωδικοποιούμε το πρόβλημα Μέγιστης Ροής ως γραμμικό πρόγραμμα με χωρητικότητες c_e και μεταβλητές f_e για κάθε ακμή.

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & f_{t,s} \\ & \sum_{e=(u,-)} f_e - \sum_{e=(-,u)} f_e = 0, \quad \forall u \in V \\ & f_e \leq c_e, \quad \forall e \in E \\ & f_e \geq 0 \end{aligned}$$

Ποιο είναι το Δυϊκό του από πάνω;

- ★ Έχουμε δύο είδων περιορισμούς: για την αρχή διατηρήσης της ροής και για το σεβασμό της χωρητικότητας.

Ποιο είναι το Δυϊκό του από πάνω;

★ Έχουμε δύο είδων περιορισμούς: για την αρχή διατηρήσης της ροής και για το σεβασμό της χωρητικότητας.

☛ Άρα μεταβλητές του Δυϊκού: $y_u, \forall u \in V$ και $z_e, \forall e \in E$.

Ποιο είναι το Δυϊκό του από πάνω;

★ Έχουμε δύο ειδών περιορισμούς: για την αρχή διατήρησης της ροής και για το σεβασμό της χωρητικότητας.

☛ Άρα μεταβλητές του Δυϊκού: $y_u, \forall u \in V$ και $z_e, \forall e \in E$.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_e c_e y_e \\ & z_u - z_v + y_e \geq 0, \forall e = (u, v) \in E \\ & z_t - z_s + y_{(t,s)} \geq 1, \\ & y_e \geq 0 \end{aligned}$$

Ποιο είναι το Δυϊκό του από πάνω;

★ Έχουμε δύο ειδών περιορισμούς: για την αρχή διατήρησης της ροής και για το σεβασμό της χωρητικότητας.

☛ Άρα μεταβλητές του Δυϊκού: $y_u, \forall u \in V$ και $z_e, \forall e \in E$.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_e c_e y_e \\ & z_u - z_v + y_e \geq 0, \forall e = (u, v) \in E \\ & z_t - z_s + y_{(t,s)} \geq 1, \\ & y_e \geq 0 \end{aligned}$$

Σε ποιο πρόβλημα αντιστοιχεί;

Γραμμικό και Δυϊκό (μη κανονικές μορφές).

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && f_{t,s} \\ &&& \sum_{e=(u,-)} f_e - \sum_{e=(-,u)} f_e = 0, \quad \forall u \in V \\ &&& f_e \leq c_e, \quad \forall e \in E \\ &&& f_e \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \sum_e c_e y_e \\ &&& z_u - z_v + y_e \geq 0, \forall e = (u, v) \in E \\ &&& z_t - z_s + y_{(t,s)} \geq 1, \\ &&& y_e \geq 0 \end{aligned}$$

Ένα εναλλακτικό γραμμικό πρόγραμμα.

Θα γράψουμε ένα εκθετικά μεγάλο γραμμικό πρόγραμμα. Έστω $\mathcal{P}$ το σύνολο των $s - t$ μονοπατιών.

Ένα εναλλακτικό γραμμικό πρόγραμμα.

Θα γράψουμε ένα εκθετικά μεγάλο γραμμικό πρόγραμμα. Έστω $\mathcal{P}$ το σύνολο των $s - t$ μονοπατιών.

☛ Θα κρατήσουμε μια μεταβλητή f_p για κάθε $p \in \mathcal{P}$. Η μέγιστη ροή είναι αποδομήσιμη πάνω σε μονοπάτια στο $\mathcal{P}$.

Ένα εναλλακτικό γραμμικό πρόγραμμα.

Θα γράψουμε ένα εκθετικά μεγάλο γραμμικό πρόγραμμα. Έστω $\mathcal{P}$ το σύνολο των $s - t$ μονοπατιών.

☛ Θα κρατήσουμε μια μεταβλητή f_p για κάθε $p \in \mathcal{P}$. Η μέγιστη ροή είναι αποδομήσιμη πάνω σε μονοπάτια στο $\mathcal{P}$.

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_{p \in \mathcal{P} | s \in p} f_p \\ & \sum_{p \in \mathcal{P} | e \in p} f_p \leq c_e, \forall e \in E \\ & f_p \geq 0, \quad \forall p \in \mathcal{P} \end{aligned}$$

Ποιό είναι το Δυϊκό πρόγραμμα;

Υπάρχει μια μεταβλητή y_e για κάθε ακμή. Την διαλέγουμε κλασματικά και πληρώνουμε c_e ανά μονάδα κλάσματος.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \sum_{e \in E} c_e y_e \\ & \sum_{e \in p} y_e \geq 1, && \forall p \in \mathcal{P} \\ & y_e \geq 0, && \forall e \in E \end{aligned}$$

👉 Ερμηνεία δυϊκού:

Ποιό είναι το Δυϊκό πρόγραμμα;

Υπάρχει μια μεταβλητή y_e για κάθε ακμή. Την διαλέγουμε κλασματικά και πληρώνουμε c_e ανά μονάδα κλάσματος.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{e \in E} c_e y_e \\ & \sum_{e \in p} y_e \geq 1, \quad \forall p \in \mathcal{P} \\ & y_e \geq 0, \quad \forall e \in E \end{aligned}$$

👉 Ερμηνεία δυϊκού: Σε κάθε $s - t$ μονοπάτι πρέπει το άθροισμα των κλασματικών ακμών να είναι τουλάχιστον 1.

Ποιό είναι το Δυϊκό πρόγραμμα;

Υπάρχει μια μεταβλητή y_e για κάθε ακμή. Την διαλέγουμε κλασματικά και πληρώνουμε c_e ανά μονάδα κλάσματος.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \sum_{e \in E} c_e y_e \\ & && \sum_{e \in p} y_e \geq 1, \quad \forall p \in \mathcal{P} \\ & && y_e \geq 0, \quad \forall e \in E \end{aligned}$$

👉 Ερμηνεία δυϊκού: Σε κάθε $s - t$ μονοπάτι πρέπει το άθροισμα των κλασματικών ακμών να είναι τουλάχιστον 1.

👁 Κάθε έγκυρη $s - t$ τομή $(S, V \setminus S)$ δίνει μια λύση στο γραμμικό πρόγραμμα

Ποιό είναι το Δυϊκό πρόγραμμα;

Υπάρχει μια μεταβλητή y_e για κάθε ακμή. Την διαλέγουμε κλασματικά και πληρώνουμε c_e ανά μονάδα κλάσματος.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \sum_{e \in E} c_e y_e \\ & && \sum_{e \in p} y_e \geq 1, \quad \forall p \in \mathcal{P} \\ & && y_e \geq 0, \quad \forall e \in E \end{aligned}$$

👉 Ερμηνεία δυϊκού: Σε κάθε $s - t$ μονοπάτι πρέπει το άθροισμα των κλασματικών ακμών να είναι τουλάχιστον 1.

👁 Κάθε έγκυρη $s - t$ τομή $(S, V \setminus S)$ δίνει μια λύση στο γραμμικό πρόγραμμα θέτοντας $y_u = 1$ αν $u \in S$ και $y_u = 0$ αλλιώς.

Ποιό είναι το Δυϊκό πρόγραμμα;

Υπάρχει μια μεταβλητή y_e για κάθε ακμή. Την διαλέγουμε κλασματικά και πληρώνουμε c_e ανά μονάδα κλάσματος.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \sum_{e \in E} c_e y_e \\ & && \sum_{e \in p} y_e \geq 1, \quad \forall p \in \mathcal{P} \\ & && y_e \geq 0, \quad \forall e \in E \end{aligned}$$

👉 Ερμηνεία δυϊκού: Σε κάθε $s - t$ μονοπάτι πρέπει το άθροισμα των κλασματικών ακμών να είναι τουλάχιστον 1.

👁 Κάθε έγκυρη $s - t$ τομή $(S, V \setminus S)$ δίνει μια λύση στο γραμμικό πρόγραμμα θέτοντας $y_u = 1$ αν $u \in S$ και $y_u = 0$ αλλιώς.

Πρωτεύον

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Δυϊκό

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b^\top y \\ & A^\top y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Πρωτεύον

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Δυϊκό

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b^\top y \\ & A^\top y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

★ Αποδεικνύεται πως όποτε το ένα από τα δυό είναι επιλύσιμο τότε και το άλλο είναι και (κόστος πρωτεύοντος) = (κέρδος δυϊκού).

Πρωτεύον

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Δυσικό

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b^\top y \\ & A^\top y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

★ Αποδεικνύεται πως όποτε το ένα από τα δυό είναι επιλύσιμο τότε και το άλλο είναι και (κόστος πρωτεύοντος) = (κέρδος δυσικού).

★ Αν Δυσικό έχει ∞ κέρδος το Πρωτεύον είναι αδύνατο.

Πρωτεύον

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Δυϊκό

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b^\top y \\ & A^\top y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

★ Αποδεικνύεται πως όποτε το ένα από τα δυό είναι επιλύσιμο τότε και το άλλο είναι και (κόστος πρωτεύοντος) = (κέρδος δυϊκού).

★ Αν Δυϊκό έχει ∞ κέρδος το Πρωτεύον είναι αδύνατο.

★ Αν Πρωτεύον έχει $-\infty$ κόστος το Δυϊκό είναι αδύνατο.

Ισχυρή Δυσικότητα

Πρωτεύον

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Δυσικό

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b^\top y \\ & A^\top y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Ισχυρή Δυϊκότητα

Πρωτεύον

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Δυϊκό

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b^\top y \\ & A^\top y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Ισχυρή Δυϊκότητα

Έστω μια βέλτιστη $\bar{x}$ για το Πρωτεύον και μία $\bar{y}$ για το Δυϊκό.
Τότε

$$c^\top \bar{x} = b^\top \bar{y}$$

Θεώρημα Συμπληρωματικής Χαλαρότητας.

- ★ Είπαμε ότι κάθε περιορισμός του Πρωτεύοντος αντιστοιχεί σε μία μεταβλητή του $\Delta\ddot{\iota}\kappa\acute{o}\upsilon$.
- ★ Είπαμε ότι κάθε μεταβλητή του $\Delta\ddot{\iota}\kappa\acute{o}\upsilon$ αντιστοιχεί σε έναν περιορισμό του Πρωτεύοντος.

Θεώρημα Συμπληρωματικής Χαλαρότητας.

- ★ Είπαμε ότι κάθε περιορισμός του **Πρωτεύοντος** αντιστοιχεί σε μία μεταβλητή του **Δυϊκού**.
- ★ Είπαμε ότι κάθε μεταβλητή του **Δυϊκού** αντιστοιχεί σε έναν περιορισμό του **Πρωτεύοντος**.

Ισχυρη Δυϊκότητα

Έστω μια βέλτιστη $\bar{x}$ για το Πρωτεύον και μία $\bar{y}$ για το Δυϊκό. Τότε

- Είτε η μεταβλητή $\bar{y}_i$ στο Δυϊκό είναι 0 είτε ο αντίστοιχος περιορισμός στο **Πρωτεύον** είναι ισότητα (ή και τα δύο).
- Είτε η μεταβλητή $\bar{x}_i$ στο **Πρωτεύον** είναι 0 είτε ο αντίστοιχος περιορισμός στο **Δυϊκό** είναι ισότητα (ή και τα δύο).

Απόδειξη Συμπληρωματικής Χαλαρότητας.

Έστω $\bar{x}, \bar{y}$ βέλτιστες λύσεις για Πρωτεύον και Δυϊκό.

Απόδειξη Συμπληρωματικής Χαλαρότητας.

Έστω $\bar{x}, \bar{y}$ βέλτιστες λύσεις για Πρωτεύον και Δυϊκό.

👉 Λόγω ισχυρής και ασθενούς δυϊκότητας έχουμε

$$c^T \bar{x} = b^T \bar{y} = \bar{y}^T A \bar{x} \Rightarrow$$

Απόδειξη Συμπληρωματικής Χαλαρότητας.

Έστω $\bar{x}, \bar{y}$ βέλτιστες λύσεις για Πρωτεύον και Δυϊκό.

👉 Λόγω ισχυρής και ασθενούς δυϊκότητας έχουμε

$$c^T \bar{x} = b^T \bar{y} = \bar{y}^T A \bar{x} \Rightarrow c^T \bar{x} = \bar{y}^T A \bar{x} \Rightarrow$$

Απόδειξη Συμπληρωματικής Χαλαρότητας.

Έστω $\bar{x}, \bar{y}$ βέλτιστες λύσεις για Πρωτεύον και Δυϊκό.

👉 Λόγω ισχυρής και ασθενούς δυϊκότητας έχουμε

$$c^T \bar{x} = b^T \bar{y} = \bar{y}^T A \bar{x} \Rightarrow c^T \bar{x} = \bar{y}^T A \bar{x} \Rightarrow (c^T - \bar{y}^T A) \bar{x} = 0$$

Απόδειξη Συμπληρωματικής Χαλαρότητας.

Έστω $\bar{x}, \bar{y}$ βέλτιστες λύσεις για Πρωτεύον και Δυϊκό.

☞ Λόγω ισχυρής και ασθενούς δυϊκότητας έχουμε
 $c^T \bar{x} = b^T \bar{y} = \bar{y}^T A \bar{x} \Rightarrow c^T \bar{x} = \bar{y}^T A \bar{x} \Rightarrow (c^T - \bar{y}^T A) \bar{x} = 0$

👁 Μπορώ να το δω σαν $\underbrace{\langle c^T - \bar{y}^T A, \bar{x} \rangle}_{\geq 0} = 0$.

Απόδειξη Συμπληρωματικής Χαλαρότητας.

Έστω $\bar{x}, \bar{y}$ βέλτιστες λύσεις για Πρωτεύον και Δυϊκό.

👉 Λόγω ισχυρής και ασθενούς δυϊκότητας έχουμε
 $c^T \bar{x} = b^T \bar{y} = \bar{y}^T A \bar{x} \Rightarrow c^T \bar{x} = \bar{y}^T A \bar{x} \Rightarrow (c^T - \bar{y}^T A) \bar{x} = 0$

👁 Μπορώ να το δω σαν $\underbrace{\langle c^T - \bar{y}^T A, \bar{x} \rangle}_{\geq 0} = 0$.

👉 Άρα για κάθε i είτε $(c^T - \bar{y}^T A)_i = 0$ είτε $\bar{x}_i = 0$ ✓

Απόδειξη Συμπληρωματικής Χαλαρότητας.

Έστω $\bar{x}, \bar{y}$ βέλτιστες λύσεις για Πρωτεύον και Δυϊκό.

☛ Λόγω ισχυρής και ασθενούς δυϊκότητας έχουμε

$$c^T \bar{x} = b^T \bar{y} = \bar{y}^T A \bar{x} \Rightarrow c^T \bar{x} = \bar{y}^T A \bar{x} \Rightarrow (c^T - \bar{y}^T A) \bar{x} = 0$$

👁 Μπορώ να το δω σαν $\underbrace{(c^T - \bar{y}^T A)}_{\geq 0} \underbrace{\bar{x}}_{\geq 0} = 0$.

☛ Άρα για κάθε i είτε $(c^T - \bar{y}^T A)_i = 0$ είτε $\bar{x}_i = 0$ ✓

είτε ο i -οστός περιορισμός στο Δυϊκό είναι ισότητα είτε η i -οστή μεταβλητή στο Πρωτεύον ισούται με 0 (ή και τα δύο).

Απόδειξη Συμπληρωματικής Χαλαρότητας.

Έστω $\bar{x}, \bar{y}$ βέλτιστες λύσεις για Πρωτεύον και Δυϊκό.

☛ Λόγω ισχυρής και ασθενούς δυϊκότητας έχουμε
 $c^T \bar{x} = b^T \bar{y} = \bar{y}^T A \bar{x} \Rightarrow c^T \bar{x} = \bar{y}^T A \bar{x} \Rightarrow (c^T - \bar{y}^T A) \bar{x} = 0$

👁 Μπορώ να το δω σαν $\underbrace{\langle c^T - \bar{y}^T A, \bar{x} \rangle}_{\geq 0} = 0$.

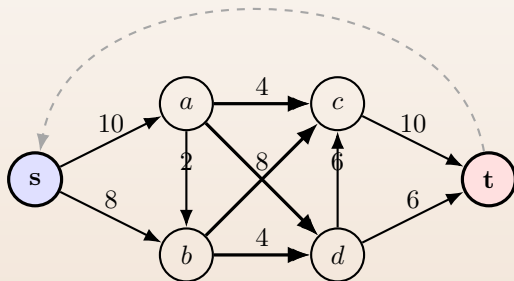
☛ Άρα για κάθε i είτε $(c^T - \bar{y}^T A)_i = 0$ είτε $\bar{x}_i = 0$ ✓
είτε ο i -οστός περιορισμός στο Δυϊκό είναι ισότητα είτε η i -οστή μεταβλητή στο Πρωτεύον ισούται με 0 (ή και τα δύο).

Όμοια και η άλλη περίπτωση.

Πίσω στο πρόβλημα μέγιστης ροής.

Ας κάνουμε μία μικρή παραλλαγή (για ευκολία):

👉 Ας βάλουμε και μία ακμή από το t στο s άπειρης χωρητικότητας και ας απαιτήσουμε να περάσουμε όσο το δυνατόν περισσότερη ροή από το t στο s απαιτώντας να ισχύει η αρχή διατήρησης της ροής σε κάθε κόμβο πλέον.



Κωδικοποίηση σε Γραμμικό Πρόγραμμα.

Κωδικοποιούμε το πρόβλημα Μέγιστης Ροής ως γραμμικό πρόγραμμα με χωρητικότητες c_e και μεταβλητές f_e για κάθε ακμή.

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & f_{t,s} \\ & \sum_{e=(u,-)} f_e - \sum_{e=(-,u)} f_e = 0, \quad \forall u \in V \\ & f_e \leq c_e, \quad \forall e \in E \\ & f_e \geq 0 \end{aligned}$$

Γραμμικό και Δυϊκό (μη κανονικές μορφές).

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && f_{t,s} \\ &&& \sum_{e=(u,-)} f_e - \sum_{e=(-,u)} f_e = 0, \quad \forall u \in V \\ &&& f_e \leq c_e, \quad \forall e \in E \\ &&& f_e \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \sum_e c_e y_e \\ &&& z_u - z_v + y_e \geq 0, \forall e = (u, v) \in E \\ &&& z_t - z_s + y_{(t,s)} \geq 1, \\ &&& y_e \geq 0 \end{aligned}$$

Εφόσον $c_{(t,s)} = \infty$ πρέπει $y_{(t,s)} = 0$ άρα το πρόγραμμα γίνεται

Επεξεργασία του Γραμμικού Προγράμματος.

Εφόσον $c_{(t,s)} = \infty$ πρέπει $y_{(t,s)} = 0$ άρα το πρόγραμμα γίνεται

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_e c_e y_e \\ & z_v \leq z_u + y_e, \forall e = (u, v) \in E \\ & z_t - z_s \geq 1 \\ & y_e \geq 0 \end{aligned}$$

👁 Αν έχουμε μία βέλτιστη λύση στο Δυϊκό πρόγραμμα της Μέγιστης Ροής, θα διαβάσουμε μία ροή με κέρδος ίσο με το κόστος κάποιας τομής,

Επεξεργασία του Γραμμικού Προγράμματος.

Εφόσον $c_{(t,s)} = \infty$ πρέπει $y_{(t,s)} = 0$ άρα το πρόγραμμα γίνεται

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_e c_e y_e \\ & z_v \leq z_u + y_e, \forall e = (u, v) \in E \\ & z_t - z_s \geq 1 \\ & y_e \geq 0 \end{aligned}$$

👁 Αν έχουμε μία βέλτιστη λύση στο Δυϊκό πρόγραμμα της Μέγιστης Ροής, θα διαβάσουμε μία ροή με κέρδος ίσο με το κόστος κάποιας τομής, άρα μία βέλτιστη ροή ✓.

Επεξεργασία του Γραμμικού Προγράμματος.

Έστω μία βέλτιστη λύση f για το Πρωτεύον και μία (y, z) για το Δυϊκό.

👉 Μπορούμε να υποθέσουμε $z_s = 0$ (γιατί;)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_e c_e y_e \\ & z_v \leq z_u + y_e, \forall e = (u, v) \in E \\ & z_t \geq 1 \\ & y_e \geq 0 \end{aligned}$$

Επεξεργασία του Γραμμικού Προγράμματος.

Έστω μία βέλτιστη λύση f για το Πρωτεύον και μία (y, z) για το Δυϊκό.

👉 Μπορούμε να υποθέσουμε $z_s = 0$ (γιατί;)

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \sum_e c_e y_e \\ & && z_v \leq z_u + y_e, \forall e = (u, v) \in E \\ & && z_t \geq 1 \\ & && y_e \geq 0 \end{aligned}$$

👉 Έστω $S := \{u \in V : z_u < 1\}$.

Επεξεργασία του Γραμμικού Προγράμματος.

Έστω μία βέλτιστη λύση f για το Πρωτεύον και μία (y, z) για το Δυϊκό.

👉 Μπορούμε να υποθέσουμε $z_s = 0$ (γιατί;)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_e c_e y_e \\ & z_v \leq z_u + y_e, \forall e = (u, v) \in E \\ & z_t \geq 1 \\ & y_e \geq 0 \end{aligned}$$

👉 Έστω $S := \{u \in V : z_u < 1\}$. Τι συμβαίνει με την τομή $(S, V \setminus S)$;

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_e c_e y_e \\ & z_v \leq z_u + y_e, \forall e = (u, v) \in E \\ & z_t \geq 1 \\ & y_e \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_e c_e y_e \\ & z_v \leq z_u + y_e, \forall e = (u, v) \in E \\ & z_t \geq 1 \\ & y_e \geq 0 \end{aligned}$$

★ Έστω ακμή $e = (u, v) \in S \times (V \setminus S)$. Τότε $y_e \geq z_v - z_u > 0$

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_e c_e y_e \\ & z_v \leq z_u + y_e, \forall e = (u, v) \in E \\ & z_t \geq 1 \\ & y_e \geq 0 \end{aligned}$$

★ Έστω ακμή $e = (u, v) \in S \times (V \setminus S)$. Τότε $y_e \geq z_v - z_u > 0$ άρα ο αντίστοιχος περιορισμός στο Πρωτεύον ($f_e \leq c_e$) είναι ισότητα.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_e c_e y_e \\ & z_v \leq z_u + y_e, \forall e = (u, v) \in E \\ & z_t \geq 1 \\ & y_e \geq 0 \end{aligned}$$

★ Έστω ακμή $e = (u, v) \in S \times (V \setminus S)$. Τότε $y_e \geq z_v - z_u > 0$ άρα ο αντίστοιχος περιορισμός στο Πρωτεύον ($f_e \leq c_e$) είναι ισότητα.

★ Έστω ακμή $(u, v) \in (V \setminus S) \times S$. Εφόσον $z_v < z_u + y_e$

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_e c_e y_e \\ & z_v \leq z_u + y_e, \forall e = (u, v) \in E \\ & z_t \geq 1 \\ & y_e \geq 0 \end{aligned}$$

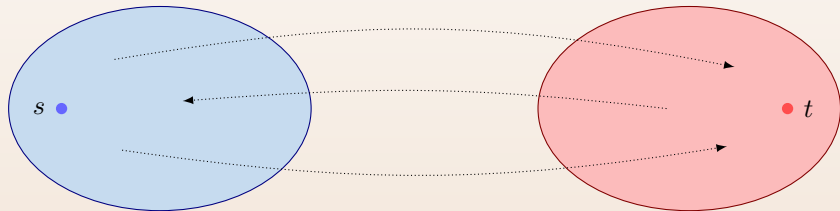
★ Έστω ακμή $e = (u, v) \in S \times (V \setminus S)$. Τότε $y_e \geq z_v - z_u > 0$ άρα ο αντίστοιχος περιορισμός στο Πρωτεύον ($f_e \leq c_e$) είναι *ισότητα*.

★ Έστω ακμή $(u, v) \in (V \setminus S) \times S$. Εφόσον $z_v < z_u + y_e$ και άρα η αντίστοιχη μεταβλητή στο Πρωτεύον (f_e) πρέπει ισούται με 0.

Μέγιστη Ροή=Ελάχιστη Τομή: Εναλλακτική απόδειξη.

Άρα έχουμε την τομή $(S, V \setminus S)$ όπου $S := \{z_u : z_u < 1\}$:

- 👉 οι ακμές $e \in S \times (V \setminus S)$ ικανοποιούν $f_e = c_e$
- 👉 οι ακμές $e \in (V \setminus S) \times S$ ικανοποιούν $f_e = 0$
- 👉 άρα βρήκαμε μία τομή με κέρδος όσο μία τομή $\Rightarrow$ Μέγιστη Ροή $\checkmark$



- 1 Γράψαμε κάτω το Γραμμικό Πρόγραμμα της Μέγιστης Ροής.
- 2 Γράψαμε το Δυϊκό του.

- 1 Γράψαμε κάτω το Γραμμικό Πρόγραμμα της Μέγιστης Ροής.
- 2 Γράψαμε το Δυϊκό του.
- 3 Δείξαμε ότι από μία οποιαδήποτε λύση του Δυϊκού μπορούμε να βρούμε μία τομή ώστε σε κάθε βέλτιστη λύση του Πρωτεύοντος να έχει κέρδος όσο το κόστος της τομής.

- 1 Γράψαμε κάτω το Γραμμικό Πρόγραμμα της Μέγιστης Ροής.
- 2 Γράψαμε το Δυϊκό του.
- 3 Δείξαμε ότι από μία οποιαδήποτε λύση του Δυϊκού μπορούμε να βρούμε μία τομή ώστε σε κάθε βέλτιστη λύση του Πρωτεύοντος να έχει κέρδος όσο το κόστος της τομής.
- 4 Προσοχή, αυτό αποδεικνύει το Θεώρημα Μέγιστης Ροής αλλά δεν μας λέει ότι υπάρχει *ακέραια* μέγιστη Ροή! Αυτό μας το λέει ο Ford-Fulkerson.