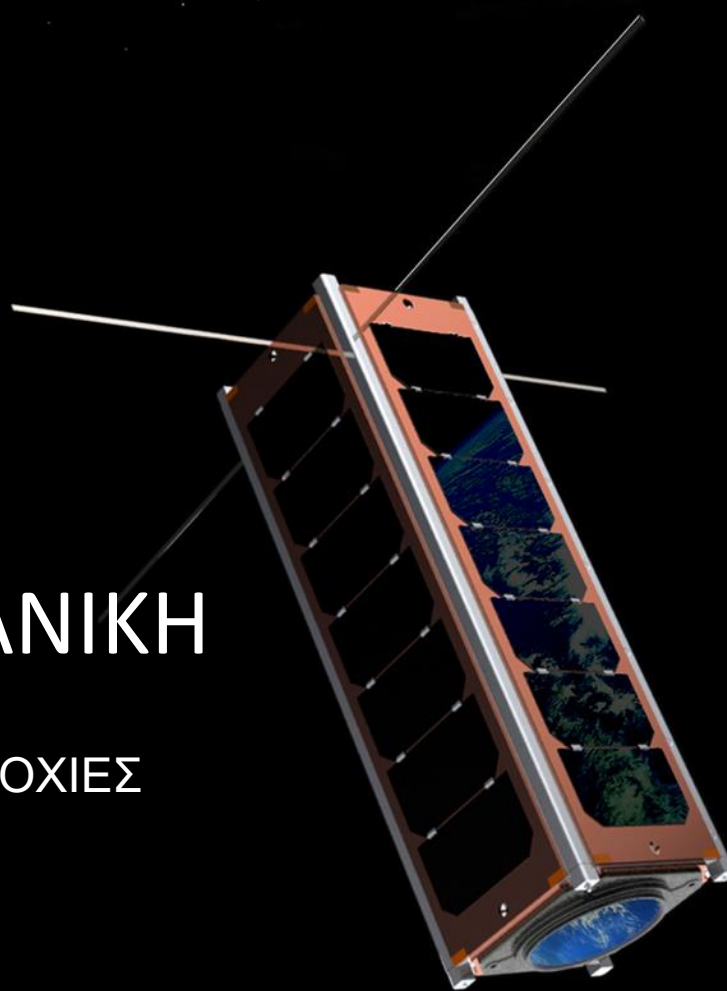


ΤΡΟΧΙΑΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΤΡΟΧΙΕΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΜΕΑ_AM30 Space
Technologies/Διαστημικές Τεχνολογίες
Prof V. Lappas, Prof V. Kostopoulos
Email: vlappas@upatras.gr

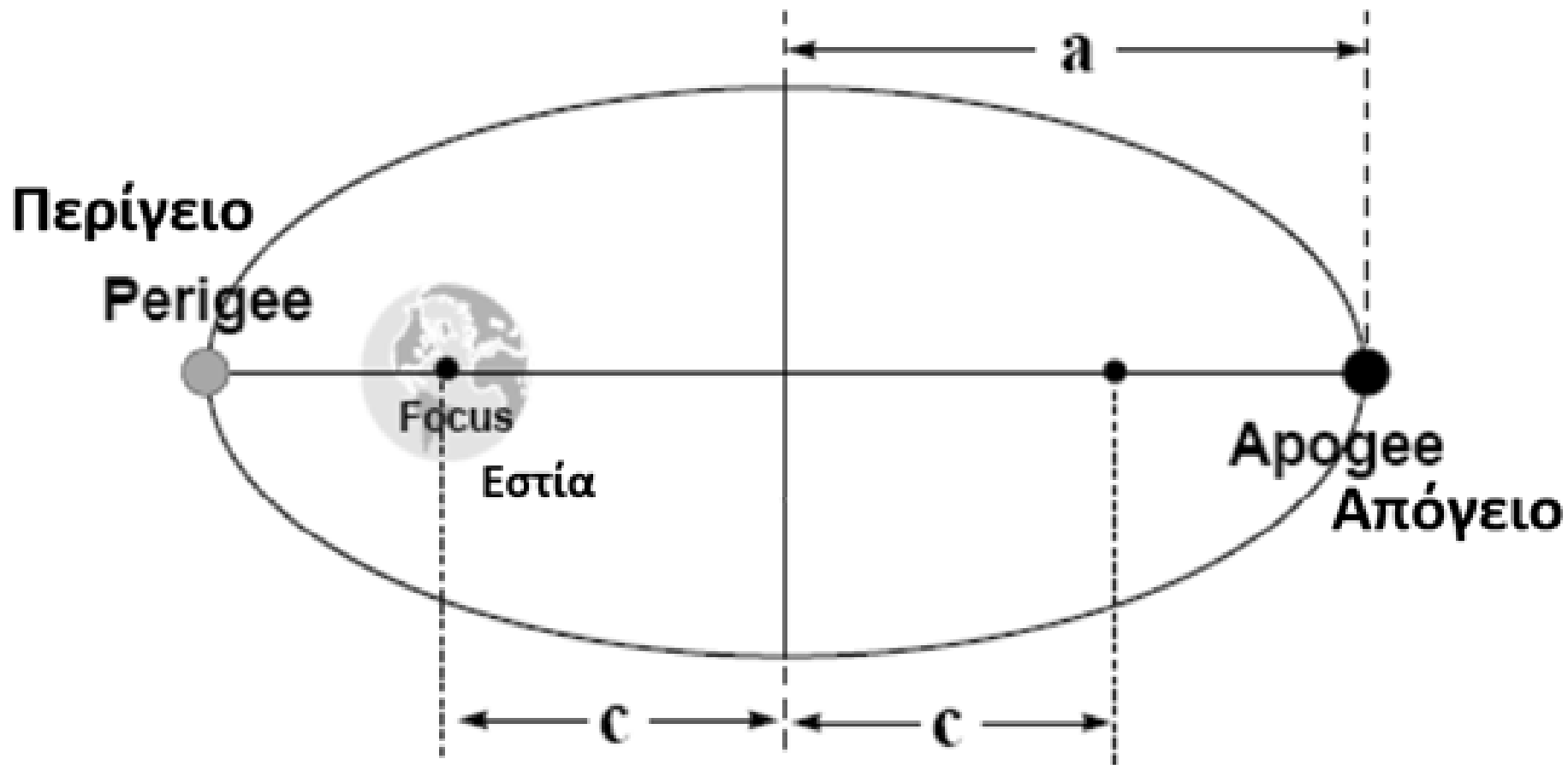
- Ως δορυφόρος ορίζεται επιστημονικά οποιοιδήποτε αντικείμενο περιστρέφεται γύρω από ένα πλανήτη.
- Για παράδειγμα, η σελήνη είναι φυσικός δορυφόρος της Γης.
- Όπως όλοι γνωρίζουμε, υπάρχουν οχήματα τα οποία κινούνται γύρω από την Γη και ονομάζονται τεχνητοί δορυφόροι (ή, για συντομία, απλώς δορυφόροι).
- Παρόλο που οτιδήποτε σε τροχιά γύρω από την Γη είναι δορυφόρος, ο όρος τυπικά χρησιμοποιείται για να περιγράψει ένα χρήσιμο αντικείμενο το οποίο τοποθετήθηκε σε τροχιά γύρω από την Γη σκοπίμως για να τελέσει μία ορισμένη αποστολή ή έργο.
- Συχνά ακούμε για μετρολογικούς, τηλεπικοινωνιακούς, επιστημονικούς, και στρατιωτικούς/κατασκοπευτικούς δορυφόρους οι οποίοι λειτουργούν σε διάφορες τροχιές (ύψη) και έχουν διαφορετικά φορτία/όργανα ανάλογα με τη αποστολή τους.

- Ο πρώτος δορυφόρος στο διάστημα ήταν ο σοβιετικός **Σπούτνικ** (*Sputnik*), ο οποίος εκτοξεύθηκε στις 4 Οκτωβρίου 1957.
- Ήταν μια μεταλλική μπάλα διαμέτρου 58 εκατοστών/βάρους 83 κιλών.
- Μετέφερε θερμόμετρο, μπαταρία, και ένα πομπό που μετέδιδε μια σειρά από τόνους οι οποίοι αντιστοιχούσαν στις αλλαγές της θερμοκρασίας.
- Το εσωτερικό του σκάφους περιείχε άζωτο. Επίσης υπήρχαν 4 κεραίες στο εξωτερικό του σκάφους για την μετάδοση του σήματος στην συχνότητα των 27 περίπου μεγακύκλων, δηλαδή σε μια διαδεδομένη και εύκολα «προσβάσιμη» συχνότητα για όλο τον κόσμο.
- Οι σημερινοί δορυφόροι είναι βεβαίως πιο περίπλοκοι όμως οι βασικές αρχές παραμένουν ίδιες.





- Η πορεία που ακολουθεί ένας δορυφόρος ονομάζεται τροχιά.
- Οι τροχιές είναι κυκλικές ή ελλειπτικές. (Ακόμα και στη περίπτωση στην οποία οι δορυφόροι μπαίνουν σε σπειροειδή τροχιά συντριβής στην γήινη ατμόσφαιρα, η τροχιά τους είναι ελλειπτική με συνεχώς μεταβαλλόμενα χαρακτηριστικά.)
- Στις κυκλικές τροχιές η απόσταση του δορυφόρου από την Γη είναι σταθερή.
- Στις ελλειπτικές, η Γη βρίσκεται σε μια από τις δύο εστίες.
- Στην περίπτωση αυτή, όταν ο δορυφόρος βρίσκεται πιο κοντά στην Γη, τότε λέμε ότι βρίσκεται στο **περίγειο**, ενώ όταν βρίσκεται στην πιο μακρινή θέση βρίσκεται στο **απόγειο**

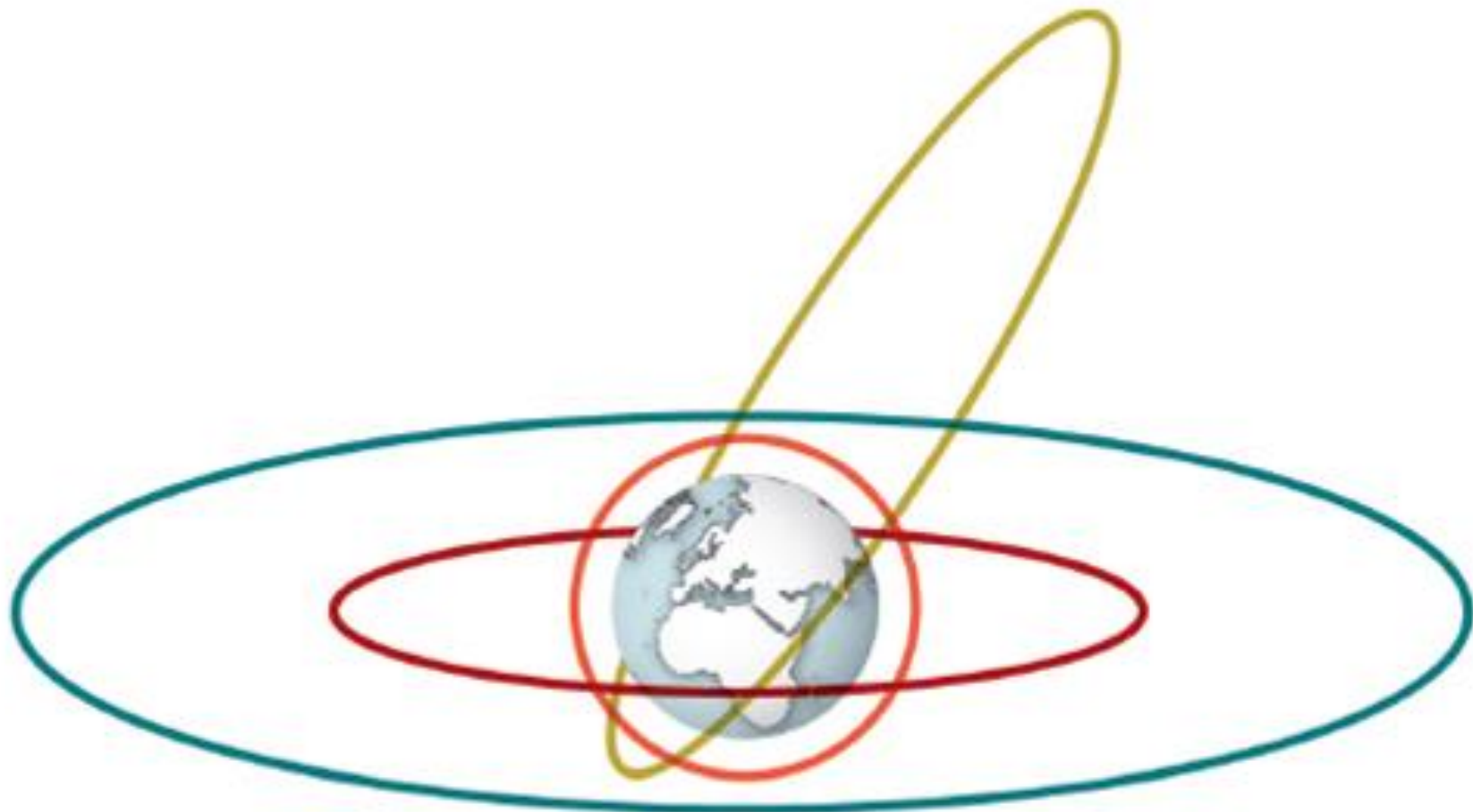


Ελλειπτική Τροχιά

- **Υπάρχουν τροχιές με ειδική σημασία και ονομασία:**
 - Οι *γεωσύγχρονες* τροχιές είναι αυτές με περίοδο (χρόνο περιστροφής γύρω από την Γη) όσο και ο χρόνος περιστροφής της Γης γύρω από τον εαυτό της (περίπου 24 ώρες).
 - Οι *γεωστατικές* είναι γεωσύγχρονες, κυκλικές τροχιές με κλίση 0° . **Ο δορυφόρος παραμένει σε σταθερό σημείο πάνω από τον Ισημερινό.**
 - *Τροχιές Μολνίγια* (Molniya) : τροχιές με μεγάλη ελλειπτικότητα και κλίση.
 - *Πολικές* τροχιές: τροχιές με κλίση περίπου 90° (δηλαδή περνάνε πάνω από τους πόλους).
 - *Ηλιοσύγχρονες* τροχιές. Σταθερή γωνία δορυφόρου σε σχέση με τον Ήλιο.
 - *Ανάδρομες* τροχιές. Τροχιές με κατεύθυνση από την Ανατολή προς την Δύση

- Η τροχιά κάθε δορυφόρου **εξαρτάται από την αποστολή** του κάθε δορυφόρου και βεβαίως αποτελεί βασική παράμετρο του σχεδιασμού.
- Πρέπει να αναφερθεί ότι οι δορυφόροι σε χαμηλές τροχιές γύρω από την Γη κινούνται σε μόρια της γήινης ατμόσφαιρας και σε συνδυασμό με την υψηλή ταχύτητά τους υπόκεινται σε οπισθέλκουσα.
- Η δύναμη αυτή προκαλεί μια σπειροειδή τροχιά και ο δορυφόρος εισέρχεται στην γήινη ατμόσφαιρα μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, το οποίο πολλές φορές είναι δύσκολο να υπολογισθεί με ακρίβεια.

- Για τα ύψη των δορυφόρων υπάρχουν οι ακόλουθες γενικές παρατηρήσεις:
 - Σε ύψη από **400 έως 2000 km** τοποθετούνται **δορυφόροι παρατήρησης** για χαρτογράφηση, διαπίστωση μετακίνησης πάγου και άμμου (έρημος), διαπίστωση οικολογικών αλλαγών (εξαφάνιση δασών), έρευνα για αποθέματα μετάλλων, έρευνα με εφαρμογή στην γεωργία. Σε αυτό το εύρος βρίσκονται επίσης, **δορυφόροι έρευνας και διάσωσης** που αναμεταδίδουν σήματα κινδύνου καθώς και το Διαστημικό Λεωφορείο και ο Διαστημικός Σταθμός. Δορυφόροι σε αυτά τα ύψη λέγεται ότι βρίσκονται σε Χαμηλή Γήινη Τροχιά (ΧΓΤ)/Low Earth Orbit (LEO)
 - Στις τροχιές με ύψος **2000 έως 30000 km** ύψος βρίσκονται κυρίως **δορυφόροι πλοήγησης ή επιστημονικοί δορυφόροι**. Αποστολή τέτοιων δορυφόρων είναι για παράδειγμα η συλλογή στοιχείων για το περιβάλλον και τα συστήματα προσδιορισμού θέσης, ταχύτητας και χρόνου. Δορυφόροι σε αυτά τα ύψη λέγεται ότι βρίσκονται σε Μέση Γήινη Τροχιά (ΜΓΤ)/Medium Earth Orbit (MEO)
 - Στις γεωστατικές τροχιές (**ύψος 35780 km**) βρίσκονται **μετρολογικοί, τηλεπικοινωνιακοί, ραδιο/τηλεοπτικοί** δορυφόροι. κ.α. Δορυφόροι σε αυτά τα ύψη λέγεται ότι βρίσκονται σε Γεωστατική Τροχιά (ΓΕΤ)/Geostationary Orbit (GEO)

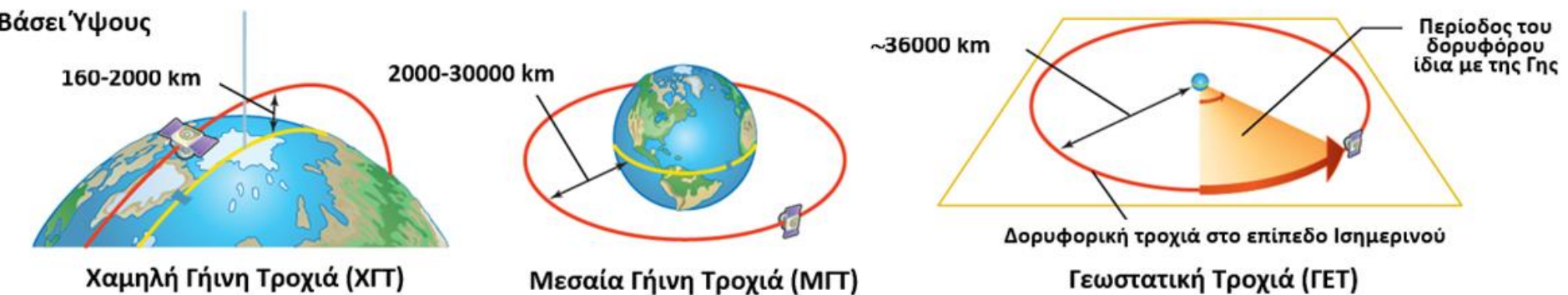
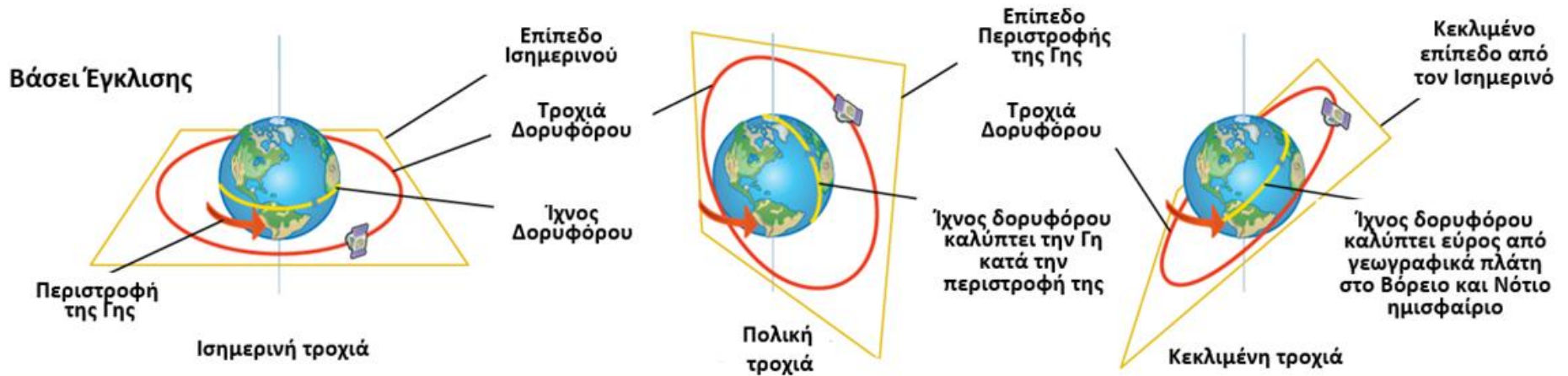


- LEO = Low Earth Orbit ($\approx 200 - 2,000$ km)
- MEO = Medium Earth Orbit ($\approx 2,000 - 35,000$ km)
- GEO = Geostationary Orbit ($\approx 36,000$ km)
- HEO = Highly Elliptical Orbit ($\approx 200 - 50,000$ km)

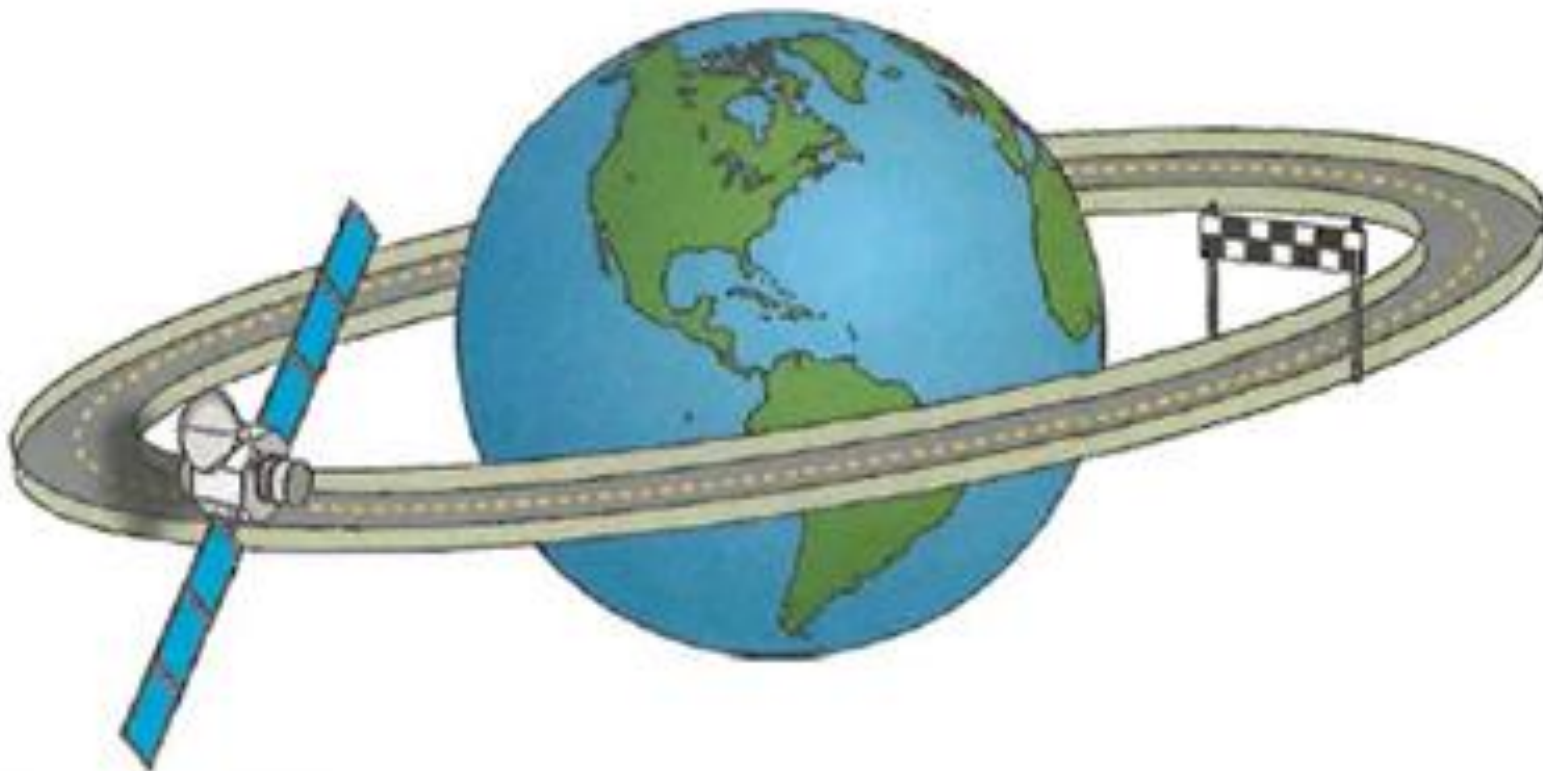
- Οι γεωστατικές τροχιές στα 36000 km πάνω από τον γήινο ισημερινό είναι γνωστές κυρίως για τους πολλούς τηλεπικοινωνιακούς δορυφόρους, συμπεριλαμβανομένων και των δορυφόρων για τα τηλεοπτικά σήματα.
- Τα σήματα από αυτούς τους δορυφόρους μπορούν να σταλθούν κυριολεκτικά σε κάθε άκρη της γης.
- Στις τηλεπικοινωνίες είναι αναγκαίο «να φαίνεται» ο δορυφόρος κάθε στιγμή και επομένως πρέπει να παραμένει στατικός στην ίδια θέση, σε σχέση με την επιφάνεια της γης.

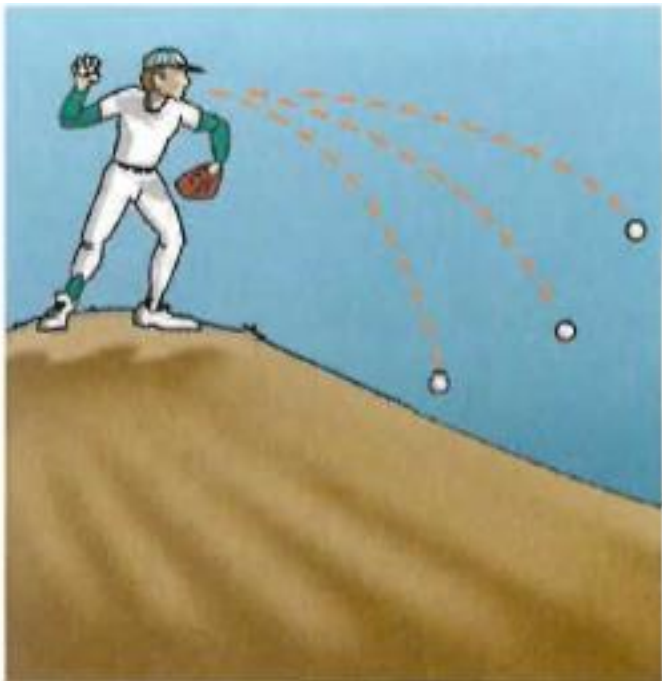
- Σε ό,τι αφορά την τηλεπισκόπηση, ένας στατικός δορυφόρος έχει το πλεονέκτημα ότι βλέπει πάντα τη γη από την ίδια οπτική γωνία, πράγμα που σημαίνει ότι έχει τη δυνατότητα να καταγράφει την ίδια εικόνα ανά τακτά χρονικά διαστήματα.
- Αυτή η ιδιότητα είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην παρατήρηση των καιρικών συνθηκών.
- Ένα μειονέκτημα των γεωστατικών τροχιών είναι η μεγάλη απόσταση από τη γη, γεγονός που μειώνει την μέγιστη δυνατή χωρική ανάλυση.
- Υπάρχουν αρκετοί μετεωρολογικοί δορυφόροι που έχουν κατανεμηθεί ομοιόμορφα σε γεωστατικές τροχιές γύρω από τη γη, παρέχοντας έτσι μια σφαιρική εικόνα των καιρικών φαινομένων σε ολόκληρο τον πλανήτη μας.

- Οι δορυφόροι που είναι εξοπλισμένοι με συστήματα παθητικών αισθητήρων, εξαρτώνται από τον ηλιακό φως και επομένως από την τροχιά γύρω από τη γη.
- Επειδή οι αισθητήρες αυτοί μετρούν την αντανάκλαση του φωτός που προέρχεται από τον ήλιο και ανακλάται στη γη, οι τροχιές τους πρέπει να είναι προσαρμοσμένες στην εναλλαγή ημέρας-νύχτας.
- Είναι σημαντικό να μπορούμε να συγκρίνουμε τις εικόνες που καταγράφονται σε μια δεδομένη χρονική περίοδο.
- Προκειμένου να είναι συγκρίσιμες αυτές οι εικόνες, θα πρέπει οι συνθήκες φωτισμού να είναι ίδιες.
- Επομένως, οι καταγραφές θα πρέπει να πραγματοποιούνται την ίδια τοπική ώρα της ημέρας, έτσι ώστε ο ήλιος να βρίσκεται στο ίδιο σημείο πάνω από τον ορίζοντα και το επίπεδο της δορυφορικής τροχιάς να διατηρεί σταθερή γωνία ως προς το φως του ήλιου.
- Για να επιτευχθούν όλες αυτές οι προϋποθέσεις θα πρέπει ο δορυφόρος να κινείται σε πολική τροχιά
- **Ερώτηση:** Τι είναι πολική τροχιά και πια η διαφορά της με την ηλιοσύγχρονη τροχιά;

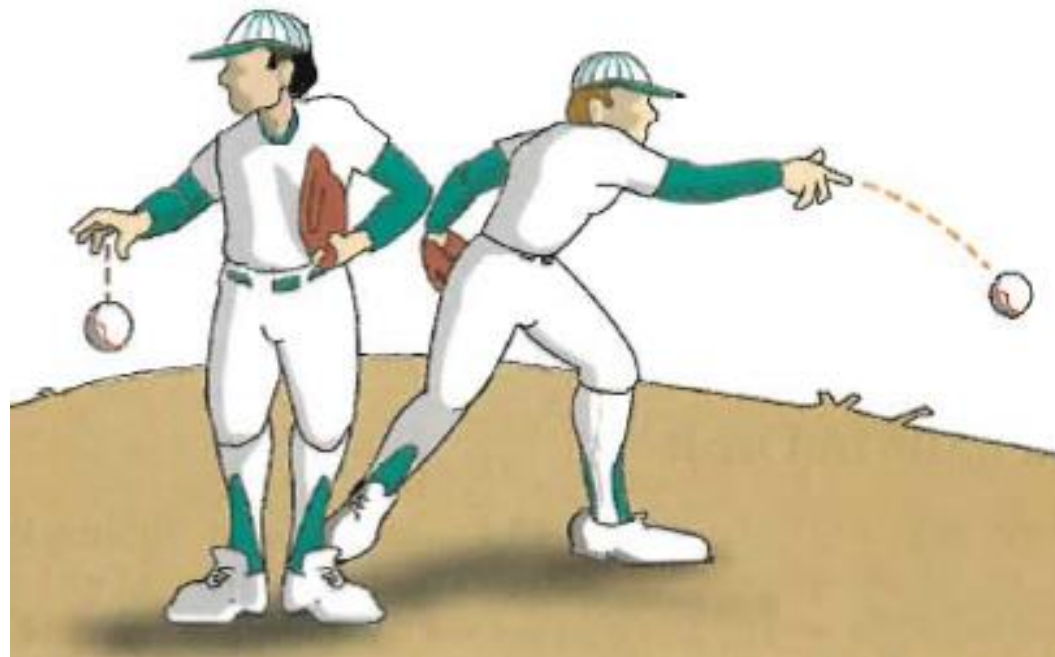


- Τα διαστημικά σκάφη λειτουργούν σε τροχιές. Μπορούμε να περιγράψουμε μια τροχιά ως μια «πίστα» πάνω στην οποία κινείται ένα

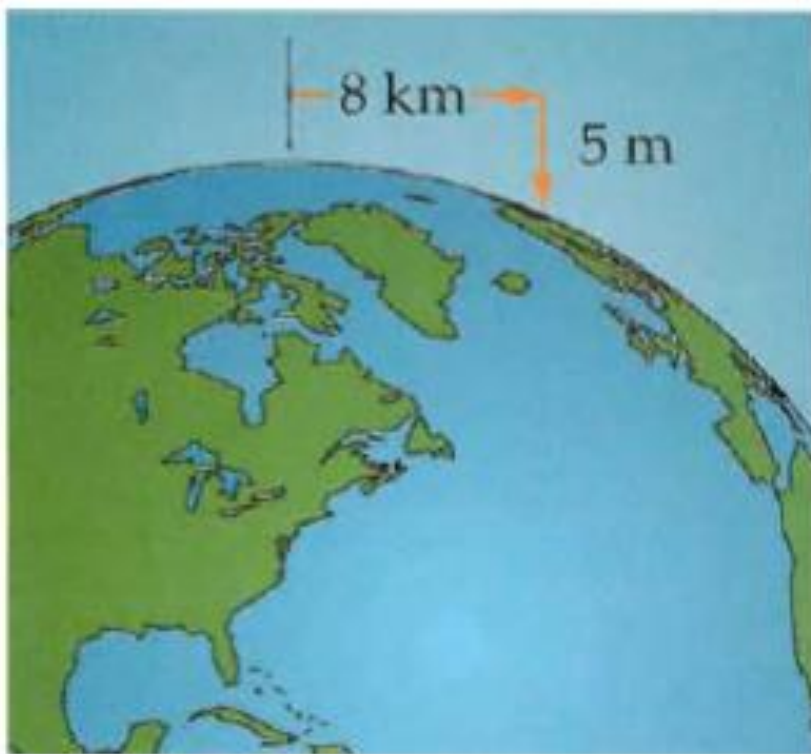




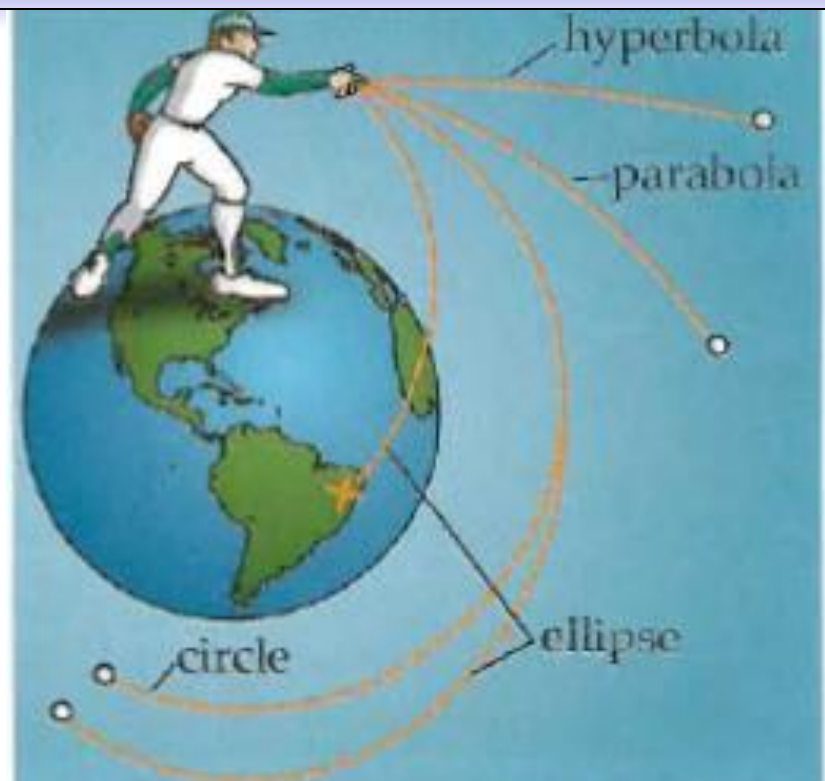
Σχήμα 1: Ρίχνοντας μπάλες του baseball από ένα βουνό. Όσο πιο γρήγορα τις πετάμε τόσο πιο μακριά πηγαίνουν (βολή)



Σχήμα 2: Ρίχνοντας μπάλες του baseball την ίδια στιγμή. Οι μπάλες πέφτουν στο έδαφος την ίδια στιγμή, καθώς η κάθετη και οριζόντια κίνησή τους είναι ανεξάρτητες



Σχήμα 1: Η Καμπυλότητα της Γης κλίνει προς τα κάτω κατά 5μ για κάθε 8 χλμ οριζόντιας κίνησης

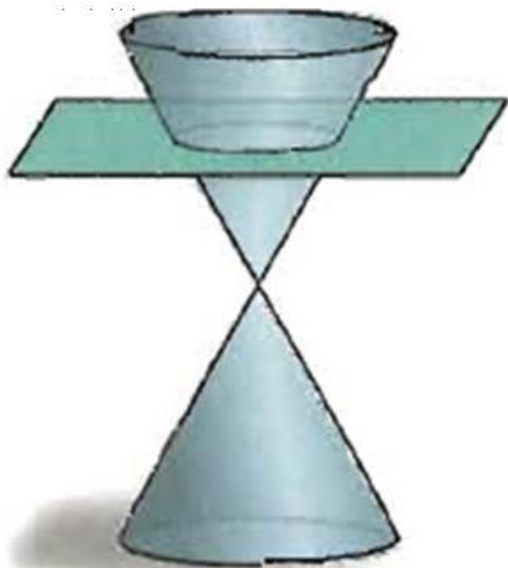


Σχήμα 2: Ανάλογα με την ταχύτητα που πετάμε την μπάλα, η καμπυλότητα της Γης θα φθίνει. Στην σωστή ταχύτητα θα μπει σε κυκλική τροχιά. ΑΝ πάει πιο γρήγορα θα ξεφύγει από την Γη (παραβολή/υπερβολή)

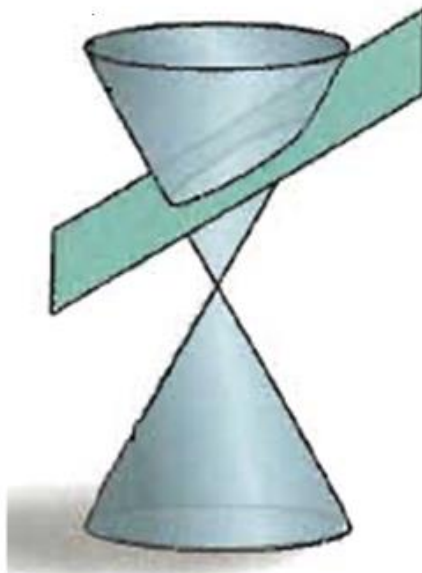
- Αν αναλύσουμε τις διάφορες τροχιές από τις μπάλες του μπίτζμπολ, προκύπτει μια ολόκληρη σειρά από διαφορετικά σχήματα.
- Μόνο μία ταχύτητα παράγει μια τέλεια κυκλική τροχιά. Οι βραδύτερες ταχύτητες προκαλούν την τροχιά να χτυπήσει τη Γη κάποια στιγμή.
- Αν σχεδιάζαμε την προβολή αυτής της τροχιάς στην επιφάνεια της Γης θα βλέπαμε ότι η τροχιά είναι ένα μέρος μια έλλειψης (μοιάζει με παραβολή, αλλά είναι στην πραγματικότητα έλλειψη).
- Η ρίψη μιας μπάλας με ταχύτητα ελαφρώς μεγαλύτερη από την κυκλική ταχύτητα, έχει επίσης ως αποτέλεσμα μια έλλειψη.
- Εάν ρίξουμε την μπάλα με ακόμα μεγαλύτερη ταχύτητα, τότε ξεφεύγει από την βαρύτητα της Γη σε μια παραβολική ή υπερβολική τροχιά, χωρίς επιστροφή.
- Ανεξάρτητα από την ταχύτητα, μια τροχιά μπορεί να είναι κύκλος, έλλειψη, παραβολή ή υπερβολή.
- Όπως θα δούμε, αυτά τα τέσσερα σχήματα αποτελούν τις κωνικές τομές

- Αυτή η εξίσωση είναι η λύση στην εξίσωση κίνησης δύο σωμάτων και περιγράφει τη θέση του διαστημικού σκάφους R σε όρους δύο σταθερών και πολικής γωνίας ν .
- Μπορεί να αναγνωρίσετε ότι αυτή η εξίσωση αντιπροσωπεύει επίσης μια γενική σχέση για κύκλο, έλλειψη, παραβολή ή υπερβολή, γνωστές και ως κωνικές τομές

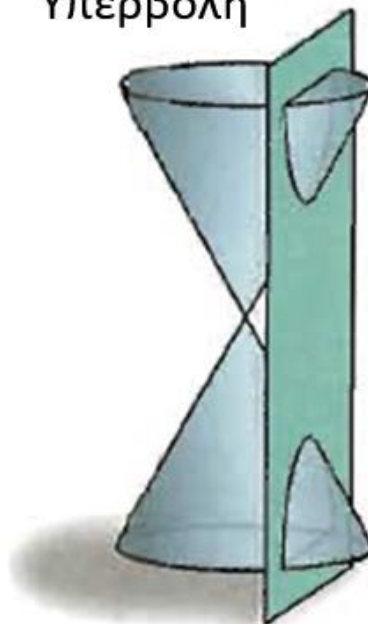
Κύκλος



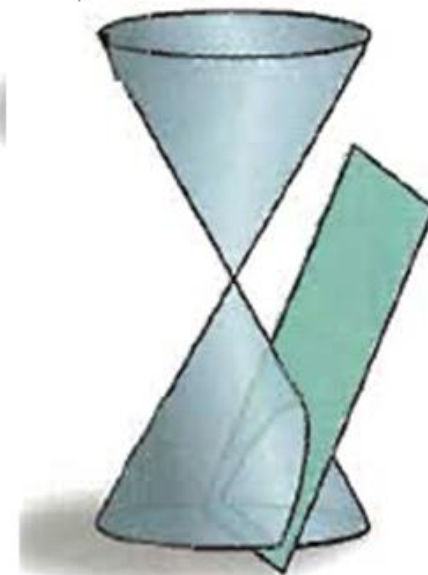
Έλλειψη



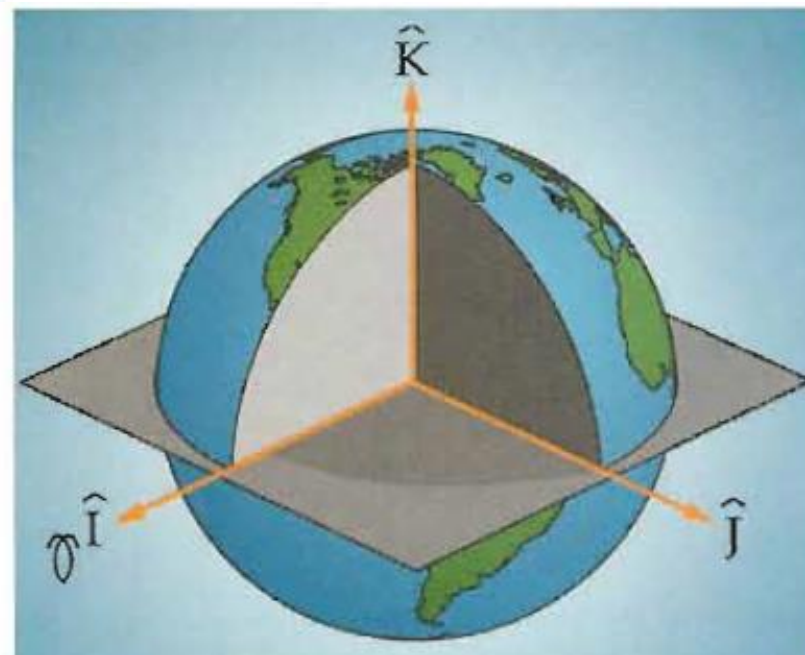
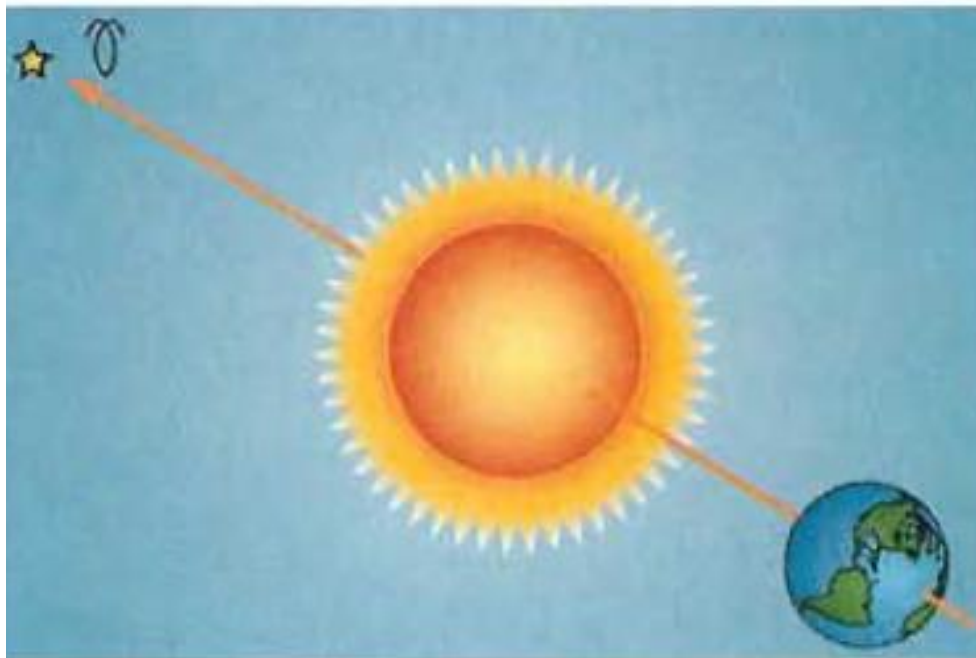
Υπερβολή



Παραβολή



Τροχιές



Σχήμα 1: Διεύθυνση εαρινής ισημερίας είναι η ευθεία από την Γη στον Ήλιο την πρώτη μέρα της Άνοιξης – 21 Μαρτίου

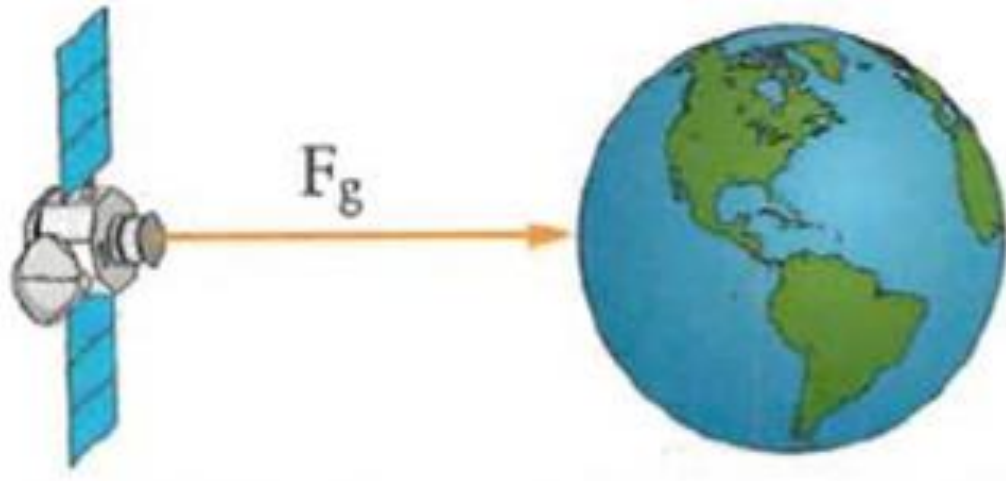
Σχήμα 2: γεωκεντρικό-ισημερινό σύστημα συντεταγμένων

- Η αρχή των αξόνων βρίσκεται στο κέντρο της Γης (εξ ου και το γεωκεντρικό όνομα)
- Θεμελιώδες επίπεδο είναι ο ισημερινός της Γης (εξ ου και γεωκεντρικός-ισημερινός). Κάθετο προς το επίπεδο του βόρειου πόλου.
- Η κύρια διεύθυνση είναι αυτή της εαρινής ισημερίας. Υπολογίζεται από την γραμμή που ενώνει τη Γη και τον Ήλιο την πρώτη μέρα της Άνοιξης,
- Ενώ αυτή η κατεύθυνση ίσως να μην φαίνεται "βολική" για εμάς, για τους αστρονόμους που καθόρισαν αρχικά το σύστημα είναι εξαιρετικά σημαντική.
- Ο τρίτος άξονας υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Υποθέσεις-Απλοποιήσεις (II)

- Έτσι η μόνη δύναμη που ασκείται στο διαστημικό σκάφος είναι η βαρυτική δύναμη και η εξίσωση της κίνησης γίνεται

$$\Sigma \vec{F}_{external} = \vec{F}_{gravity} = m\vec{a}$$



Δεύτερος Νόμος Κίνησης του Νεύτωνα

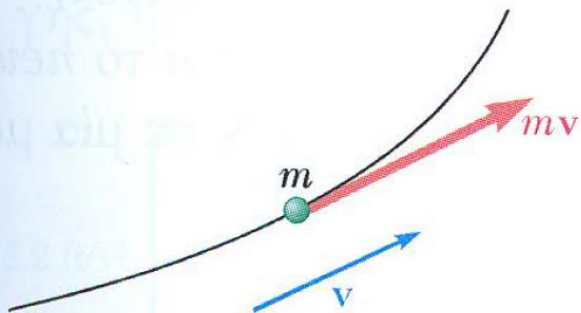
Εάν η συνισταμένη δύναμη που δρα επάνω σε ένα σωματίδιο δεν είναι μηδενική, το σωματίδιο έχει επιτάχυνση ανάλογη με το μέτρο της συνισταμένης και στην κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης.

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Επισημαίνουμε ότι το σύστημα αξόνων ως προς το οποίο προσδιορίζουμε την επιτάχυνση \mathbf{a} δεν είναι αυθαίρετο. Οι άξονες αυτοί πρέπει να έχουν σταθερό προσανατολισμό ως προς τα άστρα, και το σημείο αφετηρίας τους πρέπει να είναι συνδεδεμένο στον ήλιο (ακριβέστερα, στο κέντρο μάζας του ηλιακού συστήματος) ή να κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς τον ήλιο. Ένα τέτοιο σύστημα αξόνων ονομάζεται **Νευτώνειο**

Γραμμική Ορμή ενός Σωματιδίου

$$\left. \begin{aligned} \sum \underline{F} &= m \underline{\alpha} \\ \underline{\alpha} &= \frac{d\underline{v}}{dt} \end{aligned} \right\} \sum \underline{F} = m \frac{d\underline{v}}{dt}$$



$$\alpha v \quad m = \text{const}$$

$$\sum \underline{F} = \frac{d}{dt} (m\underline{v})$$

$$\underline{L} = m\underline{v} = \text{γραμμική ορμή (ορμή)}$$

$$\underline{L} = m \underline{v}$$

$$\frac{d\underline{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (m \underline{v}), \quad \alpha \nu \quad m = \text{const}$$

$$\frac{d\underline{L}}{dt} = m \frac{d\underline{v}}{dt} = m \underline{a} = \underline{F}$$

$$\underline{F} = \frac{d\underline{L}}{dt}$$

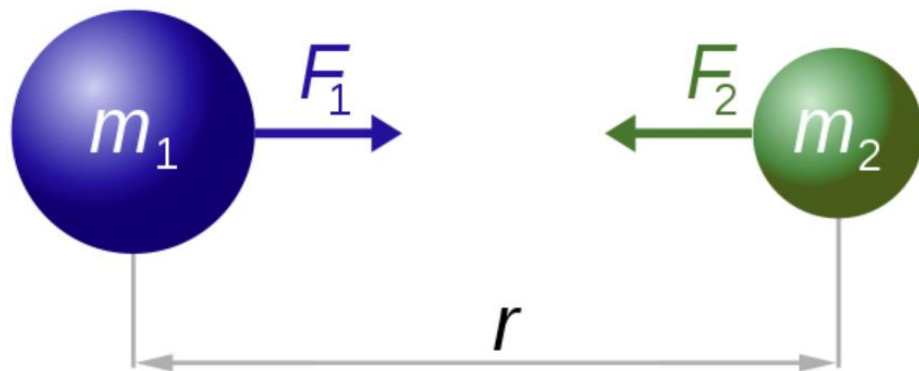
Διευθύνει σύστημα μονάδων (SI)

Υποδείγματα $[M], [L], [T] \Rightarrow \text{kg}, \text{m}, \text{s}$

$$V = \frac{ds}{dt} \quad (\text{m/s})$$

$$\alpha = \frac{dv}{dt} \quad (\text{m/s}^2)$$

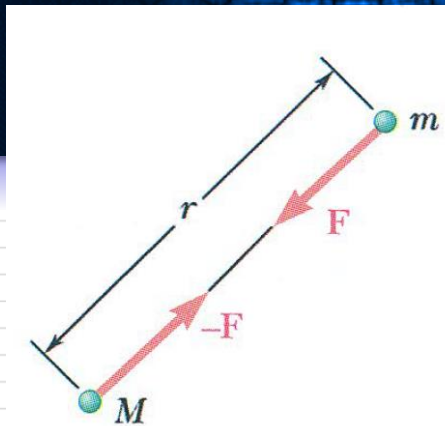
$$\underline{F} = m \underline{\alpha} \quad (F_{\text{force}} = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 \Rightarrow F \text{ (Newton)})$$



$$F_1 = F_2 = G \frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

G σταθερά της Παγκόσμιας Έλξης

G είναι $(66.73 \pm 0.03) \times 10^{-12} \text{ m}^3 / \text{kg} \cdot \text{s}^2$



$$F = G \frac{M m}{R^2}$$

αυ Μ η μάζα της γης = $5,972 \times 10^{24}$ kg

R η ακτίνα της γης = $6,371 \times 10^6$ m

και G = $6,673 \times 10^{-12}$ m³/kg s²

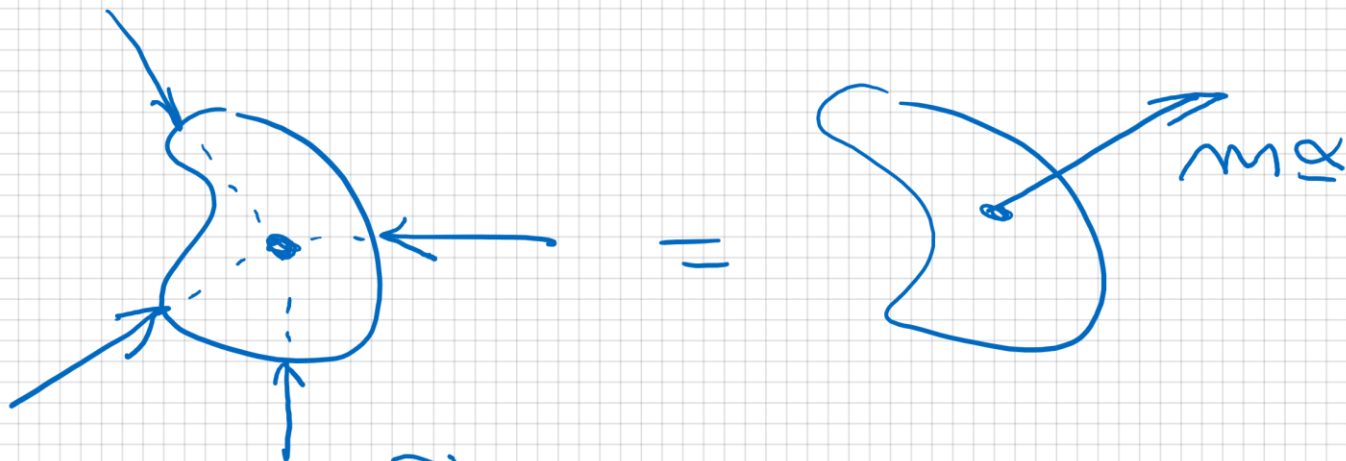
τότε F είναι η δύναμη που η γη εκκεί ασκεί στη μάζα m

σύμφωνα το βαρος

$$W = mg = G \frac{M m}{R^2} \Rightarrow \boxed{GM = gR^2}$$



Διαισθηματική αναπαράσταση του
Σου Νόμου του Νεύτωνα



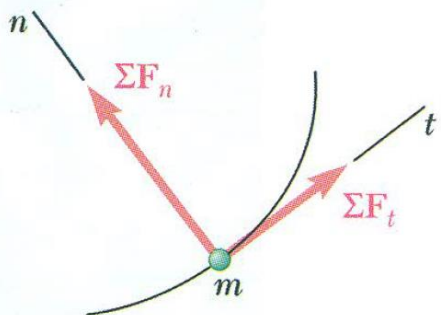
Διάγραμμα ελεύθερου
σώματος

= μάζα στη στιγμή

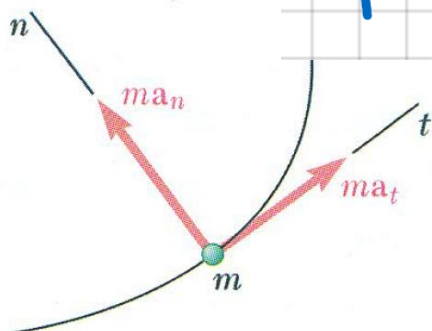
Καρτεσιανό $\Sigma \Sigma$

$$\Sigma(F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) = m(a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k})$$

$$\Sigma F_t = ma_t \quad \Sigma F_n = ma_n$$

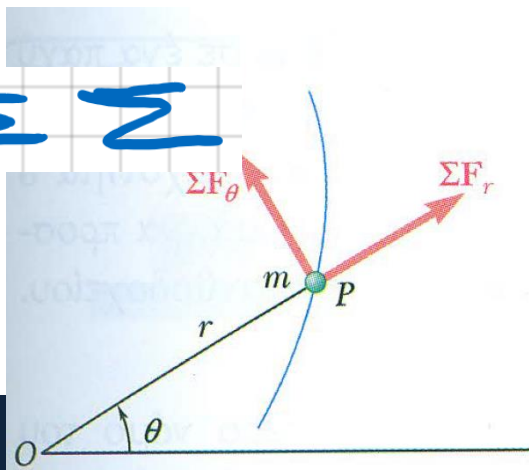


=

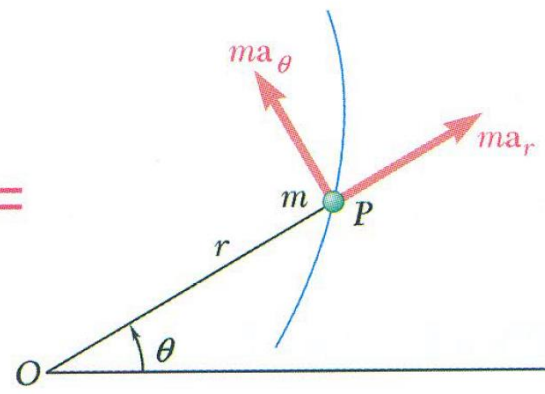


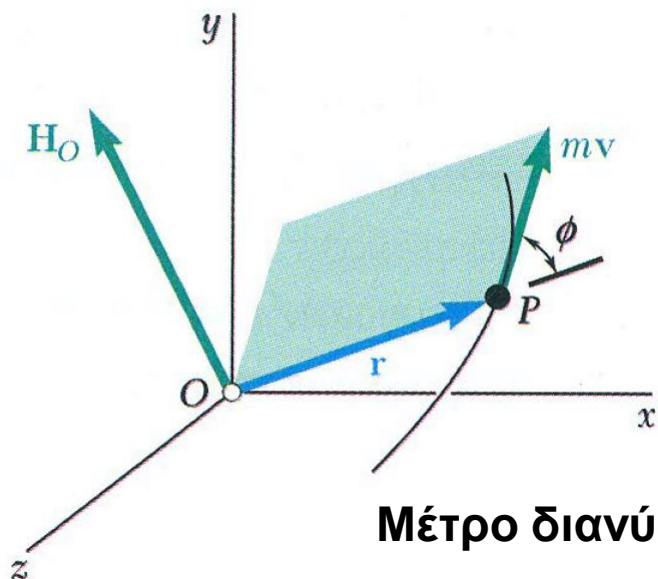
Φυγικό $\Sigma \Sigma$

Πολικό $\Sigma \Sigma$



=





$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

Μέτρο διανύσματος

$$H_O = m r v \sin\phi$$

Μονάδες στροφομής

$$m \text{ kg m/s} \longrightarrow \text{kg m}^2 / \text{s}$$

σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$

σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$H_x = m(yv_z - zv_y)$$

$$H_y = m(zv_x - xv_z)$$

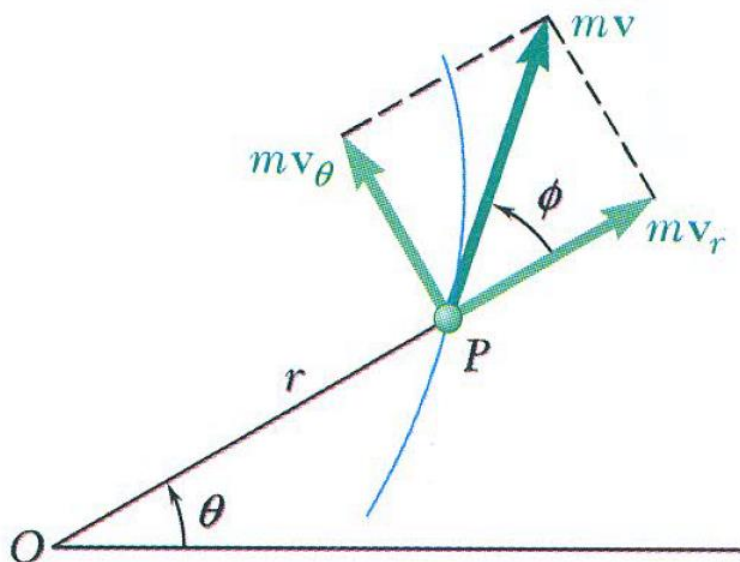
$$H_z = m(xv_y - yv_x)$$

σε πολικές συντεταγμένες

$$H_O = rmv \sin\phi = rmv_\theta$$

$$\text{όπου } v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$H_O = mr^2\dot{\theta}$$



Ρυθμός μεταβολής της ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ κινούμενου Υλικού Σημείου

$$\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) \quad \Rightarrow$$

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\mathbf{a}$$

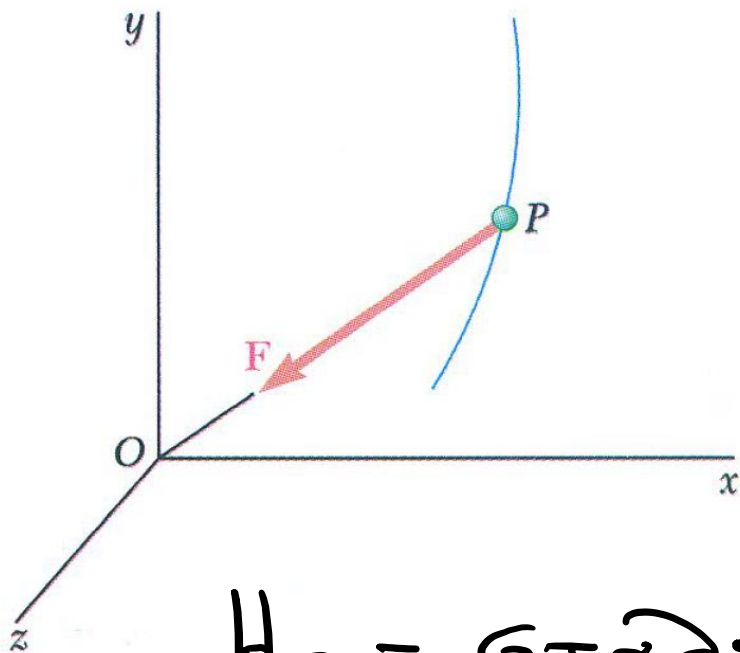
άρα

$$\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} = \dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{a}$$

όμως: $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

$$(\mathbf{r} \times \sum \mathbf{F}) = \sum \mathbf{M}_O \Rightarrow$$

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \sum \dot{\mathbf{M}}_O$$



$$\sum \underline{M}_O = \underline{\Phi} \Rightarrow$$

$$\frac{d\underline{H}_O}{dt} = \underline{\Phi} \Rightarrow$$

$$\underline{H}_O = \text{constant}$$

$$\underline{H}_O = \text{σταθερό} \Rightarrow$$

\underline{H}_O σταθερό ως μέτρο

σταθερό ως διεύθυνση

Διατήρηση της στροφορμής

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{H}_O = \text{σταθερά}$$

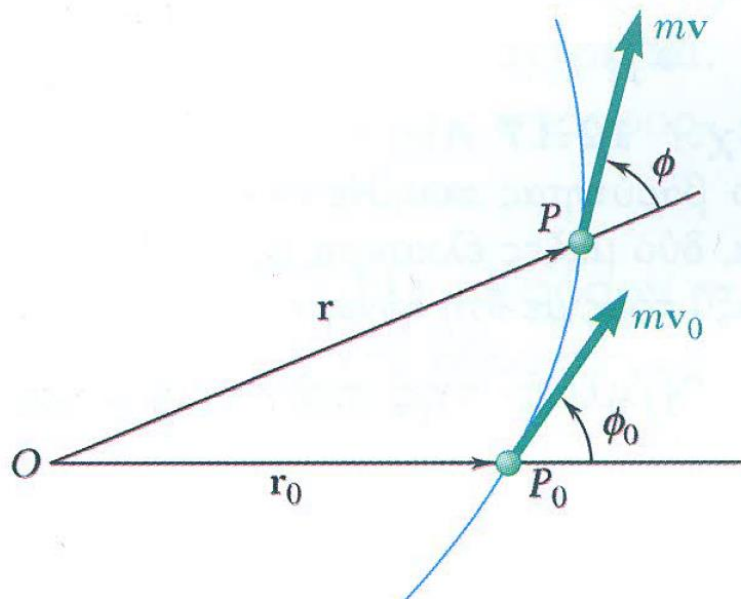
Κεντρική κίνηση σε
πολικές συντεταγμένες



$$rmv \sin \phi = r_0 m v_0 \sin \phi_0$$

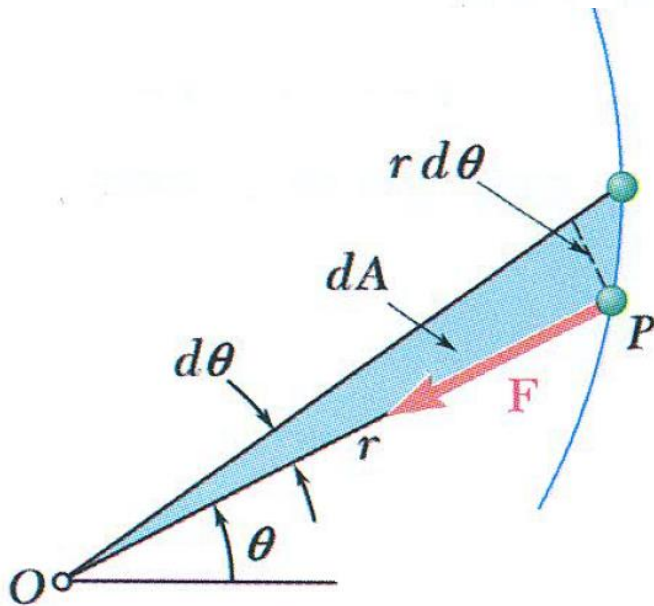
ή

$$mr^2\dot{\theta} = H_O = \text{σταθερά}$$



Διαιρώντας με m και συμβολίζοντας με h τη στροφορμή ανά μονάδα μάζας H_0/m , έχουμε

$$r^2 \dot{\theta} = h \quad \text{σταθερό}$$



$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \implies$$

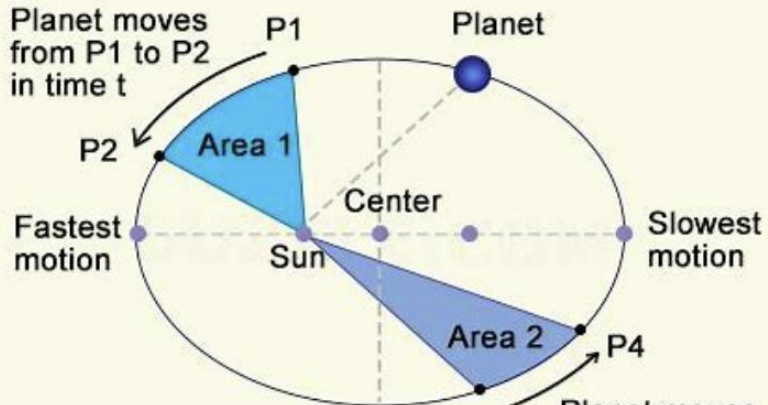
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} h = \text{σταθερό}$$

\implies σταθερή εμβαδική ταχύτητα

A line segment joining a planet and the Sun sweeps out equal areas during equal intervals of time.

Kepler's Second Law

Planet moves from P1 to P2 in time t



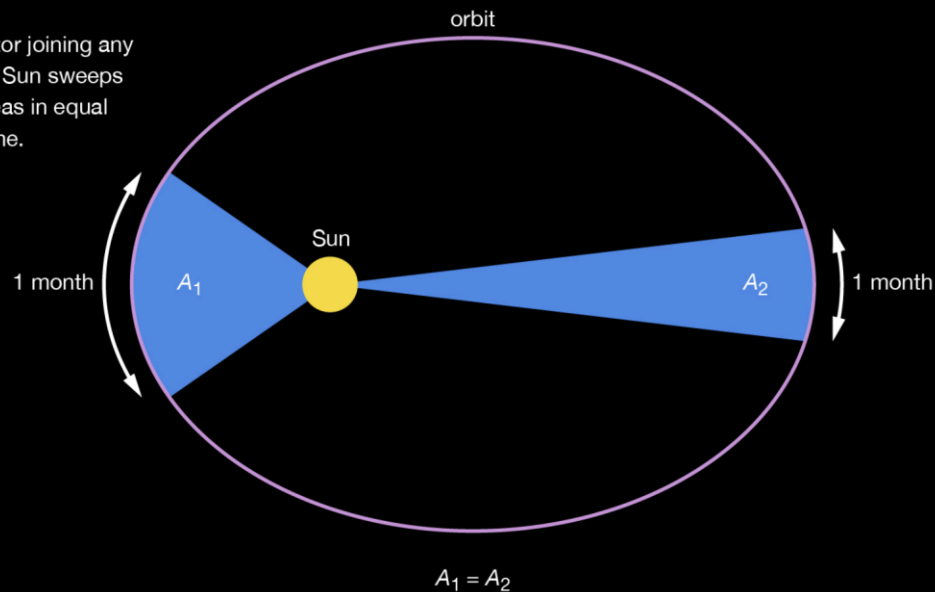
Area 1 = Area 2

© Buzzle.com

Kepler's laws of planetary motion

Second law

A radius vector joining any planet to the Sun sweeps out equal areas in equal lengths of time.



Πολικό ΣΣ



$$\Sigma F_r = ma_r$$

$$\Sigma F_\theta = ma_\theta$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad \text{and} \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -F$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0$$

$$r^2\dot{\theta} = h \quad \text{or} \quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = h$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -h \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{d\dot{r}}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{h}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left[-h \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right]$$

$$\ddot{r} = -\frac{h^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2}$



$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2 u^2}$$

$$F = \frac{GMm}{r^2} = GMmu^2$$

where M = mass of the earth

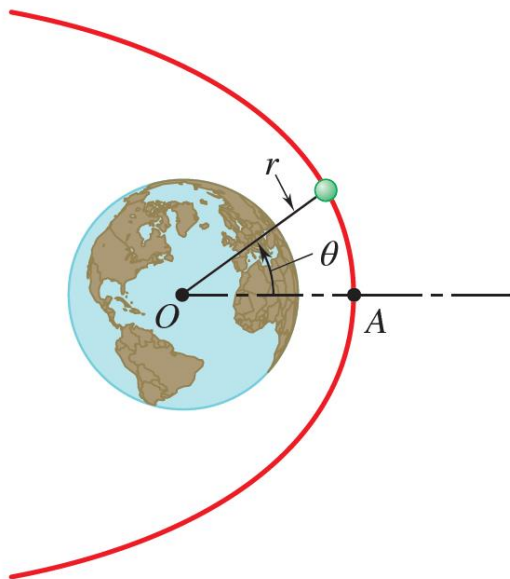
m = mass of space vehicle

r = distance from center of the earth to vehicle

$u = 1/r$

Then we obtain the differential equation

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2}$$



Note that the right-hand side is a constant.

To solve the differential equation (12.36), we add the particular solution $u = GM/h^2$ to the general solution $u = C \cos (\theta - \theta_0)$ of the corresponding homogeneous equation (i.e., the equation obtained by setting the right-hand side equal to zero). Choosing the polar axis so that $\theta_0 = 0$, we have

$$\frac{1}{r} = u = \frac{GM}{h^2} + C \cos \theta$$

Eq. (12.37) is the equation of a *conic section* (ellipse, parabola, or hyperbola) in the polar coordinates r and θ . The origin O of the coordinates, which is located at the center of the earth, is a *focus* of this conic section, and the polar axis is one of its axes of symmetry (Fig. 12.18).

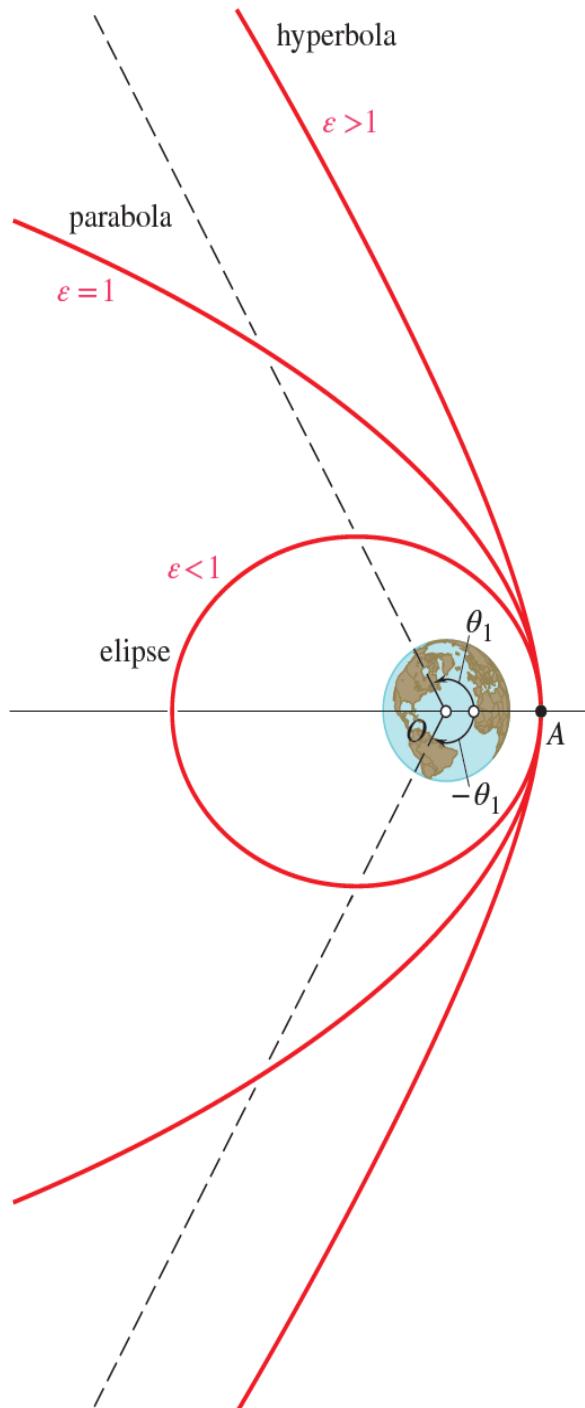
The ratio of the constants C and GM/h^2 defines the **eccentricity** ε of the conic section. If we set

$$\varepsilon = \frac{C}{GM/h^2} = \frac{Ch^2}{GM}$$

we can write Eq. (12.37) in the form

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} (1 + \varepsilon \cos \theta)$$

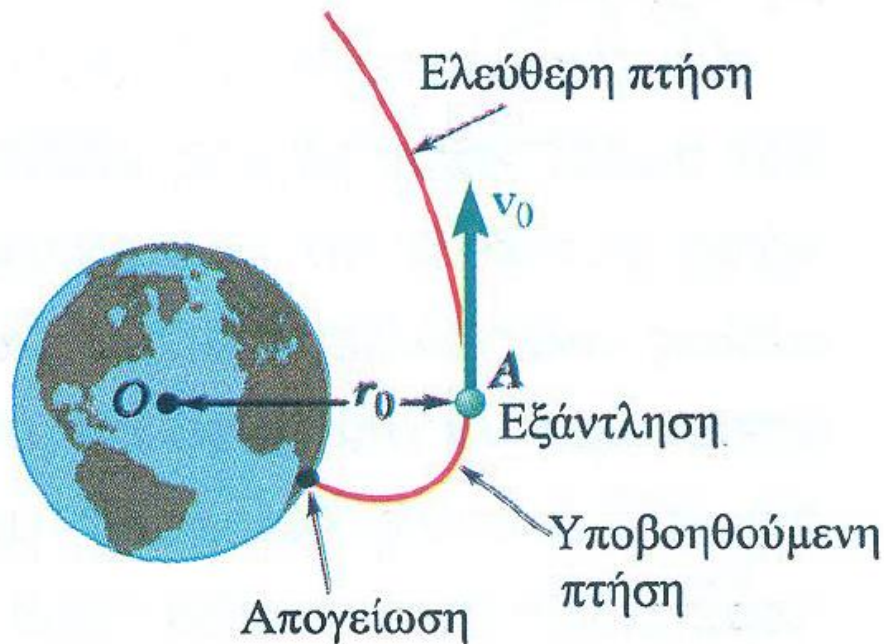
This equation represents three possible trajectories.



1. $\epsilon > 1$, or $C > GM/h^2$: There are two values θ_1 and $-\theta_1$ of the polar angle, defined by $\cos \theta_1 = -GM/Ch^2$, for which the right-hand side of Eq. (12.37) becomes zero. For both these values, the radius vector r becomes infinite; the conic section is a *hyperbola* (Fig. 12.19).
2. $\epsilon = 1$, or $C = GM/h^2$: The radius vector becomes infinite for $\theta = 180^\circ$; the conic section is a *parabola*.
3. $\epsilon < 1$, or $C < GM/h^2$: The radius vector remains finite for every value of θ ; the conic section is an *ellipse*. In the particular case when $\epsilon = C = 0$, the length of the radius vector is constant; the conic section is a *circle*.

$$\epsilon = \frac{C}{GM/h^2} = \frac{Ch^2}{GM}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2}(1 + \epsilon \cos \theta)$$



$$\frac{1}{r} = u = \frac{GM}{h^2} + C \cos \theta$$

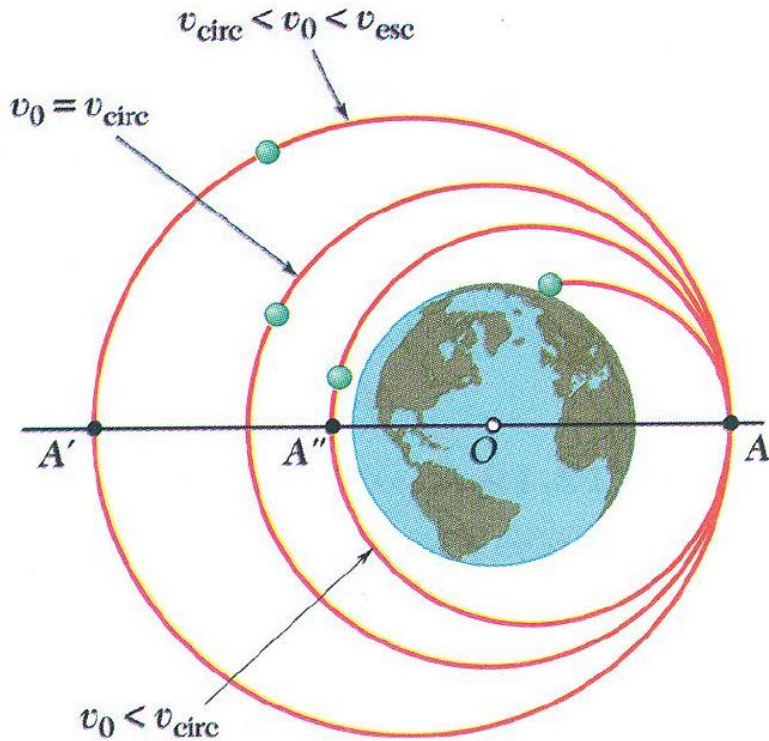
$$h = r_0^2 \dot{\theta}_0 = r_0 v_0$$

$$GM = gR^2 \quad R = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$$

Για $\theta=0, r=r_0 \rightarrow C = \frac{1}{r_0} - \frac{GM}{h^2}$

Στην παραβολική τροχιά ($\epsilon=1$) $\rightarrow C = GM/h^2: \rightarrow h^2 = \frac{GM}{C}$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$$



$$v_{\text{διαφ}} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \quad \text{ή} \quad v_{\text{διαφ}} = \sqrt{\frac{2gR^2}{r_0}}$$

Όταν $C = 0 \quad \rightarrow$

$$v_{\text{κυκλ}} = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} \quad \text{ή} \quad v_{\text{κυκλ}} = \sqrt{\frac{gR^2}{r_0}}$$

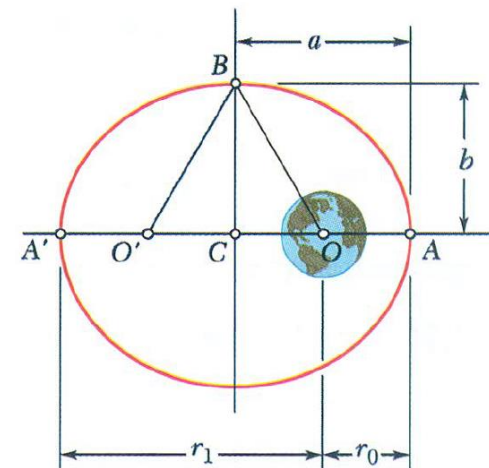
$$\tau = \frac{2\pi ab}{h}$$

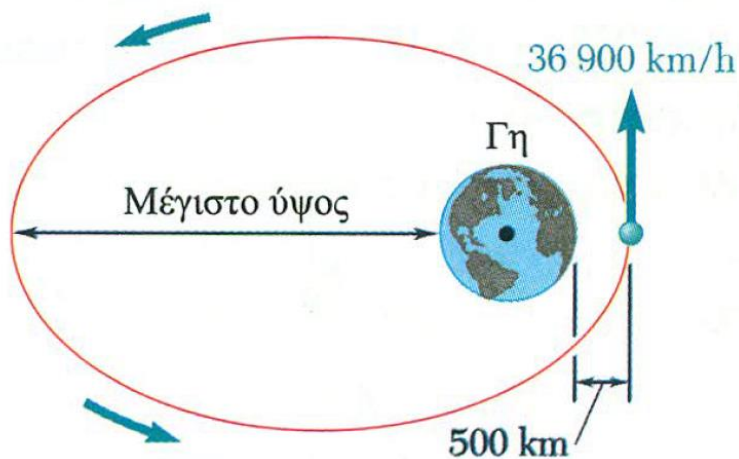
$$E = \pi ab$$

Εμβαδική ταχύτητα
= $h/2$

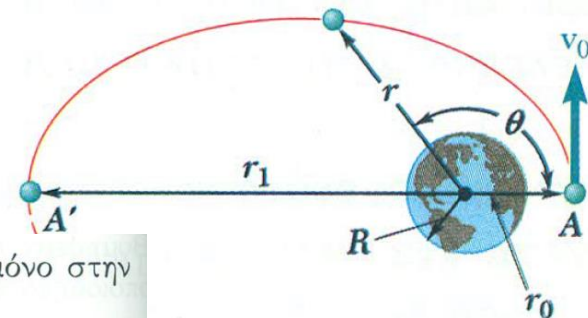
$$a = \frac{1}{2}(r_0 + r_1)$$

$$b = \sqrt{r_0 r_1}$$





Ένας δορυφόρος εκτοξεύεται σε κατεύθυνση παράλληλη στην επιφάνεια της Γης με ταχύτητα 36900 km/h από υψόμετρο 500 km. Να προσδιορίσετε (α) το μέγιστο υψόμετρο στο οποίο φθάνει ο δορυφόρος, (β) την περίοδο περιφοράς του δορυφόρου.



α. **Μέγιστο Υψόμετρο.** Μετά από τη εκτόξευσή του ο δορυφόρος, υπόκειται μόνο στην πλανητική έλξη της Γης. Επομένως, η κίνησή του διέπεται από την Εξ. (12.37), άρα

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} + C \cos \theta \quad (1)$$

Εφόσον στο σημείο εκτόξευσης A η ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας είναι μηδενική, έχετε $h = r_0 v_0$. Υπενθυμίζοντας ότι για τη Γη, $R = 6370$ km, μπορείτε να υπολογίσετε

$$r_0 = 6370 \text{ km} + 500 \text{ km} = 6870 \text{ km} = 6.87 \times 10^6 \text{ m}$$

$$v_0 = 36900 \text{ km/h} = \frac{36.9 \times 10^6 \text{ m}}{3.6 \times 10^3 \text{ s}} = 10.25 \times 10^3 \text{ m/s}$$

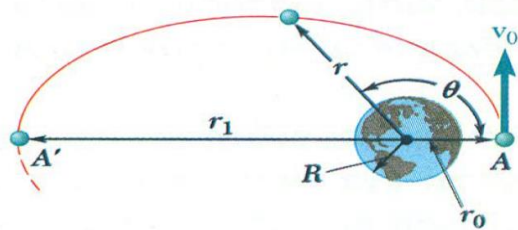
$$h = r_0 v_0 = (6.87 \times 10^6 \text{ m})(10.25 \times 10^3 \text{ m/s}) = 70.4 \times 10^{12} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$h^2 = 4.96 \times 10^{21} \text{ m}^4/\text{s}^2$$

Εφόσον $GM = gR^2$, όπου R είναι η ακτίνα της Γης, έχουμε επίσης

$$GM = gR^2 = (9.81 \text{ m/s}^2)(6.37 \times 10^6 \text{ m})^2 = 398 \times 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

$$\frac{GM}{h^2} = \frac{398 \times 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2}{4.96 \times 10^{21} \text{ m}^4/\text{s}^2} = 80.3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1}$$

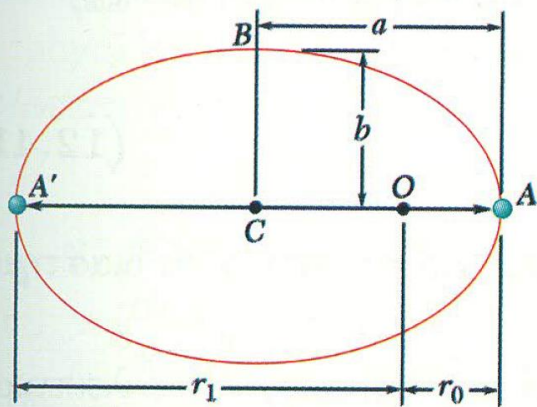


Σχ. 1 Τροχιά δορυφόρου μετά από την εκτόξευση με ταχύτητα v_0 .

Στο A' , το πιο μακρινό σημείο της τροχιάς από τη Γη, έχουμε $\theta = 180^\circ$. Χρησιμοποιώντας την Εξ. (2), μπορούμε να υπολογίσουμε την αντίστοιχη απόσταση r_1

$$\frac{1}{r_1} = 80.3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1} + (65.3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1}) \cos 180^\circ$$

$$r_1 = 66.7 \times 10^6 \text{ m} = 66700 \text{ km}$$



Σχ. 2 Μεγάλος και μικρός ημιάξονας της τροχιάς.

Αντικαθιστώντας αυτήν την τιμή στην Εξ. (1) προκύπτει

$$\frac{1}{r} = 80.3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1} + C \cos \theta \quad (2)$$

Επισημαίνουμε ότι στο σημείο A , $\theta = 0$ και $r = r_0 = 6.87 \times 10^6 \text{ m}$ (Σχ. 1). Από αυτό, μπορείτε να υπολογίσετε τη σταθερά C ως

$$\frac{1}{6.87 \times 10^6 \text{ m}} = 80.3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1} + C \cos 0^\circ \quad C = 65.3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1}$$

β. Περίοδος Περιφοράς.

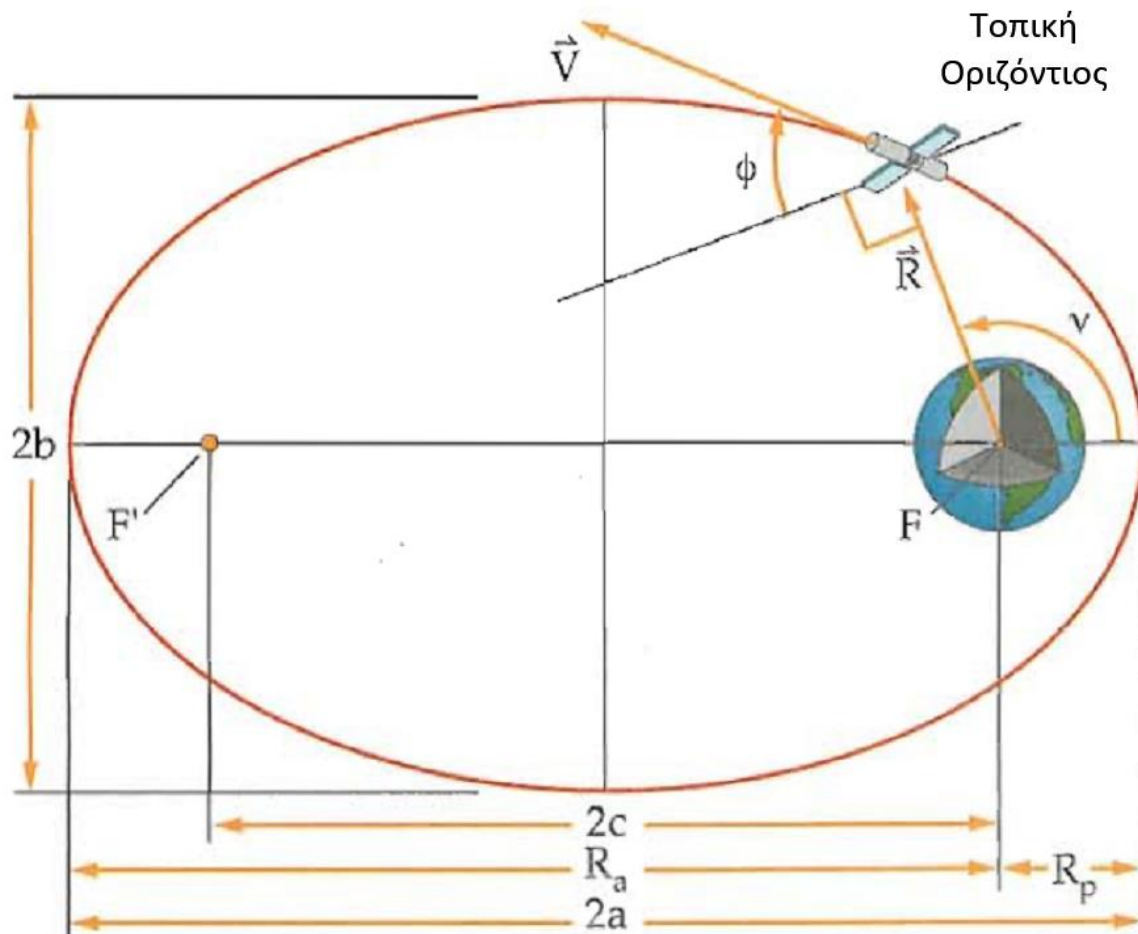
Αφού τα A και A' είναι το περίγειο και το απόγειο της ελλειπτικής τροχιάς, αντίστοιχα, χρησιμοποιούμε τις Εξ. (12.44) και (12.45) για να υπολογίσουμε το μεγάλο και το μικρό ημιάξονα της τροχιάς (Σχ. 2):

$$a = \frac{1}{2}(r_0 + r_1) = \frac{1}{2}(6.87 + 66.7)(10^6) \text{ m} = 36.8 \times 10^6 \text{ m}$$

$$b = \sqrt{r_0 r_1} = \sqrt{(6.87)(66.7)} \times (10^6) \text{ m} = 21.4 \times (10^6) \text{ m}$$

$$\tau = \frac{2\pi ab}{h} = \frac{2\pi(36.8 \times 10^6 \text{ m})(21.4 \times 10^6 \text{ m})}{70.4 \times 10^9 \text{ m}^2/\text{s}}$$

$$\tau = 70.3 \times 10^3 \text{ s} = 1171 \text{ min} = 19 \text{ h } 31 \text{ min}$$



- \vec{R} : διάνυσμα θέσης διαστημικού σκάφους ως προς το κέντρο της Γης
- \vec{V} : διάνυσμα ταχύτητας διαστημικού σκάφους
- F και F' : εστίες έλλειψης
- R_p : ακτίνα περιγείου
- R_a : ακτίνα απογείου
- $2a$: μεγάλος άξονας
- $2b$: μικρός άξονας
- $2c$: απόσταση εστιών
- a : μεγάλος ημιάξονας
- b : μικρός ημιάξονας
- ν : αληθής ανωμαλία
- ϕ : γωνία πτήσης

- R είναι η ακτίνα από την εστία της ελλείψεως (στην περίπτωση αυτή, του κέντρου της Γης) προς το διαστημικό σκάφος.
- F και F'' είναι η κύρια (κατεχόμενες) και κενή εστία. Το κέντρο της Γης βρίσκεται στην κατεχόμενη εστία.
- R_p είναι η ακτίνα της περιάψης (ακτίνα της πλησιέστερης προσέγγισης του Διαστημικού σκάφους στην κατεχόμενη εστίαση). Ονομάζεται ακτίνα του περίγειου όταν η τροχιά είναι γύρω από τη Γη
- R_a είναι η ακτίνα της απόαψης (ακτίνα της πιο μακρινής προσέγγισης του Διαστημικού σκάφους στην κατεχόμενη εστίαση). Ονομάζεται ακτίνα του απόγειου όταν η τροχιά είναι γύρω από τη Γη
- $2a$ είναι ο κύριος άξονας ή το μήκος της ελλείψεως. Το μισό από αυτό είναι " a ", ή ο μεγάλος ημιάξονας.
- $2b$ είναι ο μικρός άξονας ή το πλάτος της έλλειψης. Το μισό από αυτό είναι " b ", ή ο μικρός ημιάξονας

- $2c$ είναι η απόσταση μεταξύ των εστιών, $R_a - R_p$
- ν είναι η αληθής ανωμαλία ή η πολική γωνία που μετράτε από το περίγειο έως το διάνυσμα θέσης του διαστημοπλοίου, R , προς την κατεύθυνση της κίνησης του διαστημικού σκάφους. Υπολογίζει τη θέση του διαστημικού σκάφους σε τροχιά. Για παράδειγμα, αν το $\nu = 180^\circ$ το διαστημικό σκάφος είναι 180° από το περίγειο, βρίσκεται δηλαδή στο απόγειο. Το εύρος για την αληθής ανωμαλία είναι από 0° έως 360°
- ϕ είναι η γωνία πτήσης που μετράτε από τον τοπικό οριζόντιο άξονα στο διάνυσμα ταχύτητας V . Στο διαστημικό σκάφος η τοπικός οριζόντιος άξονας είναι κάθετος προς το διάνυσμα θέσης, R . Όταν το διαστημικό σκάφος ταξιδεύει από το περίγειο στο απόγειο, το διάνυσμα ταχύτητας του είναι πάντα πάνω από τον τοπικό ορίζοντα, έτσι $\phi > 0^\circ$. Όταν ταξιδεύει από το απόγειο στο περίγειο, το διάνυσμα ταχύτητας του είναι πάντα κάτω από τον τοπικό ορίζοντα $\phi < 0^\circ$. Η μέγιστη τιμή της γωνίας πτήσης είναι 90° . Ακριβώς πάνω στο απόγειο και στο περίγειο μιας ελλειπτικής τροχιάς, ο φορέας ταχύτητας είναι παράλληλος προς τον τοπικό ορίζοντα, έτσι $\phi = 0^\circ$.

- e είναι η εκκεντρότητα, η οποία είναι ο λόγος $2c$ προς $2a$.

$$e = \frac{2c}{2a}$$

- Η εκκεντρότητα ορίζει το σχήμα ή τον τύπο της κωνικής τομής. Η εκκεντρικότητα είναι ένας όρος που δηλώνει τον βαθμό της μη κυκλικότητας. Επειδή η κυκλική κίνηση θεωρήθηκε κάποτε τέλεια, κάθε απόκλιση ήταν ανώμαλη ή έκκεντρη. Επειδή η απόσταση ανάμεσα στις εστίες σε μια έλλειψη είναι πάντα μικρότερη από το μήκος της έλλειψης, η εκκεντρότητά της είναι μεταξύ 0 και 1. Ένας κύκλος έχει $e = 0$. Μια πολύ μεγάλη, στενή έλλειψη η εκκεντρότητα e πλησιάζει τη μονάδα. Μια παραβολή έχει $e = 1$ και μια υπερβολή $e > 1$.

Έχοντας ορίσει όλες αυτές τις γεωμετρικές παραμέτρους ας δούμε την πολική εξίσωσή του κώνου αντικαθιστώντας τις σταθερές $k_1 < a(1-e^2)$ και $k_2 = e$ (Εξ. 3-20). Έτσι, έχουμε

$$R = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}$$

όπου

R : μέτρο του διανύσματος θέσης του διαστημικού σκάφους (km)

a : μεγάλος ημιάξονας (km)

e : εκκεντρότητα

v : αληθής ανωμαλία (μοίρες ή ακτίνια)

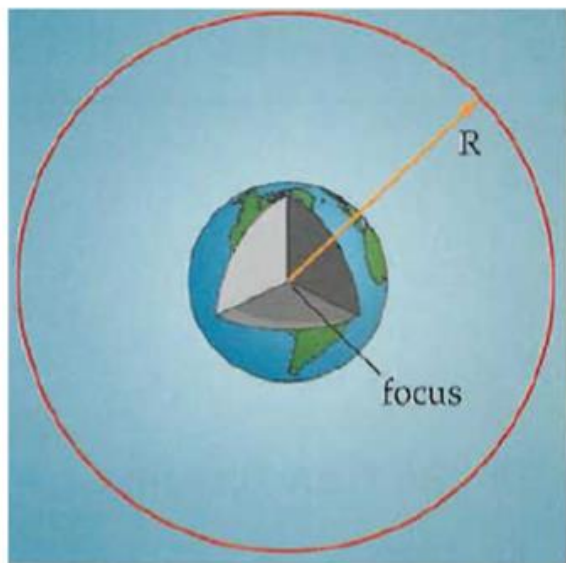
ή **πραγματική γωνία θ**

Για να υπολογίσουμε την απόσταση στο πλησιέστερο σημείο R_p και στο μακρύτερο σημείο R_a χρησιμοποιούμε την εξίσωση:

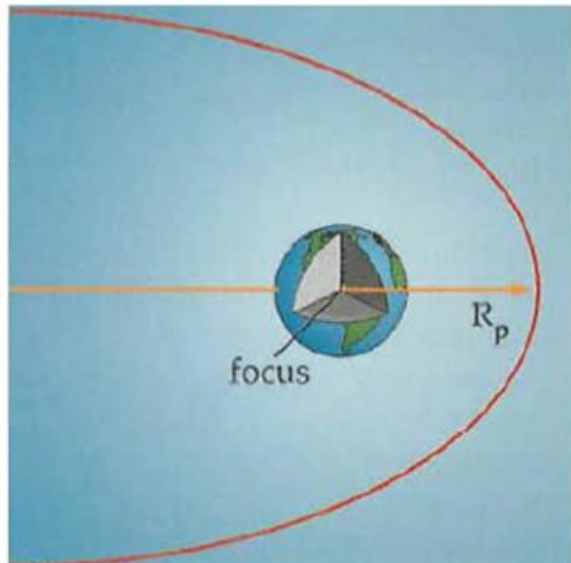
$$\text{Στο περίγειο, } v = 0^\circ, R = R_p = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(0^\circ)} = a(1 - e)$$

$$\text{Στο απόγειο, } v = 180^\circ, R = R_a = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(180^\circ)} = a(1 + e)$$

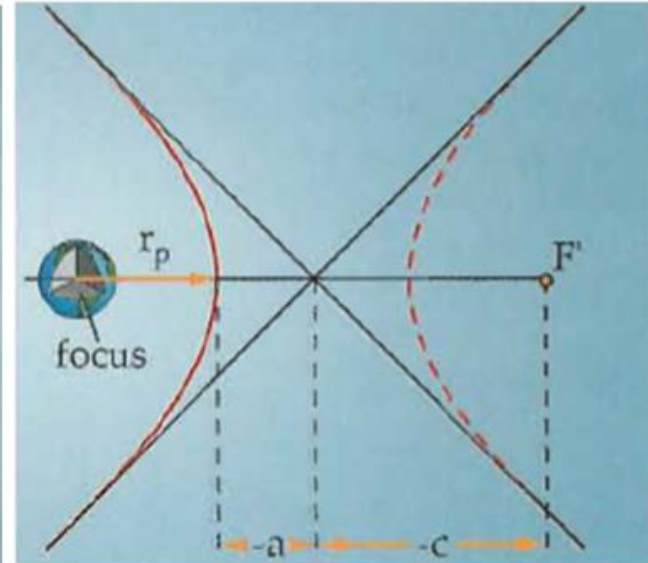
$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{R_p - R_\alpha}{R_p + R_\alpha}$$



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 33: (α) Κύκλος, ειδική περίπτωση της έλλειψης (β) Παραβολή, η τροχιά με την οποία ξεφεύγουμε από την Γη (γ) Υπερβολή, τροχιά που χρησιμοποιείται για διαπλανητικές αποστολές

- Είδαμε ότι για την κίνηση σε ένα συντηρητικό πεδίο η μηχανική ενέργεια και η γωνιακή ορμή διατηρούνται.
- Επειδή η τροχιακή κίνηση συμβαίνει σε ένα συντηρητικό βαρυτικό πεδίο, το διαστημικό σκάφος διατηρεί τη μηχανική ενέργεια και τη γωνιακή του ορμή.
- Ας δούμε λοιπόν πώς αυτές οι αρχές παρέχουν πολύτιμα εργαλεία για τη μελέτη της τροχιακής κίνησης.
- Ας θυμηθούμε τον ορισμό της μηχανικής ενέργειας όπου προσθέτουμε την δυναμική (PE) και την κινητική ενέργεια (KE).
- Μαζί, σχηματίζουν μια σχέση μεταξύ της μάζας του διαστημικού σκάφους, m , της θέσης του R , της ταχύτητας V και της τοπικής βαρυτικής παραμέτρου μ ($3.986 \times 10^5 \text{ km}^3 / \text{s}^2$ για τη Γη).

Κιν. + Δυν:

$$E = \frac{1}{2} mV^2 - \frac{\mu m}{R} = \frac{1}{2} mV^2 - \frac{GMm}{R}$$

$$\mu = GM = gR_e^2$$

- Για να γενικεύσουμε αυτή την εξίσωση, ώστε παραλείψουμε τη μάζα, διαιρούμε τις δύο πλευρές της εξίσωσης με το m .
- Έτσι, ορίζουμε μια νέα έννοια της μηχανικής ενέργειας που ονομάζεται ειδική μηχανική ενέργεια, ε , η οποία δεν εξαρτάται από τη μάζα.
- Έτσι, μπορούμε να μιλήσουμε για την ενέργεια σε μια συγκεκριμένη τροχιά, είτε το αντικείμενο σε τροχιά είναι μια μπάλα του γκολφ είτε ο Διεθνής Διαστημικός Σταθμός.
- Η ειδική μηχανική ενέργεια, ε , είναι απλώς η συνολική μηχανική ενέργεια που διαιρείται με τη μάζα ενός διαστημικού σκάφους,

$$\mu = GM = gR_e^2$$

$$\varepsilon \equiv \frac{E}{m} = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{R} = \frac{1}{2}V^2 - \frac{GM}{R}$$

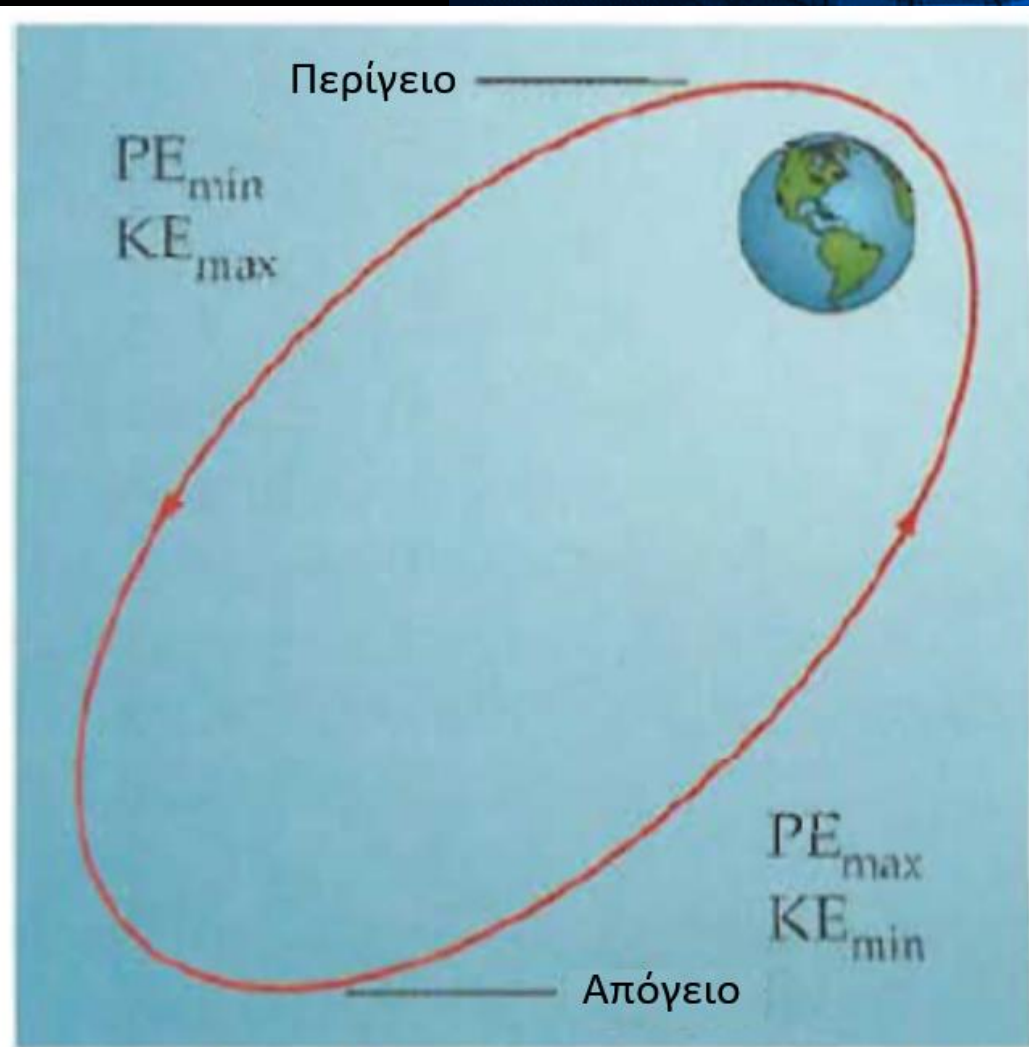
όπου

ε : ειδική μηχανική ενέργεια του διαστημικού σκάφους (km^2/s^2)

V : γραμμική ταχύτητα διαστημικού σκάφους (km/s)

μ : βαρυτική παράμετρος (km^3/s^3) = $3.98 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$ για τη Γη

R : μέτρο του διανύσματος θέσης του διαστημικού σκάφους (km)



**Μετατροπή Ενέργειας κατά την διάρκεια τροχιάς δορυφόρου,
όπου το άθροισμα μένει σταθερό**

- Μια άλλη σημαντική έννοια για να ξεφύγουμε από αυτή της τροχιακής ενέργειας είναι η σχέση μεταξύ R και V.
- Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε την ενέργεια για μια τροχιά.
- Έτσι, σε οποιαδήποτε δεδομένη θέση, R, σε αυτή την τροχιά, υπάρχει μόνο μία δυνατή ταχύτητα, V!
- Έτσι, εάν γνωρίζουμε την τροχιακή ενέργεια και το R, μπορούμε εύκολα να βρούμε την ταχύτητα σε αυτό το σημείο.
- Με μια απλή αναδιάταξη της σχέσης για την ενέργεια παίρνουμε μια εξαιρετικά χρήσιμη έκφραση για την ταχύτητα:

$$V = \sqrt{2\left(\frac{\mu}{R} + \varepsilon\right)}$$

όπου

ε : ειδική μηχανική ενέργεια του διαστημικού σκάφους (km^2/s^2)

V : γραμμική ταχύτητα διαστημικού σκάφους (km/s)

μ : βαρυτική παράμετρος (km^3/s^3) = $3.98 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$ για τη Γη

R : μέτρο του διανύσματος θέσης του διαστημικού σκάφους (km)

$$= GM = gR_e^2$$

- Χρησιμοποιούμε συχνά αυτή την εξίσωση για τον προσδιορισμό των ταχυτήτων κατά την ανάλυση των τροχιών.
- Για παράδειγμα, κατά τη διάρκεια διαστημικών αποστολών πρέπει συχνά να μεταφέρουμε διαστημικά σκάφη από μια τροχιά σε μια άλλη.
- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη σχέση για να καθορίσουμε πόσο πρέπει να αλλάξουμε την ταχύτητα για να "οδηγηθούμε" στη νέα τροχιά.
- Από τη συζήτησή μας για τις κωνικές τομές, θυμόμαστε ότι μια παράμετρος αντιπροσωπεύει τη μέση απόσταση του διαστημικού σκάφους από την κύρια εστία.
- Αυτή η παράμετρος είναι ο μεγάλος ημιάξονας a . Μπορούμε να αναπτύξουμε μια νέα σχέση για την ειδική μηχανική ενέργεια η οποία εξαρτάται μόνο από a και το μ .)

$$\mu = GM = g R_e^2$$

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2a}$$

όπου

ε : ειδική μηχανική ενέργεια του διαστημικού σκάφους (km^2/s^2)

μ : βαρυτική παράμετρος (km^3/s^3) = $3.98 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$ για τη Γη

a : μεγάλος ημιάξονας (km)

$$\tau = \frac{2\pi ab}{h}$$

$$h = \frac{H_0}{m}$$

άλλος τρόπος υπολογισμού της περιόδου

$$T = P = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha^3}{\mu}}$$

Όπου

P : περίοδος (seconds)

π : 3.14159 (αδιάστατο)

μ : βαρυτική παράμετρος (km^3/s^3) = $3.98 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$ για τη Γη

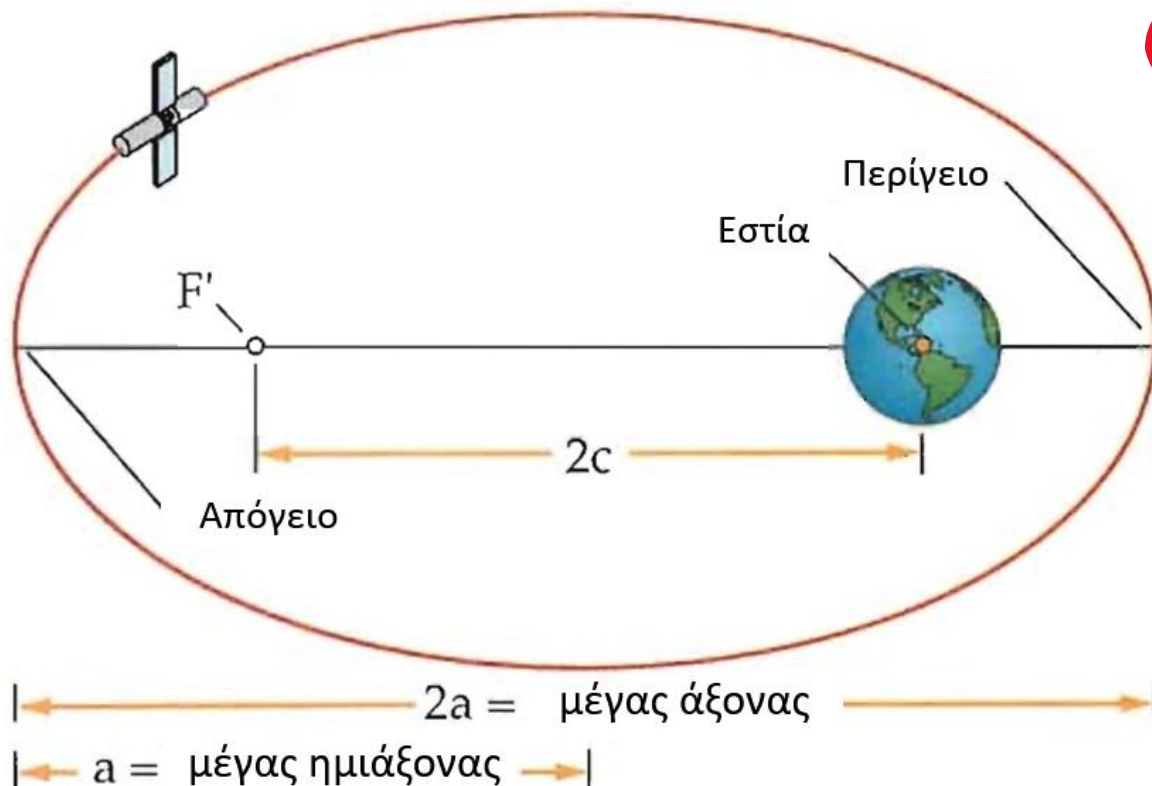
α : μεγάλος ημιάξονας (km)

(GM)

- Με τα εργαλεία που έχετε μάθει, το μόνο που μπορείτε να κάνετε είναι να σχεδιάσετε το R και το V σε ένα τρισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων και να προσπαθήσετε να απεικονίσετε την τροχιά.
- Ευτυχώς, υπάρχει ένας ευκολότερος τρόπος.
- Εκατοντάδες χρόνια πριν, ο Johannes Kepler ανέπτυξε μια μέθοδο περιγραφής των τροχιών που μας επιτρέπει να απεικονίσουμε το μέγεθος, το σχήμα και τον προσανατολισμό τους, καθώς και τη θέση του διαστημοπλοίου μέσα σε αυτές.
- Επειδή εξακολουθούμε να χρειαζόμαστε έξι μεταβλητές για να περιγράψουμε μια τροχιά και τη θέση του διαστημικού σκάφους σε αυτήν, ο Kepler όρισε έξι τροχιακά στοιχεία.
- Ονομάζονται κλασικά τροχιακά στοιχεία (ΚΤΣ)

- Θα τα χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε τα:
 - **Το τροχιακό μέγεθος, (τροχιακό στοιχείο: μεγάλος ημιάξονας a)**
 - **Το τροχιακό σχήμα, (τροχιακό στοιχείο: εκκεντρότητα e)**
 - Προσανατολισμός του τροχιακού επιπέδου στο διάστημα,
 - (τροχιακό στοιχείο: κλίση τροχιάς i)
 - (τροχιακό στοιχείο: Ορθή άνοδος ανοδικού κόμβου Ω)
 - **Τον προσανατολισμό της τροχιάς στο επίπεδο (τροχιακό στοιχείο: όρισμα του περιγείου ω) και τέλος**
 - **Τη θέση του διαστημικού σκάφους στην τροχιά (τροχιακό στοιχείο: Αληθής ανωμαλία v).**
- Ας εξετάσουμε αυτά τα στοιχεία για να δούμε πως συμβάλλει το καθένα στην κατανόηση των τροχιών

- Ο μεγάλος ημιάξονας, a , ισούται με το μισό του μεγάλου άξονα της τροχιάς, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, και το θεωρούμε το πρώτο τροχιακό στοιχείο.
- Η εκκεντρότητα (e) προσδιορίζει το σχήμα μιας τροχιάς εξετάζοντας το λόγο της απόστασης μεταξύ των δύο εστιών και του μήκους του κύριου άξονα.



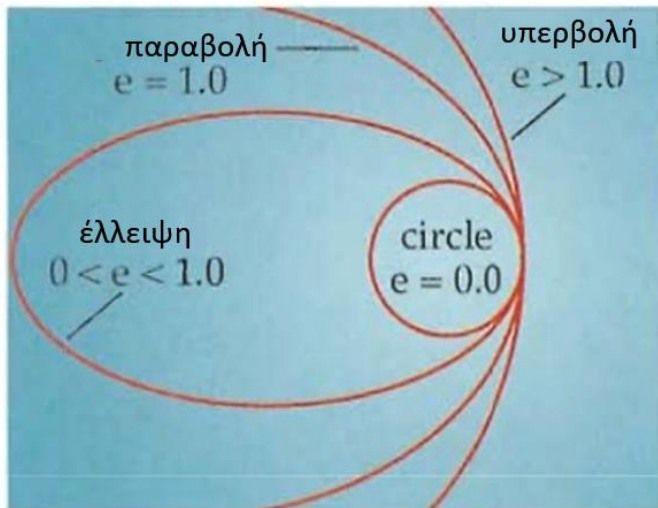
$$e = -\frac{\mu}{2a}$$

Ειδικά
μικ.
ενεργεια

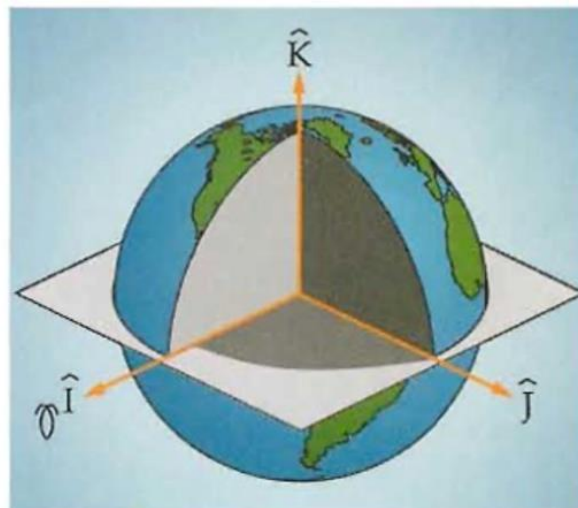
$$e = \frac{2c}{2a}$$

$$e = \frac{c}{GM/h^2} = \frac{Ch^2}{GM}$$

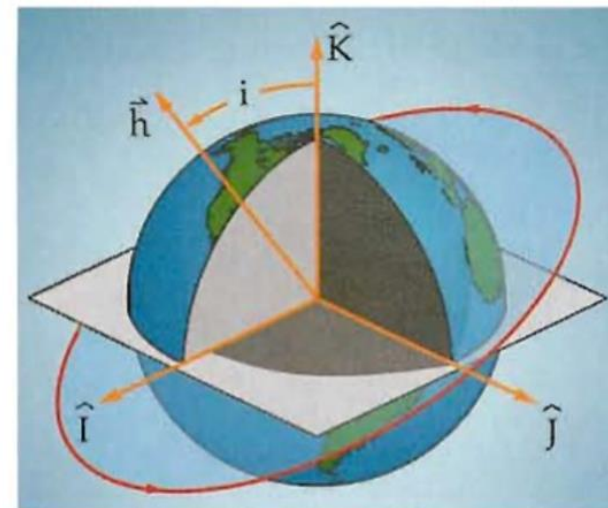
- Η πρώτη γωνία που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε τον προσανατολισμό μιας τροχιάς σε σχέση με το σύστημα συντεταγμένων μας είναι η **κλίση, i** .
- Η κλίση περιγράφει την κλίση του τροχιακού επιπέδου σε σχέση με το θεμελιώδες επίπεδο (το επίπεδο του ισημερινού σε αυτή την περίπτωση).
- Θα μπορούσαμε να περιγράψουμε αυτή την κλίση ως τη γωνία μεταξύ των δύο επιπέδων, αλλά αυτό είναι πιο δύσκολο να γίνει μαθηματικά.
- Αντίθετα, ορίζουμε την κλίση ως τη γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων.
- Το πρώτο είναι κάθετο στο τροχιακό επίπεδο και συμβολίζεται με (διάνυσμα της ειδικής γωνιακής ορμής) \vec{h} ενώ το δεύτερο είναι κάθετο στο επίπεδο του ισημερινού, \vec{K}
- Η κλίση έχει εύρος τιμών από 0° έως 180° .



(α)




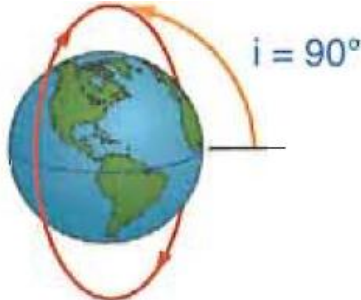
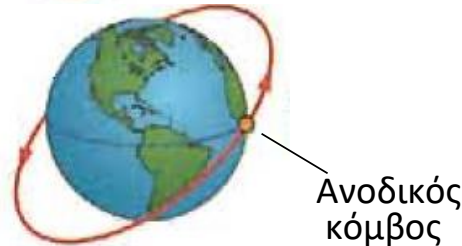

(β)



(γ)

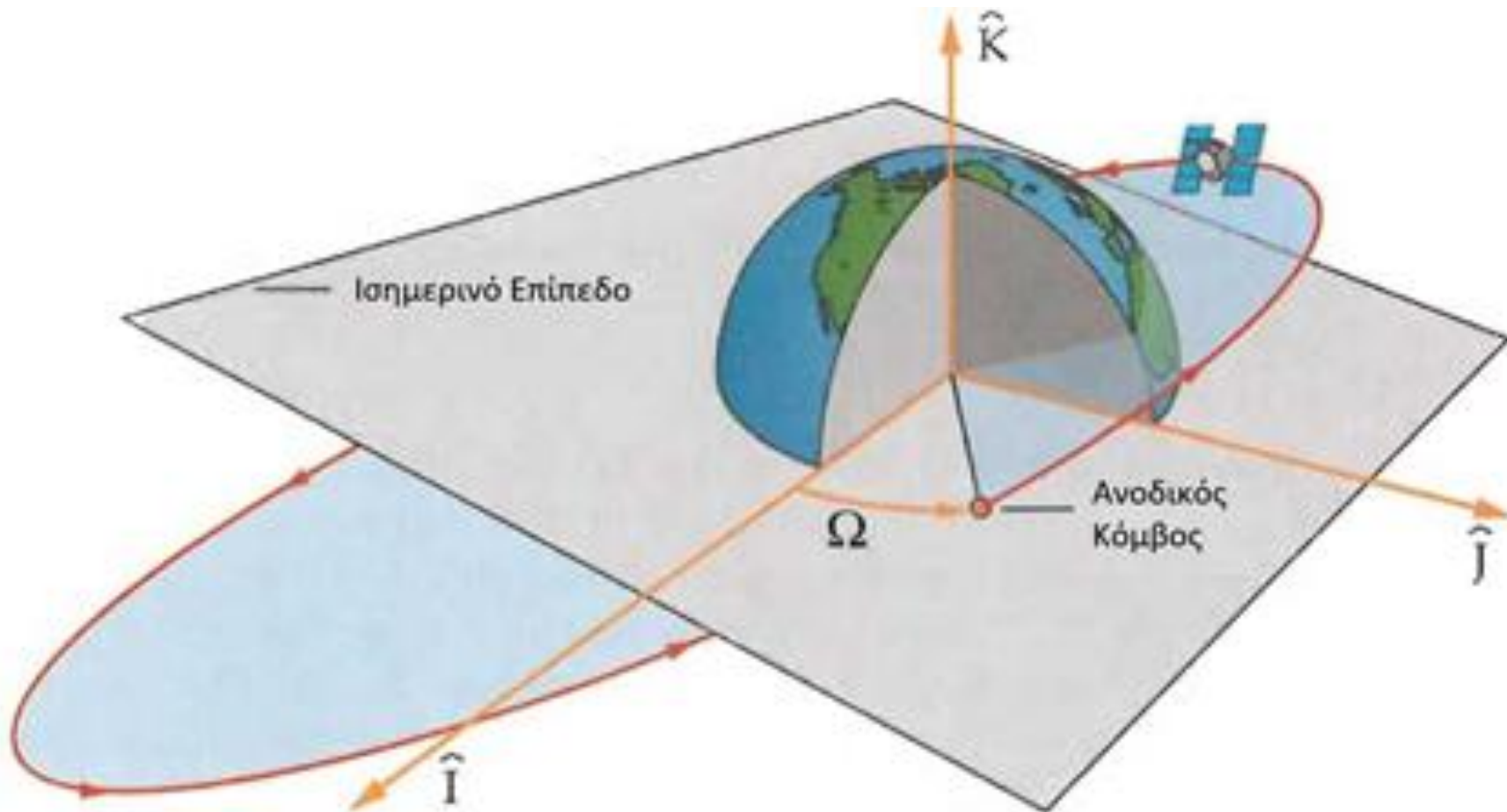
(α) Η εκκεντρότητα καθορίζει το σχήμα της τροχιάς (β) Το γεωκεντρικό-ισημερινό σύστημα συντεταγμένων (γ) Κλίση ή Έγκλιση Τροχιάς, i

- Χρησιμοποιούμε την κλίση για να ορίσουμε διάφορα είδη τροχιάς.
- Για παράδειγμα, μια τροχιά γύρω από τη Γη με κλίση 0° ή 180° αποτελεί μια ισημερινή τροχιά, επειδή παραμένει πάνω στον ισημερινό.
- Αν η τροχιά έχει $i = 90^\circ$, την ονομάζουμε πολική τροχιά επειδή περνά ακριβώς πάνω από τους δύο πόλους.
- Χρησιμοποιούμε επίσης την τιμή της κλίσης για να διακρίνουμε δύο μεγάλες κατηγορίες τροχιών.
 - Αν $0^\circ < i < 90^\circ$, το διαστημικό σκάφος κινείται με την περιστροφή της γης (σε ανατολική κατεύθυνση) και τότε λέμε ότι το διαστημικό σκάφος βρίσκεται σε ορθή τροχιά.
 - Εάν το διαστημικό σκάφος βρίσκεται σε τροχιά με κλίση $90^\circ < i < 180^\circ$, τότε κινείται αντίθετα από την περιστροφή της Γης (σε δυτική κατεύθυνση) και η τροχιά αυτή ονομάζεται οπισθοδρομική/ανάδρομη
- Έτσι, η κλίση είναι το τρίτο τροχιακό στοιχείο. Καθορίζει την κλίση του τροχιακού επιπέδου σε σχέση με το θεμελιώδες επίπεδο και μας βοηθά να κατανοήσουμε τον προσανατολισμό της τροχιάς σε σχέση με τον ισημερινό.

Κλίση	Τύπος Τροχιάς	Σχήμα
0° ή 180°	Ισημερινού	
90°	Πολική	
$0^\circ \leq i < 90^\circ$	Ορθή (με τη φορά της Γης)	
$90^\circ < i \leq 180^\circ$	Ανάδρομη (αντίθετη με την φορά της Γης)	

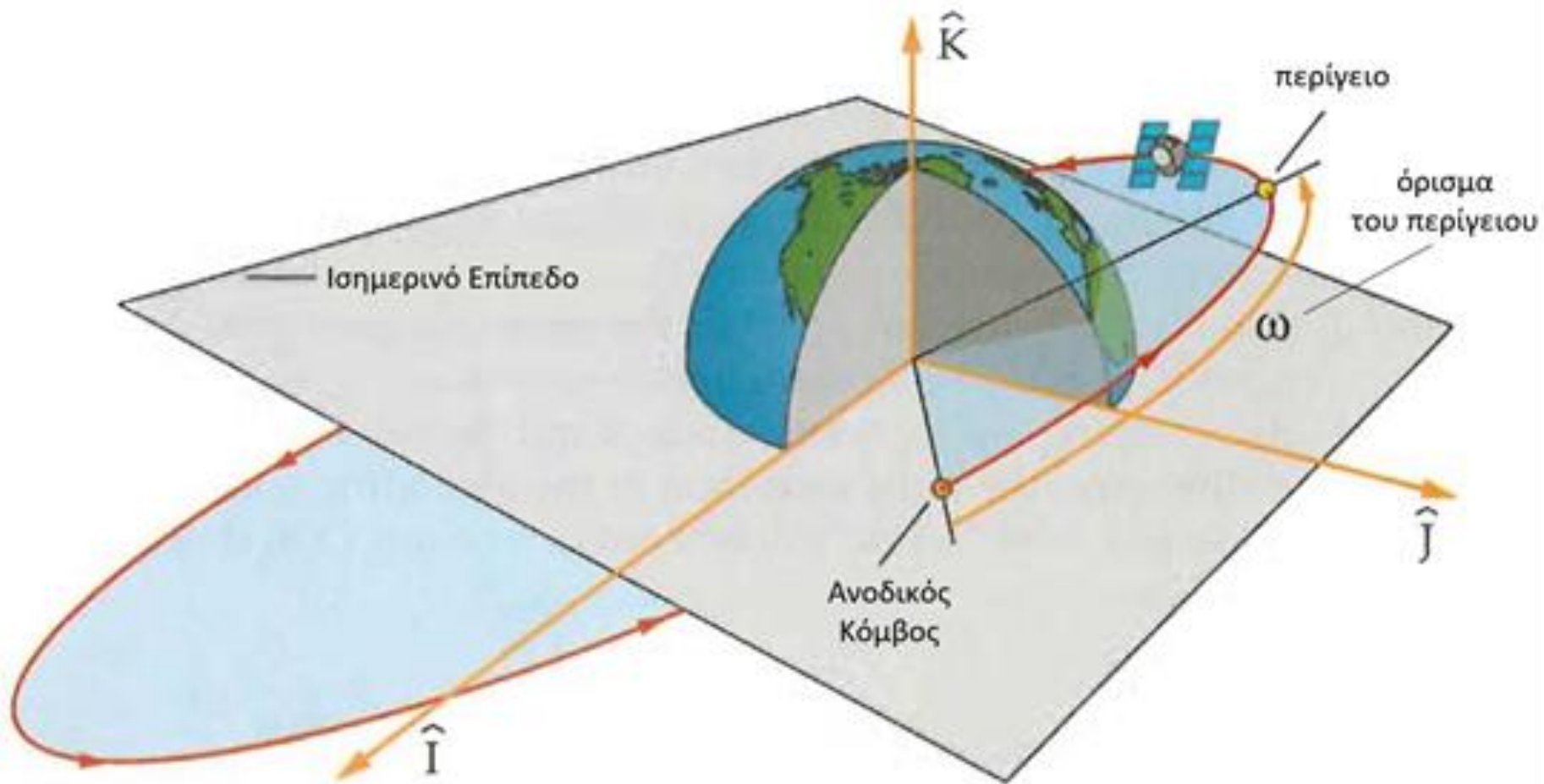
- Το τέταρτο τροχιακό στοιχείο είναι μια άλλη γωνία, η ορθή άνοδος του ανοδικού κόμβου Ω , που χρησιμοποιείται για να περιγράψει τον τροχιακό προσανατολισμό σε σχέση με την κύρια κατεύθυνση, J .
- Η ορθή άνοδος του ανοδικού κόμβου (RAAN) είναι μία γωνία, μετρούμενη από το κέντρο της Γης, από το σημείο εαρινής ισημερίας (Vernal Equinox) μέχρι το ανοδικό κόμβο (Ascending Node).
- Ο ανοδικός κόμβος είναι το σημείο του επιπέδου του ισημερινού από το οποίο περνά ένας δορυφόρος κινούμενος από νότο προς βορά
- Αντίστοιχα, ο καθοδικός κόμβος είναι το σημείο του επιπέδου του ισημερινού από το οποίο περνά ο δορυφόρος κινούμενος από βορά προς νότο.
- Ο ανοδικός και ο καθοδικός κόμβος ορίζουν μία ευθεία, η οποία είναι η τομή του επιπέδου της τροχιάς με το ισημερινό επίπεδο.

Ορθή άνοδος του ανοδικού κόμβου Ω



- Γνωρίζουμε τώρα το μέγεθος της τροχιάς, το σχήμα της, την κλίση της, το i και την γωνία Ω .
- Δεν γνωρίζουμε όμως πως η τροχιά είναι προσανατολισμένη στο επίπεδο.
- Για παράδειγμα, για μια ελλειπτική τροχιά, ίσως να θέλουμε να μάθουμε αν το περίγειο (το σημείο που βρίσκεται πιο κοντά στη Γη) βρίσκεται στο βόρειο ή το νότιο ημισφαίριο.
- Αυτό είναι σημαντικό αν θέλουμε να τραβήξουμε φωτογραφίες υψηλής ανάλυσης ενός συγκεκριμένου σημείου.
- Επομένως, χρησιμοποιούμε το πέμπτο τροχιακό στοιχείο, το όρισμα του περίγειου ω .
- Το όρισμα του περίγειου ω είναι η γωνία από την ορθή άνοδος του ανοδικού κόμβου μέχρι το περίγειο. Η γωνία μετράτε στο επίπεδο της τροχιάς και προς την κατεύθυνση της κίνησης.

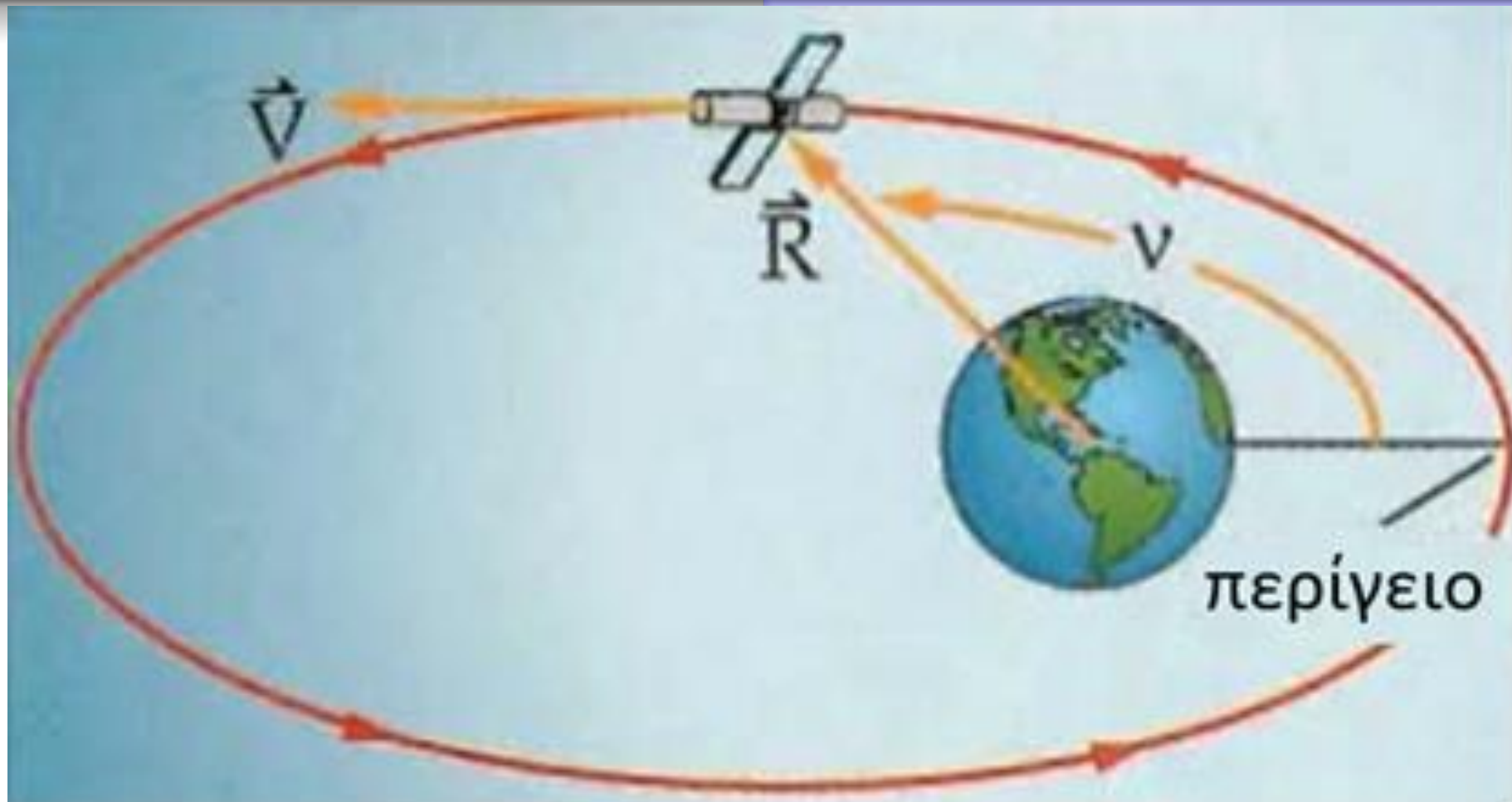
Όρισμα του περίγειου ω



- Για παράδειγμα, όταν $\omega = 0$ μοίρες, το περιγείο βρίσκεται στην ίδια θέση με το ανοδικό κόμβο.
- Αυτό σημαίνει ότι ο δορυφόρος θα βρίσκεται κοντύτερα στη γη την ίδια στιγμή που θα διασχίζει τον ισημερινό
- Όταν $\omega = 180$ μοίρες, το απόγειο θα βρίσκεται στην ίδια θέση με το καθοδικό κόμβο.
- Αυτό σημαίνει ότι ο δορυφόρος θα βρίσκεται μακρύτερα από τη Γη την ίδια στιγμή που θα διασχίζει τον ισημερινό
- Πολλές φορές, στην ξενόγλωσση βιβλιογραφία, το όρισμα του περιγείου απαντάται και με το γράμμα w .

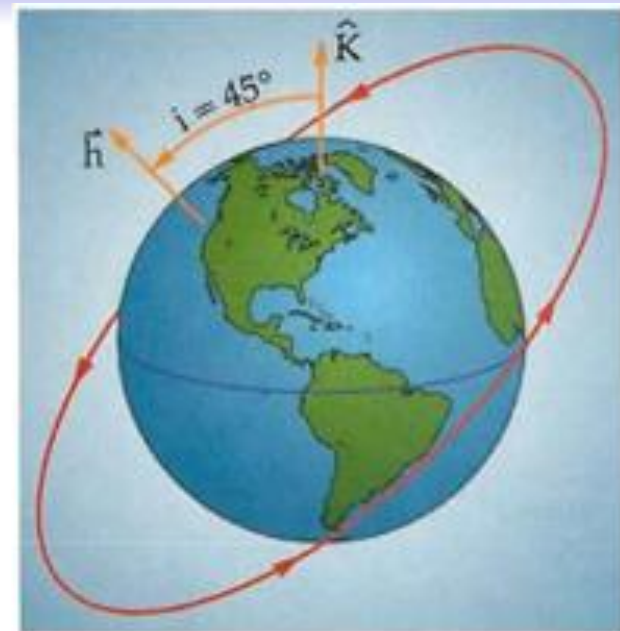
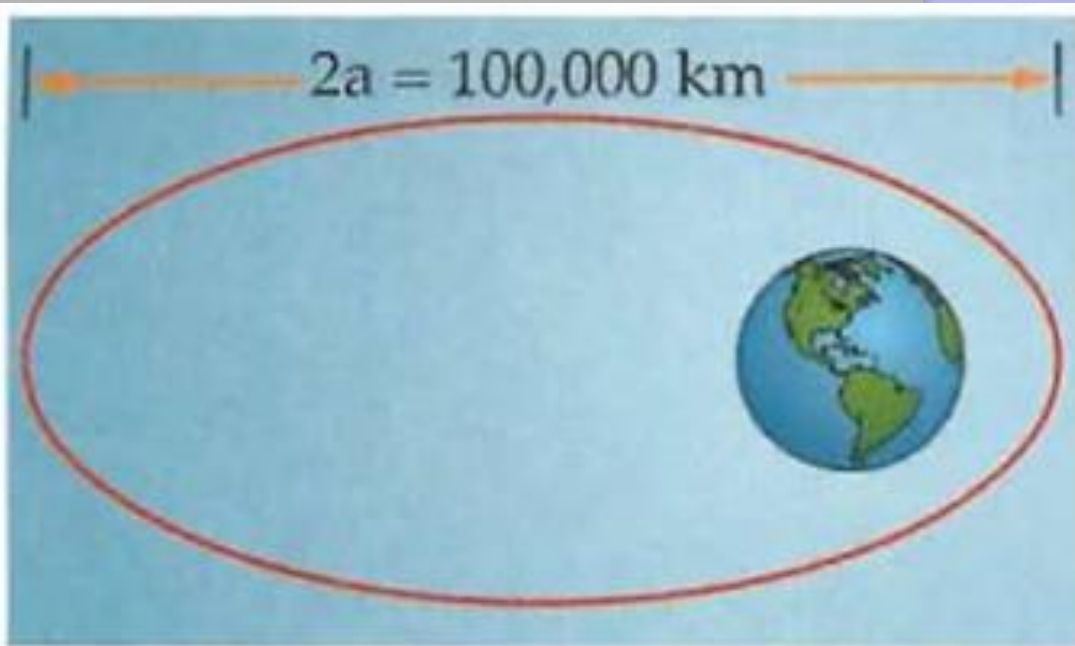
- Αφού καθορίσαμε το μέγεθος και το σχήμα της τροχιάς, μαζί με τον προσανατολισμό της (κλίση και Ω), πρέπει ακόμα να βρούμε τη θέση του διαστημοπλοίου μέσα στην τροχιά.
- Όπως έχουμε δει ήδη, μπορούμε να τη βρούμε χρησιμοποιώντας την αληθή ανωμαλία.
- Η αληθής ανωμαλία, ν είναι η πραγματική γωνία κατά την οποία μετακινήθηκε ένας δορυφόρος από την τελευταία φορά που πέρασε από το περίγειο
- Ισούται με τη μέση ανωμαλία μόνο κατά το περίγειο και το απόγειο για τις ελλειπτικές τροχιές, ενώ για τις κυκλικές τροχιές τα δύο αυτά στοιχεία ταυτίζονται.
- **Από όλα τα τροχιακά στοιχεία, μόνο η πραγματική ανωμαλία αλλάζει με το χρόνο καθώς το διαστημικό σκάφος κινείται στην τροχιά του**

Αληθής ανωμαλία, ν

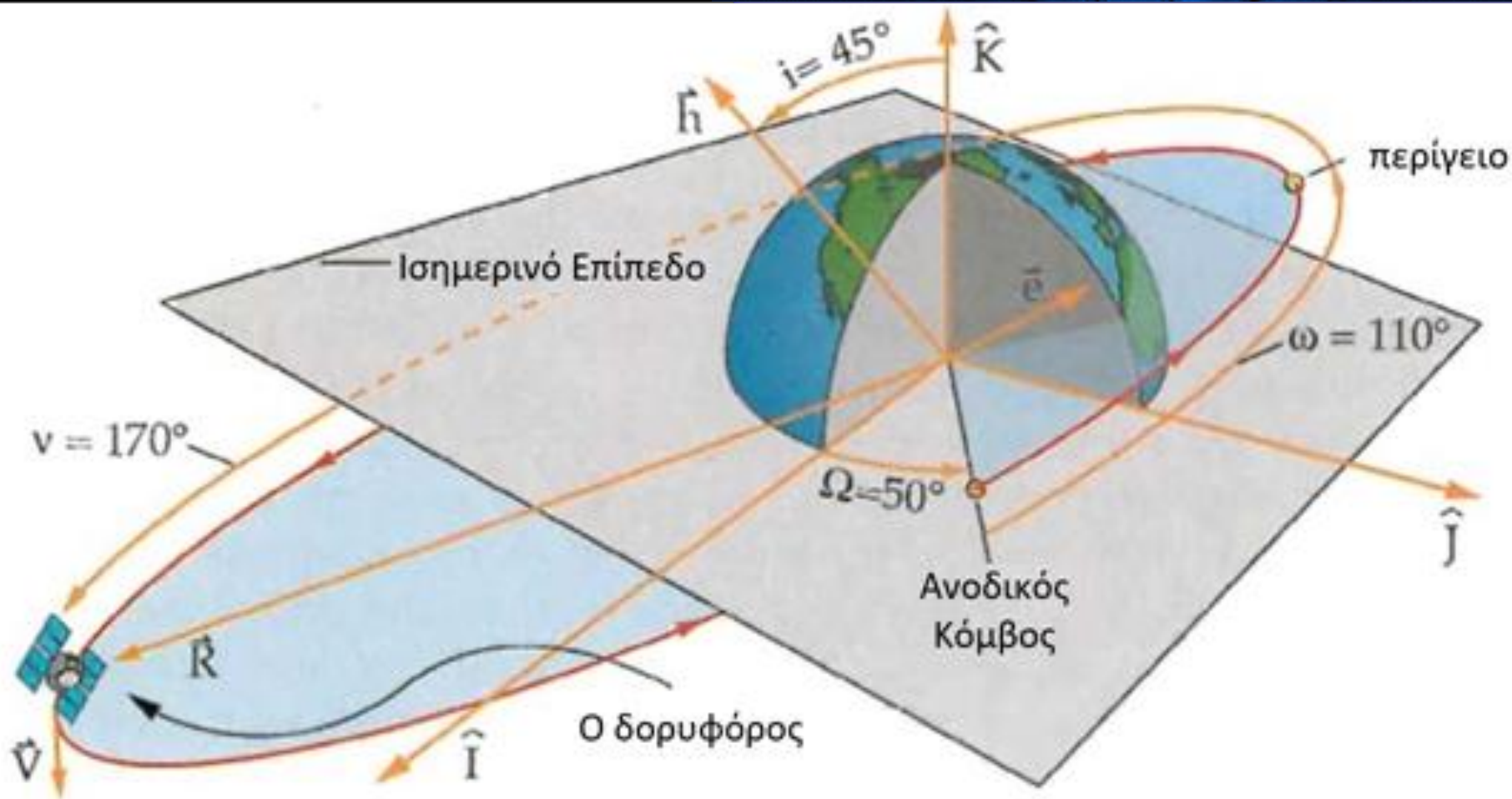


Στοιχείο	Όνομα	Χαρακτηριστικά	Τιμές (Όρια)
a	Ημιάξονας	Μέγεθος	Διάφορες
e	Εκκεντρότητα	Σχήμα της τροχιάς	e=0, κύκλος 0 < e < 1, έλλειψη
i	Κλίση ή έγκλιση	Κλίση, η γωνία μεταξύ του διανύσματος της ειδικής στροφορμής, \vec{h} , με την κάθετο στο επίπεδο του ισημερινού, \vec{K}	0 ≤ i ≤ 180°
Ω	ορθή άνοδος του ανοδικού κόμβου	Η γωνία μεταξύ του σημείου εαρινής ισημερίας (Vernal Equinox) και του ανοδικού κόμβου	0 ≤ Ω ≤ 360°
ω	όρισμα του περίγειου	Η γωνία από την ορθή άνοδος του ανοδικού κόμβου μέχρι το περίγειο	0 ≤ ω ≤ 360°
v	αληθής ανωμαλία	Η γωνία μεταξύ της θέσης του δορυφόρου μέχρι το περίγειο	0 ≤ v ≤ 360°

- Ας δούμε ένα παράδειγμα για να δούμε πώς μπορούν τα τροχιακά στοιχεία να μας βοηθήσουν να απεικονίσουμε μια τροχιά.
- Ας υποθέσουμε ότι ένας δορυφόρος επικοινωνίας έχει τα ακόλουθα τροχιακά στοιχεία
 - Μεγάλος ημιάξονας, $a = 50.000 \text{ km}$.
 - Εκκεντρότητα, $e = 0.4$
 - Κλίση, $i = 45^\circ$
 - Ορθή άνοδος του ανοδικού κόμβου, $\Omega = 50^\circ$
 - Όρισμα του περιγείου, $\omega = 110^\circ$
 - Αληθής ανωμαλία, $\nu = 170^\circ$



- Η εκκεντρότητα 0.4 δείχνει μια ελλειπτική τροχιά (είναι μεταξύ 0 και 1).
- Ο μεγάλος ημιάξονας των 50.000 χλμ. μας λέει πόσο μεγάλη είναι η τροχιά.
- Τώρα που βλέπουμε την τροχιά σε δύο διαστάσεις, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα άλλα τροχιακά στοιχεία για να απεικονίσουμε πώς είναι προσανατολισμένη η τροχιά σε τρεις διαστάσεις.
- Επειδή η γωνία κλίσης είναι 45° , γνωρίζουμε ότι το τροχιακό επίπεδο γέρνει 45° από τον ισημερινό.



- Βρίσκοντας την τροχιά. Η θέση του δορυφόρου μέσω των ΚΣΤ: $a = 50000 \text{ km}$, $i = 45^\circ$, $e = 0.4$, $\Omega = 50^\circ$, $\omega = 110^\circ$, $\nu = 170^\circ$

- Σε αυτήν την ενότητα θα μάθετε να:
 - Εξηγείτε τις πιο ενεργειακά αποδοτικές μεθόδους κίνησης μεταξύ δύο σημείων – μεταφορά Hohmann
 - Προσδιορίζετε την απαιτούμενη μεταβολή ταχύτητας ΔV για την εκτέλεση μιας μεταφοράς Hohmann μεταξύ δύο τροχιών
 - Εξηγείτε τις αλλαγές στο τροχιακό επίπεδο και τον τρόπο να τις επιτύχετε
 - Εξηγείτε τα τροχιακά ραντεβού και να προσδιορίζετε την απαιτούμενη μεταβολή ταχύτητας ΔV καθώς και τη χρονική στιγμή εκκίνησης της μεταφοράς

- Ένα διαστημικό σκάφος σπάνια παραμένει για μεγάλο χρονικό διάστημα σε μία μόνο τροχιά.
- Σχεδόν σε κάθε αποστολή στο διάστημα, υπάρχει η ανάγκη για αλλαγή ενός ή περισσοτέρων τροχιακών στοιχείων τουλάχιστον μία φορά.
- Οι δορυφόροι επικοινωνίας, για παράδειγμα, ποτέ δεν τοποθετούνται εξ αρχής στις γεωστατικές τους θέσεις.
- Αρχικά μεταβαίνουν σε χαμηλή τροχιά (περίπου 300 χλμ.) πριν μεταφερθούν σε γεωστατική με υψόμετρο (περίπου 35.780 χλμ.).
- Ενώ συμβαίνει αυτή η μεγάλη μεταβολή στον μεγάλο ημιάξονα, ένας ακόμα ελιγμός μειώνει την κλίση του δορυφόρου σε 0° .
- Ακόμη και μετά την άφιξή τους στην τροχιά της αποστολής τους, πρέπει να προσαρμόζονται τακτικά για να παραμείνουν στη θέση τους.
- Σε άλλες αποστολές, τα διαστημικά σκάφη χρειάζεται να εκτελέσουν ελιγμούς για να συναντηθούν με κάποιο άλλο διαστημόπλοιο, όπως το διαστημικό λεωφορείο που συναντήθηκε με το διαστημικό τηλεσκόπιο Hubble για να το επισκευάσει 5 φορές από το 1993-2009

2012-07-05 12:18 EchoStar XVII



0.00km/s

18,368km

2012-07-05 12:18 EchoStar XVII



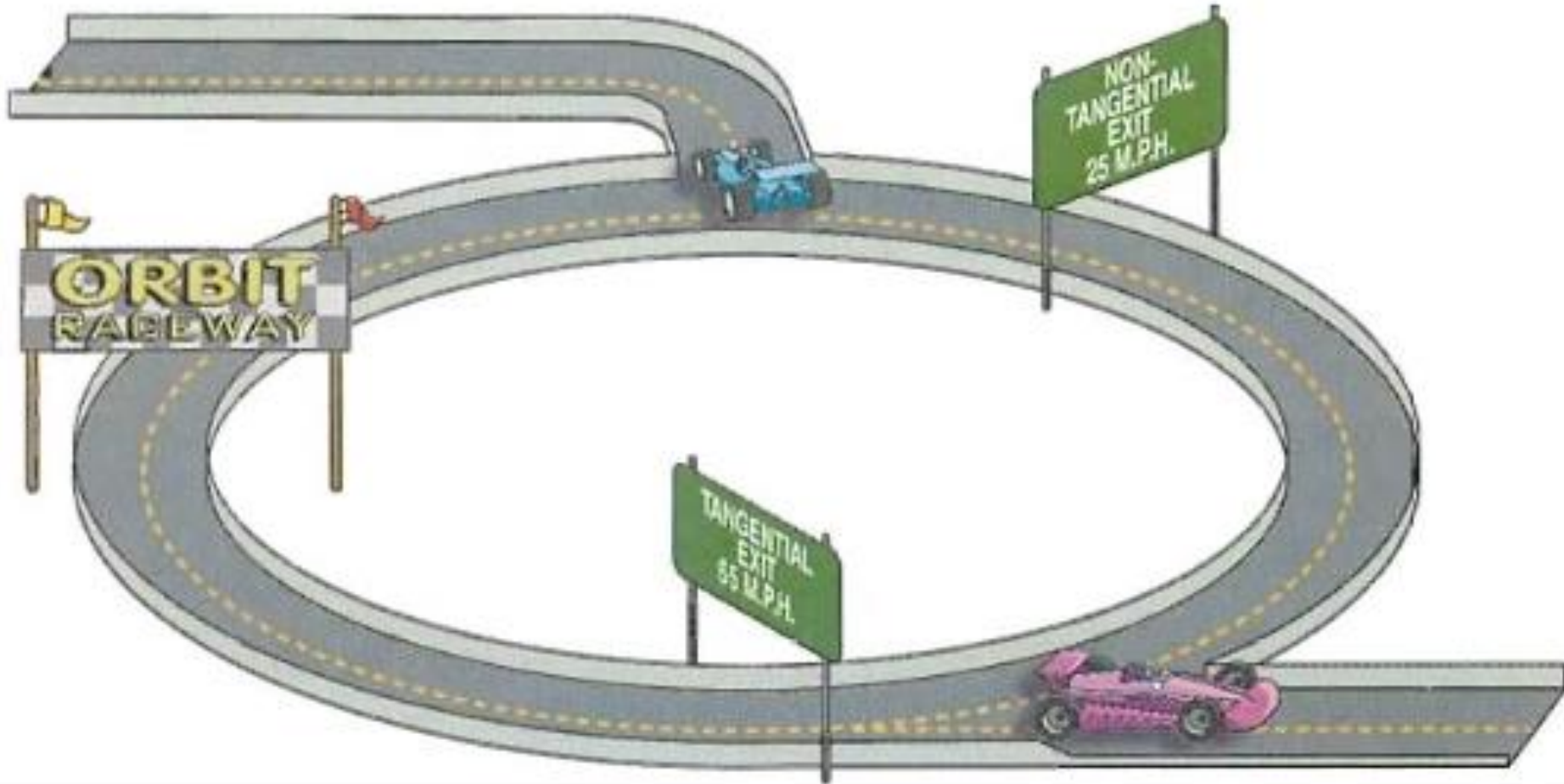
0.00km/s

18,368km

- Όπως θα δούμε σε αυτήν την ενότητα, αυτοί οι τροχιακοί ελιγμοί δεν είναι τόσο απλοί.
- Επειδή ένα διαστημικό σκάφος βρίσκεται πάντα στο βαρυτικό πεδίο κάποιου σώματος (όπως η Γη ή ο Ήλιος), πρέπει να ακολουθήσει τους νόμους περί τροχιακής κίνησης για να μεταφερθεί από ένα μέρος σε ένα άλλο.
- Σε αυτήν την ενότητα θα χρησιμοποιήσουμε το πρόβλημα των δύο σωμάτων για να μάθουμε για τους ελιγμούς στο διάστημα.
- Θα εξηγήσουμε τον **οικονομικότερο τρόπο** μετακίνησης από μια τροχιά σε μια άλλη, θα βρούμε πώς και πότε πρέπει να αλλάζουμε το τροχιακό επίπεδο ενός διαστημικού σκάφους και τέλος θα περιγράψουμε ό,τι απαιτείται για να βρεθούν δύο διαστημόπλοια μαζί με ασφάλεια σε τροχιά.

- Σε αυτή την ενότητα θα μάθετε να:
 - Περιγράψετε τα βήματα μιας μεταφοράς Hohmann, τον πιο αποδοτικό-ως προς καύσιμα- τρόπο για μεταφορά από μία τροχιά σε μία άλλη στο ίδιο επίπεδο.
 - Προσδιορίζετε την απαιτούμενη μεταβολή ταχύτητας ώστε να υλοποιηθεί μια μεταφορά Hohmann

- Το 1925, ο Γερμανός μηχανικός, Walter Hohmann, επινόησε μια μέθοδο εξοικονόμησης καυσίμων για τη μεταφορά μεταξύ τροχιών.
- Αυτή η μέθοδος, που ονομάζεται Μεταφορά Hohmann, χρησιμοποιεί μια ελλειπτική τροχιά μεταφοράς που εφάπτεται στις αρχικές και τελικές τροχιές.
- Ας φανταστούμε ότι οδηγούμε ένα αυτοκίνητο γύρω από μια πίστα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 6-3.



Οι ελιγμοί (μανούβρες) δορυφόρων ως μία 'πίστα' με αγωνιστικά αυτοκίνητα

- Η προσπάθεια που απαιτείται για να βγείτε από την πίστα εξαρτάται από τη θέση και τον προσανατολισμό της εξόδου.
- Για παράδειγμα, αν η έξοδος εφάπτεται στην τροχιά σας, τότε θα βγείτε εύκολα - απλά ισιώνετε τις ρόδες.
- Αντίθετα αν η έξοδος είναι κάθετη στην πίστα, πρέπει να επιβραδύνετε πολύ, ίσως να σταματήσετε και έπειτα στρίψετε.
- Με την εφαπτόμενη έξοδο χρειάζεται να αλλάξετε μόνο το μέγεθος της ταχύτητάς σας, πατώντας απλά τα φρένα.
- Με την κάθετη έξοδο, πρέπει γρήγορα να αλλάξετε το μέγεθος και την κατεύθυνση της ταχύτητάς σας που είναι δύσκολο να γίνει χωρίς να αναποδογυρίσετε το αυτοκίνητο σας

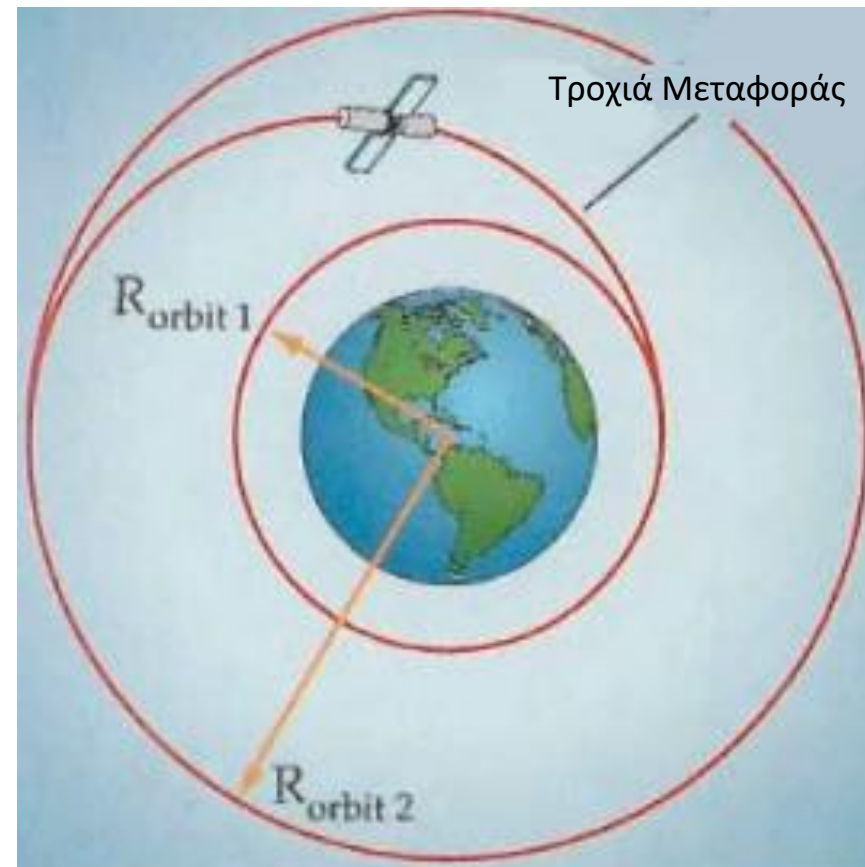
- Η μεταφορά Hohmann εφαρμόζει αυτό το απλό παράδειγμα της πίστας σε τροχιές.
- Χρησιμοποιώντας εισόδους και εξόδους που εφάπτονται στις αρχικές και τελικές τροχιές μας, αλλάζουμε τις τροχιές χρησιμοποιώντας όσο το δυνατόν λιγότερη ενέργεια.
- Για τους μηχανικούς, η εξοικονόμηση ενέργειας σημαίνει εξοικονόμηση καυσίμων, κάτι που είναι πολύτιμο για τις αποστολές στο διάστημα.
- Εξ ορισμού, περιορίζουμε τις Μεταφορές Hohmann σε:
 - Τροχιές στο ίδιο επίπεδο (συνεπίπεδες τροχιές)
 - Τροχιές με τους μεγάλους άξονες ευθυγραμμισμένους (κυκλικές τροχιές)
 - Στιγμαίειες μεταβολές ταχύτητας (ΔV s) εφαιπτόμενες στις αρχικές και τελικές τροχιές

- Θα ασχοληθούμε αργότερα με το πρόβλημα της αλλαγής μεταξύ τροχιακών επιπέδων.
- Οι κυκλικές τροχιές έχουν τους μεγάλους άξονες τους (γραμμή των αψίδων) ευθυγραμμισμένους μεταξύ τους.
- Επίσης, στην περίπτωση των στιγμιαίων αλλαγών ταχύτητας υποθέτουμε ότι ο χρόνος που ο κινητήρας λειτουργεί είναι πολύ μικρός σε σύγκριση με τον χρόνο ολοκλήρωσης της μεταφοράς Hohmann.
- Η εφαπτομενική αλλαγή ταχύτητας σημαίνει ότι το διαστημικό σκάφος αλλάζει το μέτρο του διανύσματος ταχύτητας, αλλά όχι κατεύθυνση του για να ξεκινήσει και να τελειώσει η μεταφορά Hohmann.
- Για να γίνει αυτό, το διαστημικό σκάφος θα πρέπει να λειτουργήσει τις μηχανές του σε διεύθυνση παράλληλη με το διάνυσμα ταχύτητας του

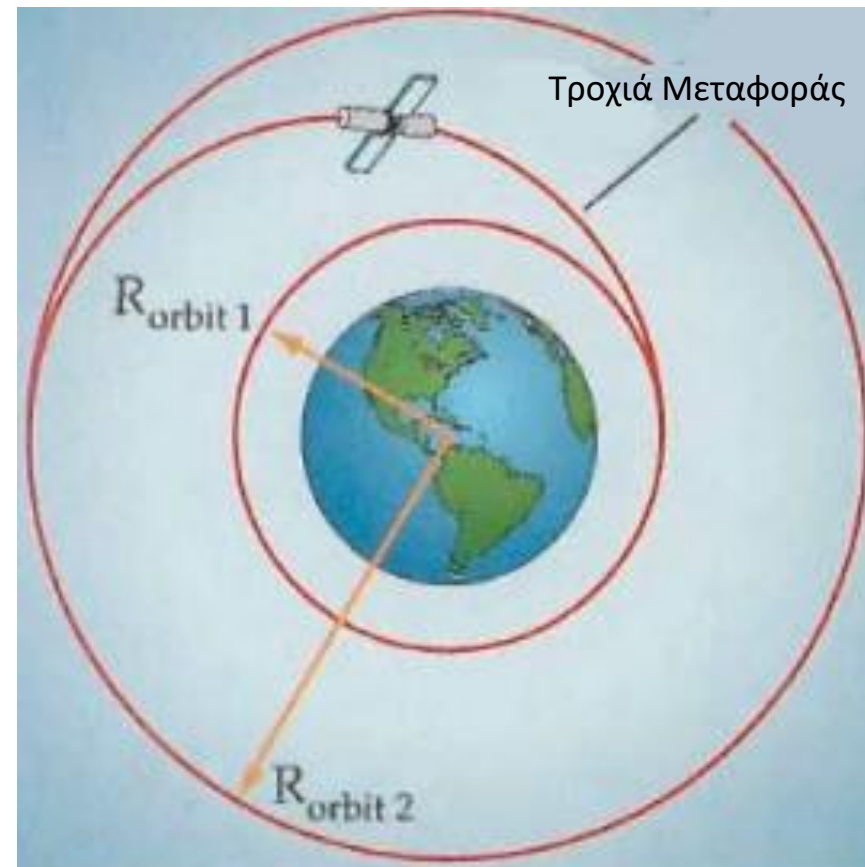
- Ας εξετάσουμε πως αυτές οι αλλαγές ταχύτητας επηρεάζουν την τροχιά.
- Υποθέτοντας ότι όλα τα ΔV εμφανίζονται σχεδόν στιγμιαία, χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα από το πρόβλημα δύο σωμάτων.
- Κάθε φορά που αυξάνουμε ή ελαττώνουμε ταχύτητα, αλλάζουμε την ειδική μηχανική ενέργεια της τροχιάς, ε , και επομένως το μέγεθος ή αλλιώς τον μεγάλο ημιάξονα της, a .
- Θυμηθείτε ότι αυτές οι ποσότητες συνδέονται ως:

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2a}$$

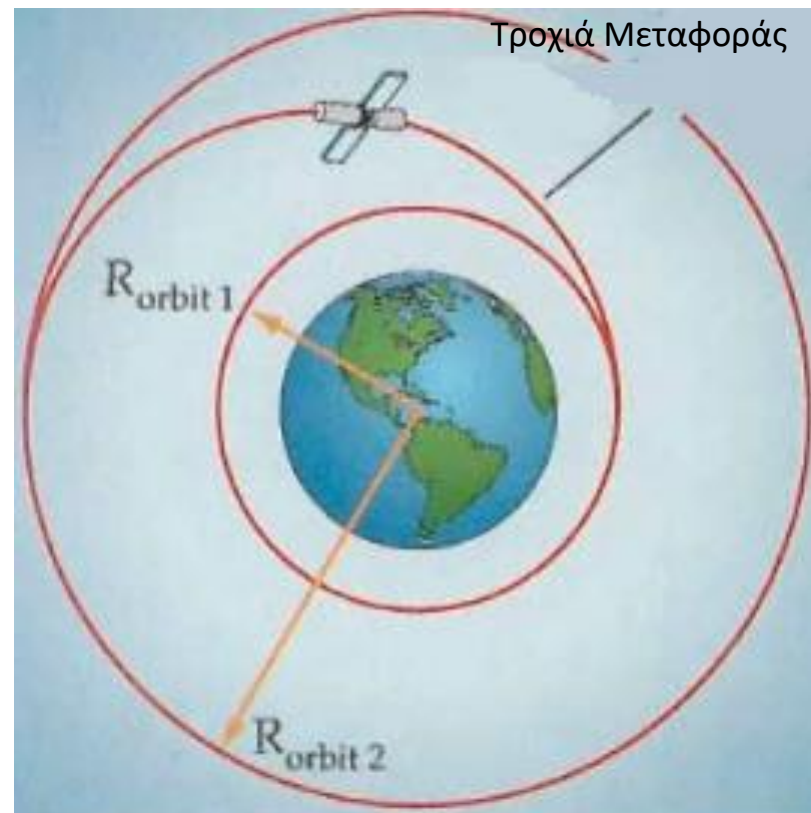
- Εάν θελήσουμε να μετακινήσουμε ένα διαστημικό σκάφος σε υψηλότερη τροχιά, πρέπει να αυξήσουμε τον μεγάλο ημιάξονα (προσθήκη ενέργειας στην τροχιά) αυξάνοντας την ταχύτητα.
- Από την άλλη πλευρά, για να μετακινήσουμε το διαστημικό σκάφος σε μια χαμηλότερη τροχιά, θα πρέπει να μειώσουμε την ενέργεια και άρα την ταχύτητα.



- Κατά τη διάρκεια μιας αποστολής, μερικές φορές πρέπει να μεταφέρουμε ένα διαστημικό σκάφος από μια τροχιά (τροχιά 1) σε μια άλλη (τροχιά 2).
- Το διαστημικό σκάφος πρέπει να τεθεί σε μια τροχιά μεταφοράς, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
- Για να πάμε από την τροχιά 1 στην τροχιά μεταφοράς, αλλάζουμε την ενέργεια της τροχιάς (μεταβάλλοντας την ταχύτητα του διαστημικού σκάφους κατά ΔV_1).



- Στη συνέχεια, όταν το διαστημικό σκάφος φτάσει στην τροχιά 2, αλλάζουμε και πάλι την ενέργειά του (αλλάζοντας την ταχύτητά του κατά ΔV_2).
- Εάν δεν αλλάξουμε τη δεύτερη φορά την ενέργεια του, το διαστημικό σκάφος θα παραμείνει στην τροχιά μεταφοράς επ' αόριστον, περνώντας από το σημείο που ξεκίνησε στην τροχιά 1, και το σημείο της τροχιάς 2.
- Έτσι, ένας πλήρης ελιγμός απαιτεί δύο ξεχωριστές ενεργειακές αλλαγές που επιτυγχάνεται με την αλλαγή των τροχιακών ταχυτήτων (ΔV_1 και ΔV_2).



- Το ΔV αντιπροσωπεύει την αλλαγή από την τρέχουσα ταχύτητα σε μια επιθυμητή ταχύτητα:

$$\Delta V = |V_{\text{επιθ}} - V_{\text{τρεχ}}|$$

- Παρατηρήστε ότι παίρνουμε την απόλυτη τιμή αυτής της διαφοράς επειδή θέλουμε να γνωρίζουμε το μέτρο της μεταβολής της ταχύτητας, ώστε να μπορούμε να υπολογίσουμε την ενέργεια και επομένως το απαραίτητο καύσιμο.
- Δεν ανησυχούμε για το πρόσημο του ΔV επειδή χρειαζόμαστε καύσιμο είτε το διαστημικό σκάφος επιταχύνει είτε επιβραδύνει.
- Αν ΔV_1 είναι η ταχύτητα που μεταφέρει το διαστημικό σκάφος από την τροχιά 1 στην τροχιά μεταφοράς τότε

$$\Delta V_1 = |V_{\text{μεταφ}_1} - V_{\text{τροχια}_1}|$$

ΔV_1 : μεταβολή ταχύτητας για αλλαγή από τροχιά₁ σε τροχιά μεταφοράς (km/s)

$V_{\text{μεταφ}_1}$: ταχύτητα στην τροχιά μεταφοράς σε ακτίνα της τροχιά₁ (km/s)

$V_{\text{τροχια}_1}$: ταχύτητα στην τροχιά₁ (km/s)

ΔV_2 είναι η μεταβολή ταχύτητας ώστε να μεταφερθεί το διαστημικό σκάφος από την τροχιά μεταφοράς στην τροχιά₂

$$\Delta V_2 = |V_{\text{τροχια}_2} - V_{\text{μεταφ}_2}|$$

Όπου

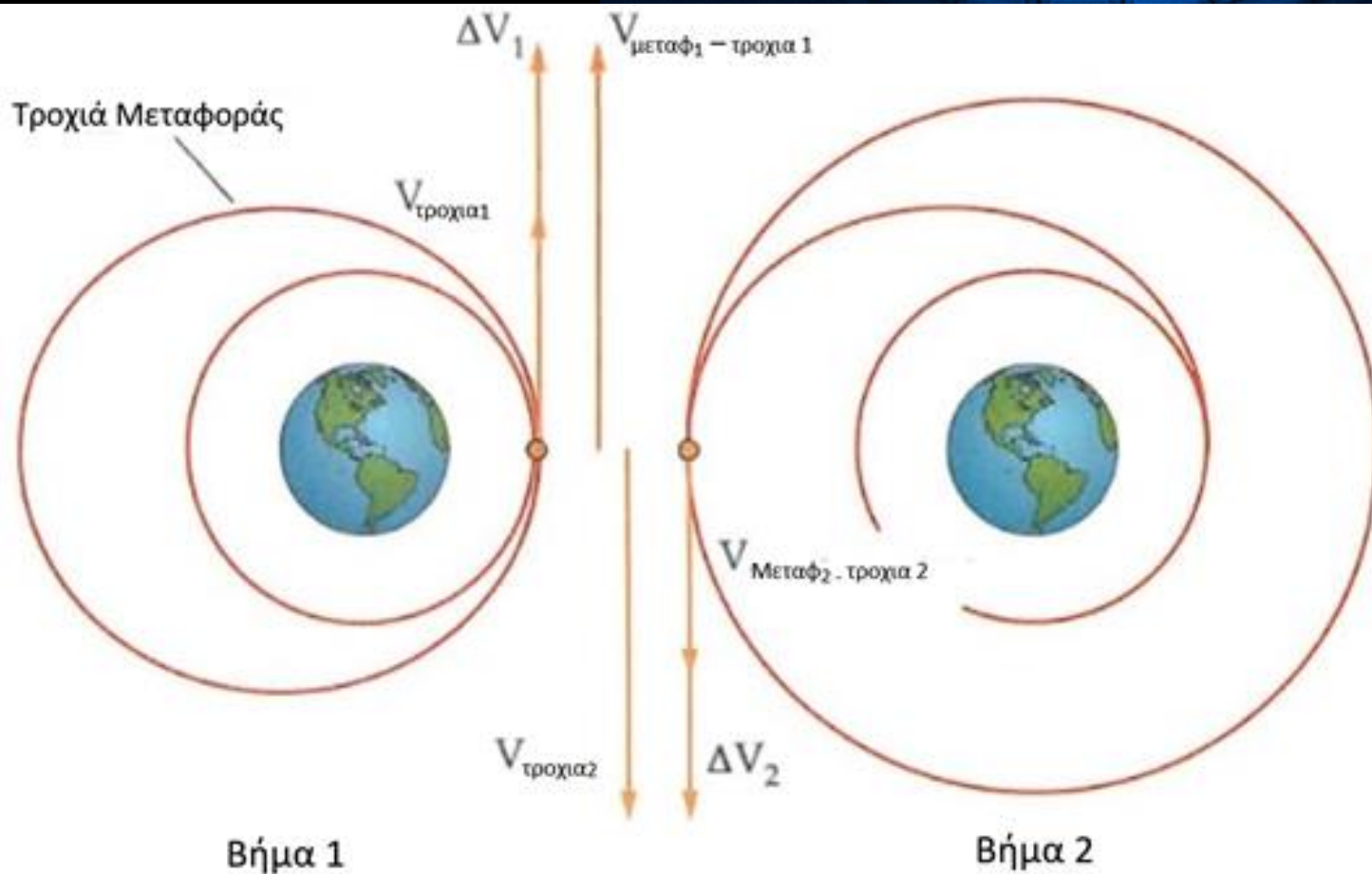
ΔV_2 : μεταβολή ταχύτητας για αλλαγή από τροχιά μεταφοράς σε τροχιά₂ (km/s)

Για να υπολογίσουμε την ολική ΔV που χρειαζόμαστε, αθροίζουμε :

$$\Delta V_{\text{total}} = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

Όπου

ΔV_{total} : ολική μεταβολή ταχύτητας για τη μεταφορά (km/s)



Μεταφορά Hohmann. Βήμα 1: Η πρώτη πυροδότηση (καύση) ή ΔV βγάζει τον δορυφόρο από την αρχική του κυκλική τροχιά και μπαίνει σε μία ενδιάμεση ελλειπτική τροχιά μεταφοράς. Βήμα 2: Η δεύτερη πυροδότηση μεταφέρει τον δορυφόρο από την ελλειπτική τροχιά μεταφοράς στην τελική κυκλική τροχιά

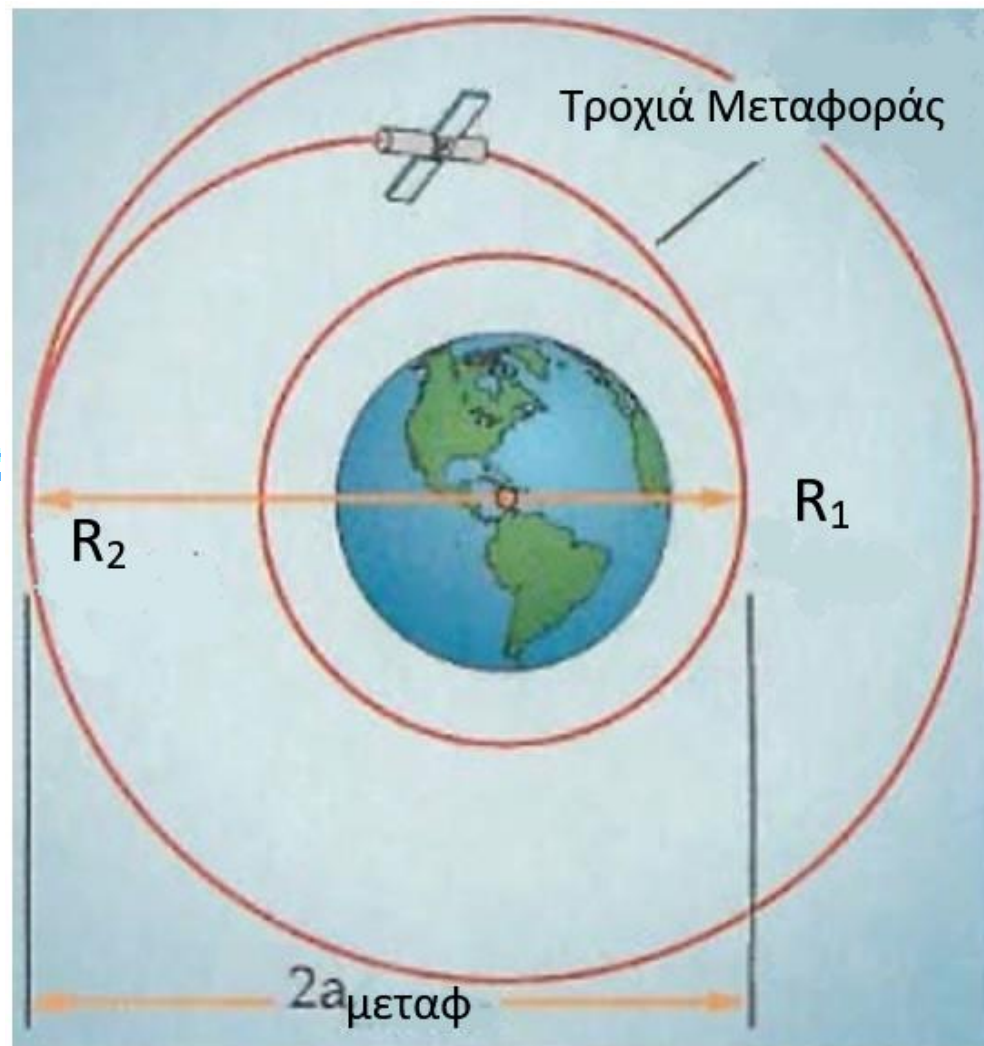
- Για να υπολογίσουμε τη ΔV_{total} χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις ενέργειας από την τροχιακή μηχανική.
- Όλα όσα πρέπει να γνωρίζουμε για την επίλυση ενός προβλήματος τροχιακών ελιγμών προέρχονται από αυτές τις δύο πολύτιμες σχέσεις, όπως μπορείτε να δείτε στο Παράδειγμα 3-3.
- Πρώτον, χρειαζόμαστε την ειδική μηχανική ενέργεια, ε :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} V^2 - \frac{\mu}{R}$$

- Στη συνέχεια χρειαζόμαστε την ειδική μηχανική ενέργεια στη μορφή:

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2a}$$

- Βήμα 1: η μεταβολή ΔV_1 μεταφέρει το διαστημικό σκάφος από την τροχιά 1 στην τροχιά μεταφοράς
- Βήμα 2: η μεταβολή μεταφέρει το διαστημικό ΔV_2 σκάφος από την τροχιά μεταφοράς στην τροχιά 2



- Για να λύσουμε ως προς τα ΔV_1 και ΔV_2 πρέπει να βρούμε την ενέργεια σε κάθε τροχιά. Αν γνωρίζουμε τα μεγέθη των τροχιών 1 και 2, τότε γνωρίζουμε τους μεγάλους ημιάξονες (τους a_1 και a_2)
- Ο μεγάλος άξονας της τροχιάς μεταφοράς ισούται με το άθροισμα των ακτινών των δύο τροχιών

$$2a_{\text{μεταφ}} = R_1 + R_2$$

- Χρησιμοποιώντας την εναλλακτική εξίσωση για την περιγραφή της ειδικής μηχανικής ενέργειας προκύπτει:

$$\varepsilon_1 = -\frac{\mu}{2a_1}$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\mu}{2a_2}$$

$$\varepsilon_{\text{μεταφ}} = -\frac{\mu}{2a_{\text{μεταφ}}}$$

- Γνωρίζοντας αυτές τις ενέργειες μπορούμε να υπολογίσουμε:

$$V_{\text{τροχια}_1} = \sqrt{2\left(\frac{\mu}{R_1} + \varepsilon_1\right)}$$

$$V_{\text{τροχια}_2} = \sqrt{2\left(\frac{\mu}{R_2} + \varepsilon_2\right)}$$

$$V_{\text{μεταφ}_1} = \sqrt{2\left(\frac{\mu}{R_1} + \varepsilon_{\text{μεταφ}}\right)}$$

$$V_{\text{μεταφ}_2} = \sqrt{2\left(\frac{\mu}{R_2} + \varepsilon_{\text{μεταφ}}\right)}$$

- Τελικά, για να υπολογίζουμε τις ΔV_1 , ΔV_2 παίρνουμε τις διαφορές:

$$\Delta V_1 = |V_{\mu\epsilon\tau\alpha\varphi_1} - V_{\tau\rho\omicron\chi\iota\alpha_1}|$$

$$\Delta V_2 = |V_{\tau\rho\omicron\chi\iota\alpha_2} - V_{\mu\epsilon\tau\alpha\varphi_2}|$$

- και προσθέτουμε:

$$\Delta V_{\omicron\lambda\iota\kappa\eta} = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

- Η μεταφορά Hohmann είναι ενεργειακά αποδοτική, αλλά απαιτεί χρόνο για να ολοκληρωθεί.
- Για να υπολογίσουμε τον απαιτούμενο χρόνο μεταφοράς ας κοιτάξουμε το σχήμα του ελιγμού.
- Η μεταφορά καλύπτει ακριβώς το μισό μιας έλλειψης.
- Θυμηθείτε ότι βρίσκουμε τη συνολική περίοδο για οποιαδήποτε κλειστή τροχιά από την εξίσωση:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha^3}{\mu}}$$

- Συνεπώς ο χρόνος πτήσης/μεταφοράς ισούται με:

$$TOF = \frac{P}{2} = \pi \sqrt{\frac{\alpha_{\text{μεταφ}}^3}{\mu}}$$

Όπου

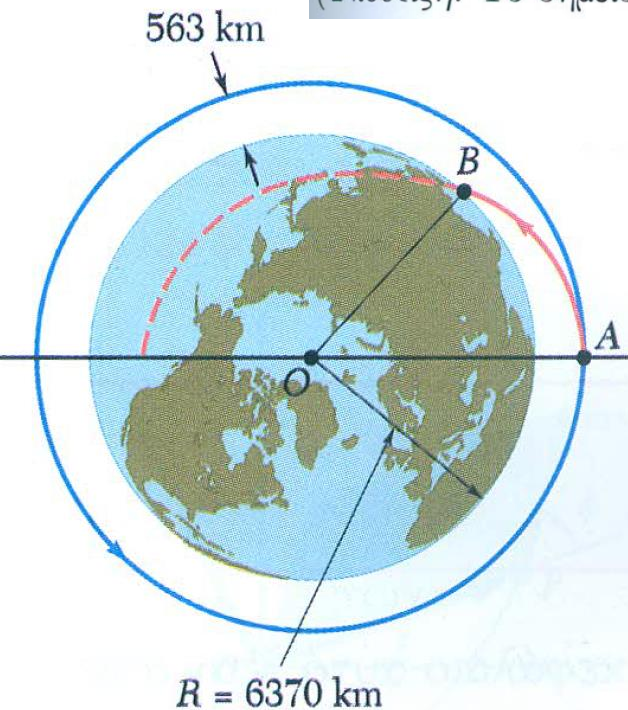
TOF: χρόνος πτήσης/μεταφοράς (s)

P: περίοδος τροχιάς (s)

μ: βαρυτική παράμετρος (km^3/s^3) = $3.98 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$ για τη Γη

α: μεγάλος ημιάξονας (km)

12.116 Ένα διαστημικό λεωφορείο διαγράφει μία κυκλική τροχιά σε υψόμετρο 563 km επάνω από την επιφάνεια της Γης. Καθώς διέρχεται από το σημείο A , πυροδοτεί τον κινητήρα του για ένα μικρό χρονικό διάστημα για να μειώσει την ταχύτητά του κατά 152 m/s και ξεκινά την κάθοδό του προς τη Γη. Να προσδιορίσετε τη γωνία AOB έτσι ώστε το υψόμετρο του λεωφορείου στο σημείο B να είναι 121 km. (Υπόδειξη: Το σημείο A είναι το απόγειο της ελλειπτικής καθοδικής τροχιάς.)



Η απόσταση στην οποία βρίσκεται το ΔA

$$r_0 = 6370 + 563 \Rightarrow$$

$$r_0 = 6933 \text{ km} = 6,933 \times 10^6 \text{ m}$$

$$v_{\text{circ}} = \sqrt{\frac{g R^2}{r_0}} \Rightarrow v_{\text{circ}} = 7100 \text{ m/s}$$

Μετά την απομείωση της ταχύτητας

$$v_1 = v_{\text{circ}} - 152 \text{ m/s} \Rightarrow v_1 = 6948 \text{ m/s}$$

Στο A γνωρίζω απόσταση r_0 και ταχύτητα v_1

$$\Rightarrow h = r_0 v_1 \Rightarrow h = 6948 r_0$$

Ακρίβως στο A μετά την απομείωση της ταχύτητας

$$\frac{1}{r_0} = \frac{GM}{h^2} + C \cos(100^\circ) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{r_0} - \frac{GM}{h^2} \right) = -C \rightarrow C \text{ known}$$

Τελικά στο ύψος $r_1 = R + 121 \text{ km}$ ισχύει

$$\frac{1}{r_1} = \frac{GM}{h^2} + C \cos \varphi \Rightarrow$$

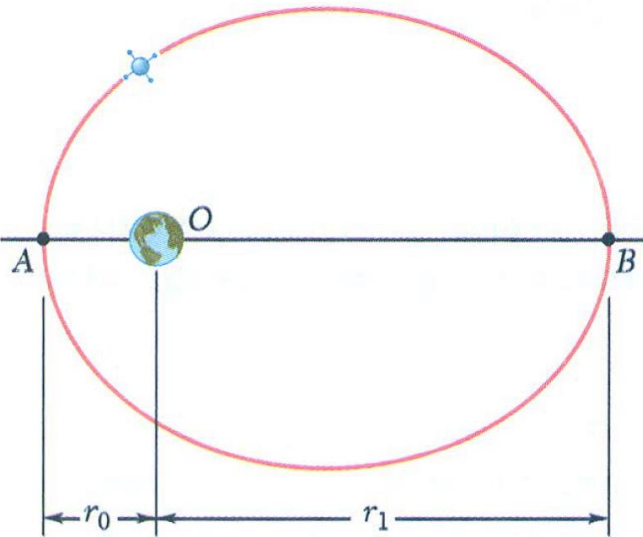
$$\cos \varphi = \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{GM}{h^2}}{C} = \frac{h^2 - r_1 GM}{C r_1 h^2}$$

$$\boxed{\varphi = 49^\circ}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi \text{ known} \Rightarrow \varphi = \text{known}$$

12.118 Ένας δορυφόρος διαγράφει μία ελλειπτική τροχιά γύρω από έναν πλανήτη. Συμβολίζοντας με r_0 και r_1 τις αποστάσεις που αντιστοιχούν στο περίγειο και το απόγειο της τροχιάς, αντίστοιχα, να δείξετε ότι η καμπυλότητα της τροχιάς σε κάθε ένα από αυτά τα δύο σημεία μπορεί να εκφραστεί ως

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} \right)$$



$$\Sigma_{TO} A$$

$$F_A \Rightarrow m a_n$$

$$F_A \Rightarrow G \frac{Mm}{r_0^2} = m \frac{v_A^2}{\rho}$$

$$r_0 v_A = h \Rightarrow v_A = \left(\frac{h}{r_0} \right)$$

$$F_B \Rightarrow G \frac{Mm}{r_1^2} = m \frac{v_B^2}{\rho}$$

$$r_1 v_B = h$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{GM}{r_0^2} &= \left(\frac{h^2}{r_0^2} \right) \frac{1}{\rho} \\ \frac{GM}{r_1^2} &= \left(\frac{h^2}{r_1^2} \right) \frac{1}{\rho} \end{aligned} \right\} = GM = \frac{h^2}{\rho}$$

$$\frac{1}{r_0} = \frac{GM}{h^2} + C$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{GM}{h^2} - C$$

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0} \right) = 2 \frac{GM}{h^2} = 2 \frac{h^2}{\rho h^2} \rightarrow$$

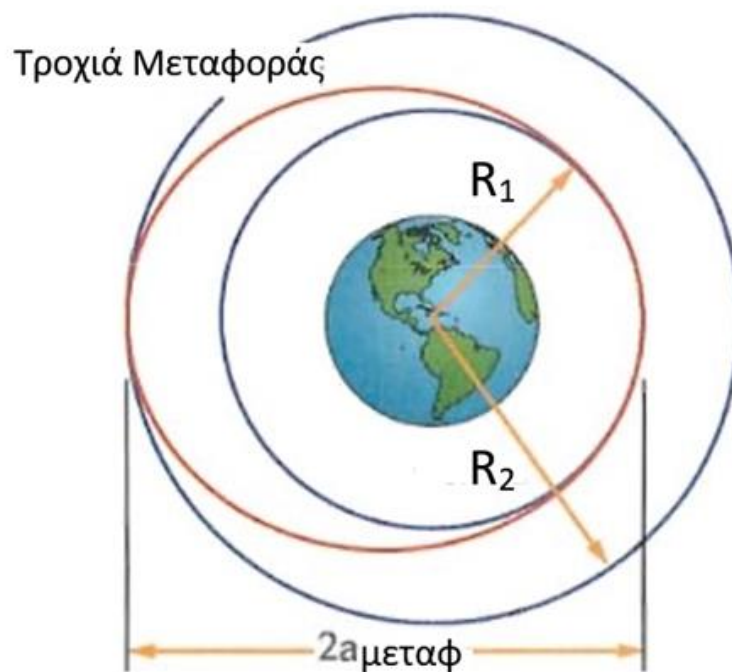
$$\boxed{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0} \right) = \frac{1}{\rho}}$$

Υποθέτουμε ότι η NASA θέλει να μεταφέρει έναν δορυφόρο τηλεπικοινωνιών από χαμηλή (LEO) τροχιά σε γεωσύγχρονη τροχιά. Δίνονται:

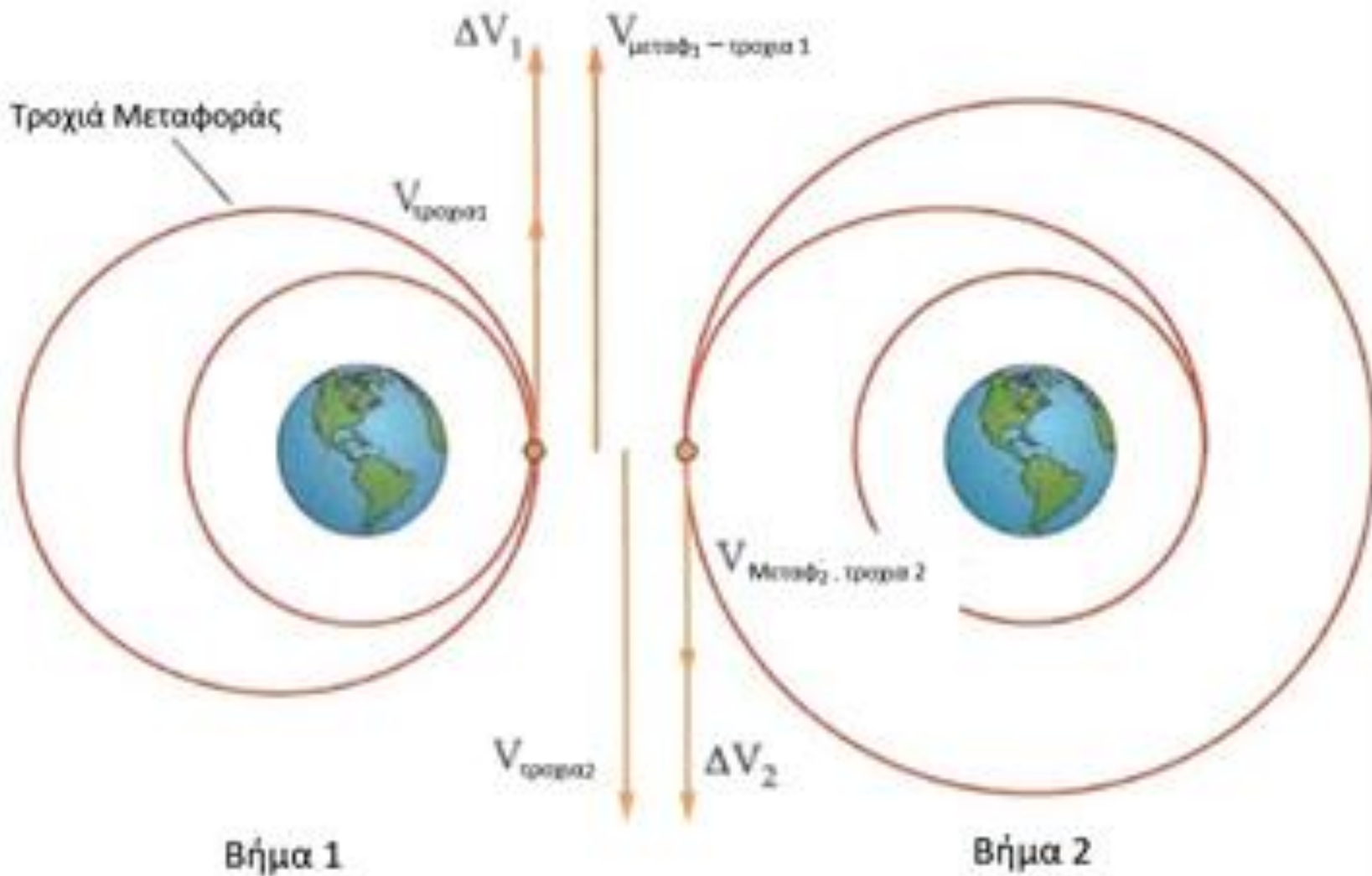
- $R_1 = 6570 \text{ km}$
- $R_2 = 42160 \text{ km}$

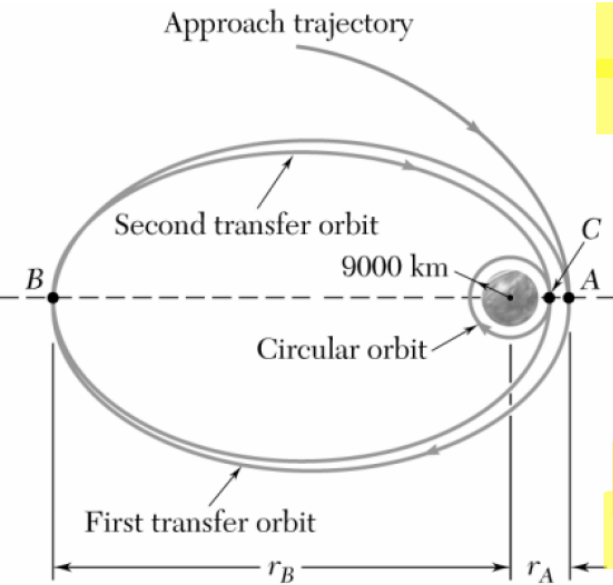
Πόση είναι η ολική ΔV για αυτή την μεταφορά και πόσος χρόνος απαιτείται για να ολοκληρωθεί;

Σχήμα προβλήματος



Παράδειγμα 3-7 - Λύση





A space probe is to be placed in a circular orbit of 9000-km radius about the planet Venus in a specified plane. As the probe reaches A , the point of its original trajectory closest to Venus, it is inserted in a first elliptic transfer orbit by reducing its speed of Δv_A . This orbit brings it to point B with a much reduced velocity. There the probe is inserted in a second transfer orbit located in the specified plane by changing the direction of its velocity and further reducing its speed by Δv_B . Finally, as the probe reaches point C , it is inserted in the desired circular orbit by reducing its speed by Δv_C . Knowing that the mass of Venus is 0.82 times the mass of the earth, that $r_A = 15 \times 10^3$ km and $r_B = 300 \times 10^3$ km, and that the probe approaches A on a parabolic trajectory, determine by how much the velocity of the probe should be reduced (a) at A , (b) at B , (c) at C .

For Earth, $GM_{\text{earth}} = gR^2 = (9.81)(6.37 \times 10^6)^2 = 398.06 \times 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2$

For Venus, $GM = 0.82 GM_{\text{earth}} = 326.41 \times 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2$

For a parabolic trajectory with $r_A = 15 \times 10^6 \text{ m}$

$$(v_A)_1 = v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{r_A}} = \sqrt{\frac{(2)(326.41 \times 10^{12})}{15 \times 10^6}} = 6.5971 \times 10^3 \text{ m/s}$$

First transfer orbit AB . $r_B = 300 \times 10^6 \text{ m}$

At point A , where $\theta = 180^\circ$

$$\frac{1}{r_A} = \frac{GM}{h_{AB}^2} + C \cos 180^\circ = \frac{GM}{h_{AB}^2} - C \quad (1)$$

At point B , where $\theta = 0^\circ$

$$\frac{1}{r_B} = \frac{GM}{h_{AB}^2} + C \cos 0 = \frac{GM}{h_{AB}^2} + C \quad (2)$$

Adding,
$$\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} = \frac{r_B + r_A}{r_A r_B} = \frac{2GM}{h_{AB}^2}$$

Solving for h_{AB} ,

$$\begin{aligned} h_{AB} &= \sqrt{\frac{2GM r_A r_B}{r_B + r_A}} = \sqrt{\frac{(2)(326.41 \times 10^{12})(15 \times 10^6)(300 \times 10^6)}{315 \times 10^6}} \\ &= 96.571 \times 10^9 \text{ m}^2/\text{s} \end{aligned}$$

$$(v_A)_2 = \frac{h_{AB}}{r_A} = \frac{96.571 \times 10^9}{15 \times 10^6} = 6.4381 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$(v_B)_1 = \frac{h_{AB}}{r_B} = \frac{96.571 \times 10^9}{300 \times 10^6} = 321.90 \text{ m/s}$$

Second transfer orbit BC . $r_C = 9000 \text{ km} = 9 \times 10^6 \text{ m}$

At point B , where $\theta = 0$.

$$\frac{1}{r_B} = \frac{GM}{h_{BC}^2} + C \cos 0 = \frac{GM}{h_{BC}^2} + C$$

At point C , where $\theta = 180^\circ$

$$\frac{1}{r_C} = \frac{GM}{h_{BC}^2} + C \cos 180^\circ = \frac{GM}{h_{BC}^2} - C$$

Adding,
$$\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} = \frac{r_B + r_C}{r_B r_C} = \frac{2GM}{h_{BC}^2}$$

$$h_{BC} = \sqrt{\frac{2GM r_B r_C}{r_B + r_C}} = \sqrt{\frac{(2)(326.41 \times 10^{12})(300 \times 10^6)(9 \times 10^6)}{309 \times 10^6}}$$

$$= 75.5265 \times 10^9 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$(v_B)_2 = \frac{h_{BC}}{r_B} = \frac{75.5265 \times 10^9}{300 \times 10^6} = 251.76 \text{ m/s}$$

$$(v_C)_1 = \frac{h_{BC}}{r_C} = \frac{75.5265 \times 10^9}{9 \times 10^6} = 8.3918 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Final circular orbit. $r_C = 9 \times 10^6 \text{ m}$

$$(v_C)_2 = \sqrt{\frac{GM}{r_C}} = \sqrt{\frac{326.41 \times 10^{12}}{9 \times 10^6}} = 6.0223 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Speed reductions.

(a) At A. $(v_A)_1 - (v_A)_2 = 6.5971 \times 10^3 - 6.4381 \times 10^3$

$$\Delta v_A = 159.0 \text{ m/s} \blacktriangleleft$$

(b) At B. $(v_B)_1 - (v_B)_2 = 321.90 - 251.76$

$$\Delta v_B = 70.1 \text{ m/s} \blacktriangleleft$$

(c) At C. $(v_C)_1 - (v_C)_2 = 8.3918 \times 10^3 - 6.0223 \times 10^3$

$$\Delta v_C = 2.37 \times 10^3 \text{ m/s} \blacktriangleleft$$