



**ΔΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΔΙΑΣΤΗΜΙΚΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ,
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ και ΥΠΗΡΕΣΙΕΣ**

**M802 Fundamentals of Satellite
Systems & Subsystems**

Διάλεξη 6

Υποσύστημα προσδιορισμού και ελέγχου
προσανατολισμού Δορυφόρων
(Attitude Determination and Control
Subsystem) - II

24.11.20

Καθ. Β. Λάππας

Email: vlappas@upatras.gr



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ**
UNIVERSITY OF PATRAS



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —



Περιστροφική Κίνηση

- Τα συστήματα ΥΠΕΠ/ADCS απαιτούν γνώση της περιστροφικής κίνησης η οποία διαφέρει από αυτήν της μεταφορικής κίνησης. Πρέπει να θυμηθούμε τα μεγέθη, εξισώσεις της ροπής, στροφορμής και των αντίστοιχων μεγεθών τους στην μεταφορική κίνηση
- Για να γίνει κατανοητή η περιστροφική κίνηση των δορυφόρων στο διάστημα, θα πρέπει γνωρίζουμε το φαινόμενο της μετάπτωσης (precession) άκαμπτων σωμάτων.

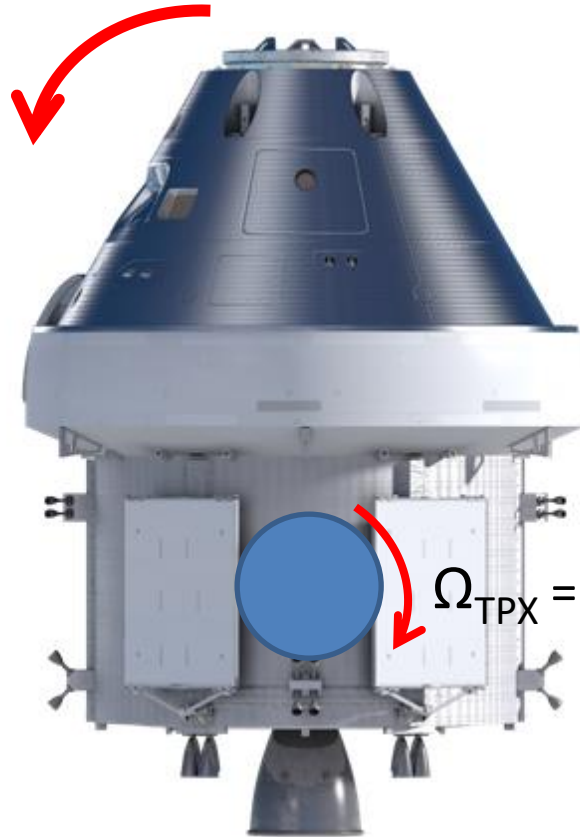


Επενεργητές/Actuators

- Οι επενεργητές μπορούν να χωριστούν σε αδρανειακούς και μη αδρανειακούς. Αδρανειακοί είναι οι επενεργητές που δημιουργούν ροπές με την μεταβολή της στροφορμής.
- Λέγονται και συστήματα ανταλλαγής στροφορμής. Υλοποιούνται με σφόνδυλο του οποίου η στροφορμή μεταβάλλεται με τη βοήθεια ηλεκτροκινητήρα. Τέτοια συστήματα είναι:
 - οι τροχοί/σφόνδυλοι αδράνειας (momentum wheel): παρέχουν σταθερή στροφορμή για γυροσκοπική ευστάθεια. Ο έλεγχος προσανατολισμού (ροπή) γίνεται με την μικρή μεταβολή της σταθερής ταχύτητας περιστροφής του τροχού
 - οι τροχοί αντίδρασης (reaction wheel): Δημιουργούν ροπή με την αντίδραση σε μία μεταβολή, με την αύξηση/μείωση της ταχύτητας του τροχού που βρίσκεται σε κατάσταση ακινησίας
 - οι γυροσκοπικοί επενεργητές ελέγχου (Control Moment Gyro - CMG) που μπορούν να παρέχουν ροπή σε κάθε διεύθυνση: τροχός αδράνειας ο οποίος είναι τοποθετημένος πανω σε ένα η δύο μηχανισμούς αντιζύγου (gimbal) επιτρέποντας την αλλαγή κατεύθυνσης του άξονα περιστροφής του τροχού (άρα και της στροφορμής)

Τροχοί αντίδρασης (Reaction Wheel)

$$\omega_{\Delta O P} = ? \text{ rpm}$$



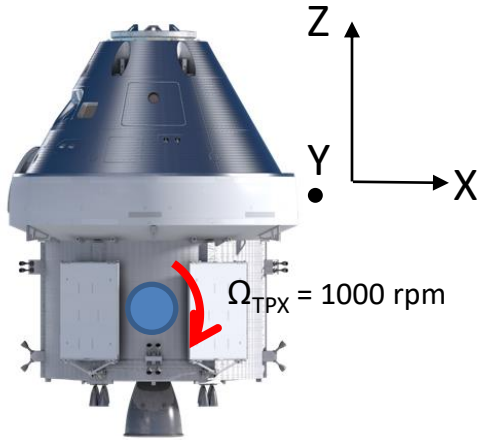
$$\Omega_{\text{TPX}} = 1000 \text{ rpm}$$

- Έστω ένας τροχός αντίδρασης περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας του δορυφόρου με ταχύτητα Ω . **Τι θα συμβεί στο διαστημόπλοιο?**

$$\text{ΑΔΟ: } \Sigma H = 0$$

(στροφορμή συστήματος = 0)

Τροχοί αντίδρασης (Reaction Wheel)



Έστω ένας τροχός αντίδρασης περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας του δορυφόρου με ταχύτητα Ω . Τι θα συμβεί στο διαστημόπλοιο?

$$\text{ΑΔΟ: } \Sigma H = 0$$

(στροφορμή συστήματος = 0)

$$\text{ΑΔΟ: } \Sigma H_i = 0, H_{\text{TPX}} + H_{\text{ΔΟΡ}} = 0$$

$$(I_{\text{TPX}} \cdot \Omega_{\text{TPX}}) + (I_{\text{ΔΟΡ}} \cdot \omega_{\text{ΔΟΡ}}) = 0$$

$$I_{\text{TPX}} \cdot \Omega_{\text{TPX}} = - I_{\text{ΔΟΡ}} \cdot \omega_{\text{ΔΟΡ}}$$

$$\omega_{\text{ΔΟΡ}} = (I_{\text{TPX}} \cdot \Omega_{\text{TPX}}) / I_{\text{ΔΟΡ}}$$

- $H_{\text{TPX}} =$ Στροφορμή τροχού αντίδρασης = $I_{\text{TP}} \Omega_{\text{TP}}$ (Nms)
- $I_{\text{TPX}} =$ Ροπή αδράνειας του τροχού ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)
- $\Omega_{\text{TPX}} =$ ρυθμός περιστροφής του τροχού (rpm, $^\circ/\text{s}$)
- $H_{\text{ΔΟΡ}} =$ Στροφορμή του δορυφόρου (Nms)
- $\omega_{\text{ΔΟΡ}} =$ Ρυθμός περιστροφής δορυφόρου (rpm, $^\circ/\text{s}$)
- $I_{\text{ΔΟΡ}} =$ Ροπή αδράνειας του δορυφόρου ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)



Μη Αδρανειακοί Επενεργητές Non-Inertial Actuators

- Μη αδρανειακούς επενεργητές:
 - Μαγνητικοί επενεργητές. Η αρχή λειτουργίας τους βασίζεται στη διέλευση ηλεκτρικού ρεύματος από πηνία και τη συνεπακόλουθη δημιουργία τοπικού μαγνητικού πεδίου που η αλληλεπίδραση του με το μαγνητικό πεδίο του πλανήτη γύρω από τον οποίο εκτελείται η τροχιά προκαλεί μια ροπή που αξιοποιείται ανάλογα με τις ανάγκες ελέγχου του δορυφόρου
 - Συστήματα προώθησης. Λειτουργούν μέσω εκκένωσης κάποιου προωθητικού (propellant) και αποτελούν την σταθερότερη τεχνολογική λύση μιας και η χρήση τους μπορεί να συνδυαστεί με άλλες μεθόδους

Εξισώσεις Περιστροφικής και Γραμμικής Κίνησης

Περιστροφική Κίνηση

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$$

$$\bar{\omega} = \frac{\omega + \omega_0}{2}$$

Γραμμική Κίνηση

$$v = v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

$$\bar{v} = \frac{v + v_0}{2}$$



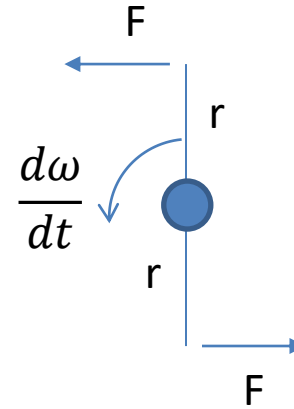
Αντιστοιχία Μεγεθών στην Μεταφορική και Περιστροφική Κίνηση

Μεταφορική Κίνηση	Περιστροφική Κίνηση
Μετατόπιση, S	Γωνιακή Μετατόπιση, θ
Ταχύτητα, v	Γωνιακή Ταχύτητα, ω
Επιτάχυνση, a	Γωνιακή επιτάχυνση, α ή $d\omega/dt$
Δύναμη, F	Ροπή δύναμης, T ή N
Μάζα, m	Ροπή αδράνειας, I
Ορμή, P	Στροφορμή, H

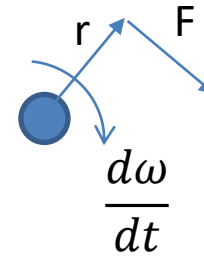
Ροπή (Torque)

- Θεωρούμε ως σημείο αναφοράς το κέντρο μάζας (centre of mass – CoM)
- Ας ορίσουμε μια εξωτερική ροπή η οποία προκαλείται από ένα ζεύγος δυνάμεων (couple) ή από μία δύναμη που δρα μέσω ενός μοχλοβραχίονα
- Μία εξωτερική ροπή θα προκαλέσει τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής που ορίζεται ως:

$$T = \frac{dH}{dt}$$



Ζεύγος δυνάμεων
 $T = 2 r \times F$



Ροπή
 $T = r \times F$

$$T = \frac{d(H)}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I \frac{d\omega}{dt}$$



Ροπή (Torque) - II

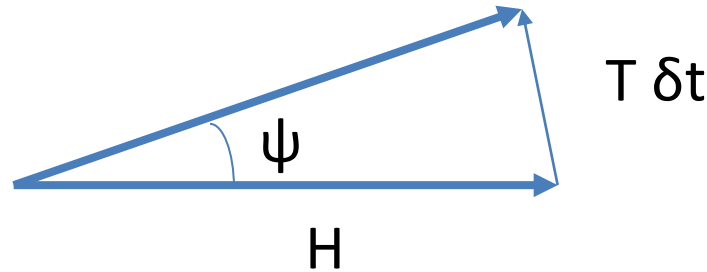
- Κατανομή ροπών που ασκούνται σε δορυφόρους:
 - Εσωτερικές ροπές, που δρουν μεταξύ σωματιδίων ή σωμάτων και που δεν αλλάζουν την συνολική ορμή: μηχανισμοί, κίνηση καυσίμου
- Αλλά θα υπάρχουν συνεχώς εξωτερικές ροπές που θα ασκούνται στον δορυφόρο:
 - Έχει ως αποτέλεσμα την συσσώρευση στροφορμής, η οποία αν δεν ακυρωθεί/απαλειφθεί σε μεγάλους ρυθμούς περιστροφής του δορυφόρου
 - Άρα χρειαζόμαστε εξωτερικούς επενεργητές για να ελέγξουμε την συσσώρευση στροφορμής
 - Τέτοιοι επενεργητές είναι τα μαγνητικά πηνία (magnetic coils or torque rods), προωθητές (thrusters)



Ροπή (Torque) - III

- Θα αναλύσουμε τις 3 βασικές περιπτώσεις που δρουν εξωτερικές ροπές σε ένα διαστημικό όχημα:
 1. Μηδέν εξωτερική ροπή, T σημαίνει ότι η στροφορμή H θα είναι σταθερή σε μέτρο και διεύθυνση
 2. Εξωτερική ροπή η οποία δρα στην ίδια διεύθυνση με την στροφορμή H , θα μεγαλώσει το μέτρο του H αλλά χωρίς να αλλάξει την διεύθυνση του H
 3. Εξωτερική ροπή η οποία είναι πάντα κάθετη στην στροφορμή H θα αλλάξει την διεύθυνση της στροφορμής H αλλά όχι το μέτρο της;
 - Η περίπτωση αυτή αντιπροσωπεύει το φαινόμενο της μετάπτωσης (precession) του γυροσκοπίου

Γυροσκοπικής ευστάθειας/ακαμψίας Gyroscopic Rigidity



- Αν η στροφορμή \underline{H} είναι μεγάλη, τότε η μεταβολή στην διεύθυνση του \underline{H} , κατά γωνία $\delta\psi$ είναι μικρή για μία ροπή $\underline{I}(\delta t)$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{T}{H}, \text{ ρυθμός μετάπτωσης}$$

- Άρα αν δώσουμε στον δορυφόρο μια προδιάθεση στροφορμής (momentum bias), δηλαδή μία αρχική σταθερή στροφορμή σε μία συγκεκριμένη διεύθυνση, θα κατορθώσουμε να 'θωρακίσουμε' την διεύθυνση αυτή από εξωτερικές ροπές μέσω της **γυροσκοπικής ευστάθειας/ακαμψίας**



Γυροσκοπική Ευστάθεια/Ακαμψία

- <https://www.youtube.com/watch?v=xQb-N486mA4>



Ροπή Αδράνειας

- Η περιστροφική αδράνεια ενός σώματος είναι το μέτρο της αντίστασης του στη μεταβολή της περιστροφικής του κατάστασης, αντίστοιχο της μάζας στην περίπτωση της μεταφορικής κίνησης.
- Για σύστημα σωματιδίων με μάζες m_i σε αποστάσεις r_i από άξονα που περνά από ένα σημείο P , η κινητική τους ενέργεια δίνεται από:

$$K = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + \dots = m_1 r_1^2 \omega^2 + m_2 r_2^2 \omega^2 + \dots = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

- Για σύστημα σωματιδίων με μάζες m_i σε αποστάσεις r_i από άξονα που περνά από ένα σημείο P , η ροπή αδράνειας του συστήματος γύρω από αυτόν τον άξονα δίνεται από:

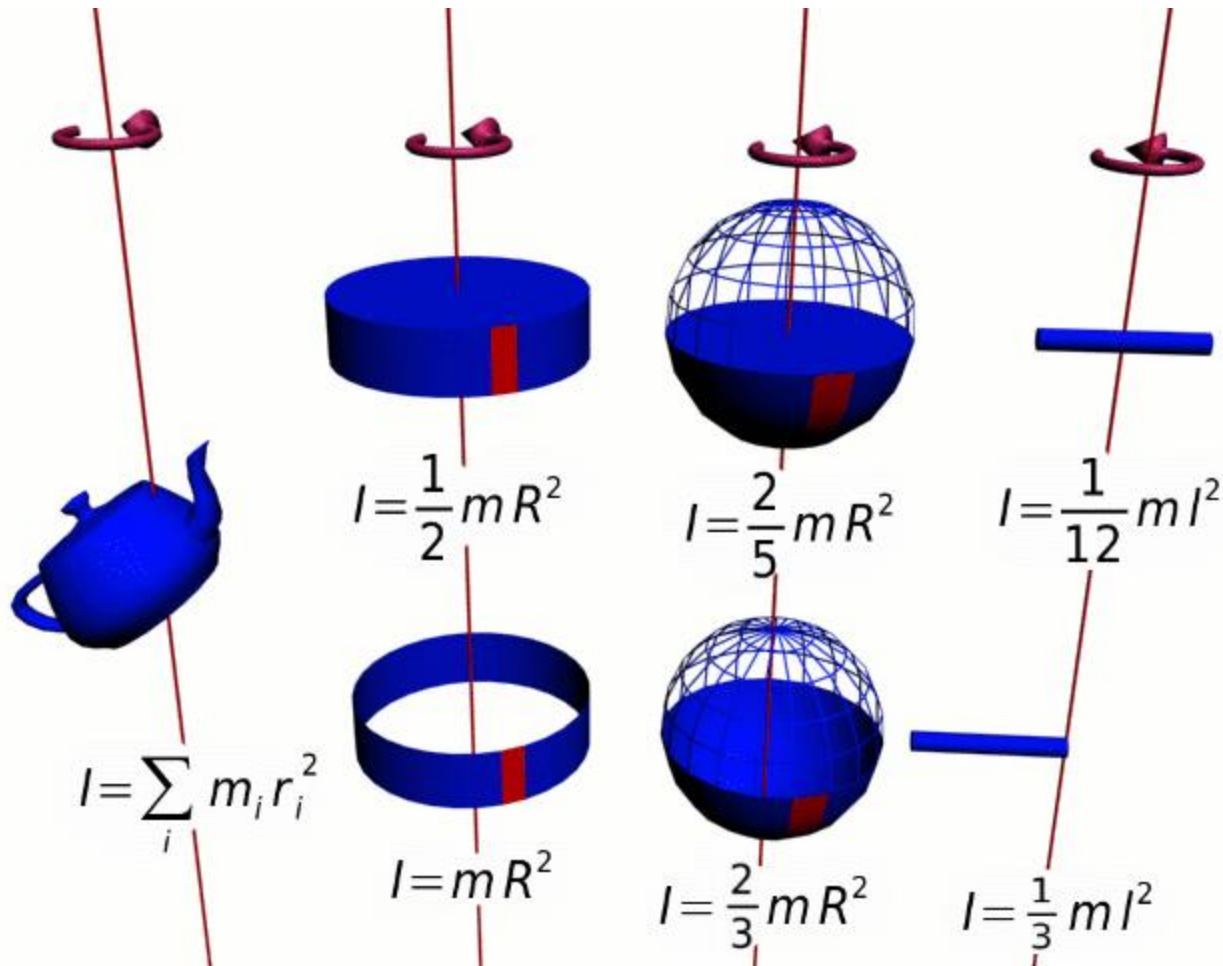
$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots = \sum_i m_i r_i^2$$

- Μονάδα SI σύστημα $\text{kg} \cdot \text{m}^2$
- Για στερεά σώματα η ροπή αδράνειας υπολογίζεται με ένα ολοκλήρωμα (αντί του αθροίσματος)
- Σε ένα στερεό οι αποστάσεις r_i είναι σταθερές, και η I είναι ανεξάρτητη από τον τρόπο περιστροφής του γύρω από δεδομένο άξονα



Ροπή αδράνειας I

- Ροπή αδράνειας I ενός στερεού ως προς κάποιο άξονα ονομάζεται το άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται το σώμα επί τα τετράγωνα των αποστάσεων τους από τον άξονα περιστροφής

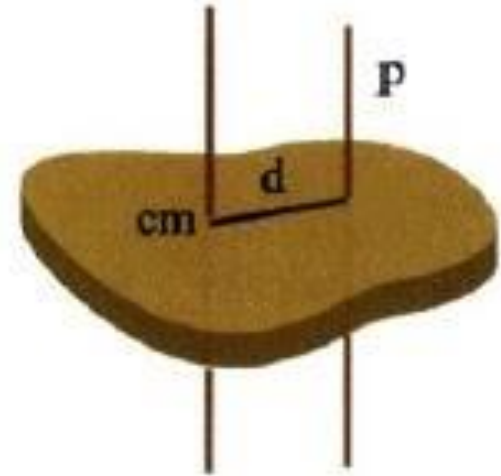




ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΑΞΟΝΩΝ

- Για να βρούμε την ροπή αδράνειας σώματος ως προς άξονα που είναι διαφορετικός από άλλον άξονα ως προς τον οποίο είναι γνωστή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων.
- Θεώρημα: Η ροπή αδράνειας σώματος μάζας M ως προς άξονα, P , που είναι παράλληλος προς και σε απόσταση d από άξονα που περνά από κέντρο μάζας του σώματος είναι:

$$I_p = I_{cm} + Md^2$$



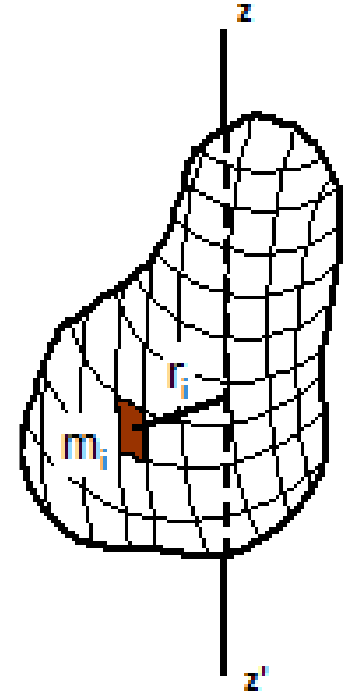


ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

- Για σώματα που έχουμε συνεχή κατανομή μάζας το άθροισμα των γινομένων μάζας επί τετράγωνο απόστασης από τον άξονα περιστροφής μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα.
- Διαχωρισμός του σώματος σε στοιχειώδεις μάζες dm (σε απόσταση r), οπότε η στοιχειώδης ροπή αδράνειας δίνεται από:

$$dI = r^2 dm, \text{ οπότε η ροπή θα δίνεται } I = \int r^2 dm$$

- Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος χρειάζεται να εκφραστούν τόσο το r όσο και το dm συναρτήσει της ίδιας μεταβλητής ολοκλήρωσης.
- Σε αυτό παίζει το **σπουδαιότατο ρόλο η συμμετρία του σώματος και ο βαθμός ομογένειας στην κατανομή της μάζας του στο χώρο**
- Περισσότερα για την ροπή αδράνειας στο:
<https://eclass.upatras.gr/modules/document/file.php/PHY1901/Ενότητα%207-Περιστροφικές%20Κινήσεις%2C%20Ροπή%2C%20Κύλιση%20και%20Στροφορμή.pdf>

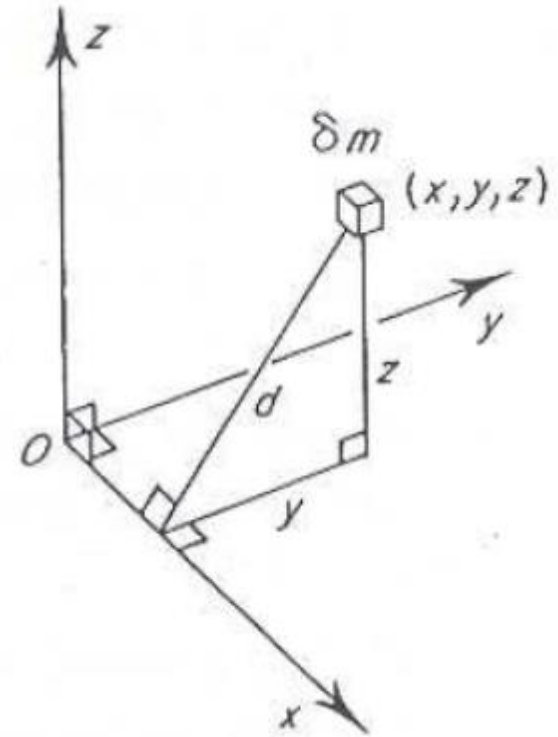


Ροπή αδράνειας – Κύριες ΡΑ

- Κύριες ή μαζικές ροπές αδράνειας (Moments of inertia): I_{xx} , I_{yy} , I_{zz}
- Η ροπή αδράνειας (ΡΑ), I , ενός σώματος γύρω από οποιονδήποτε άξονα είναι το άθροισμα των στοιχείων, δm , του κάθε στοιχείου του σώματος και του τετραγώνου της απόστασης d από τον άξονα:

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm$$

- Οι ΡΑ I_{yy} και I_{zz} ορίζονται με τον ίδιο τρόπο

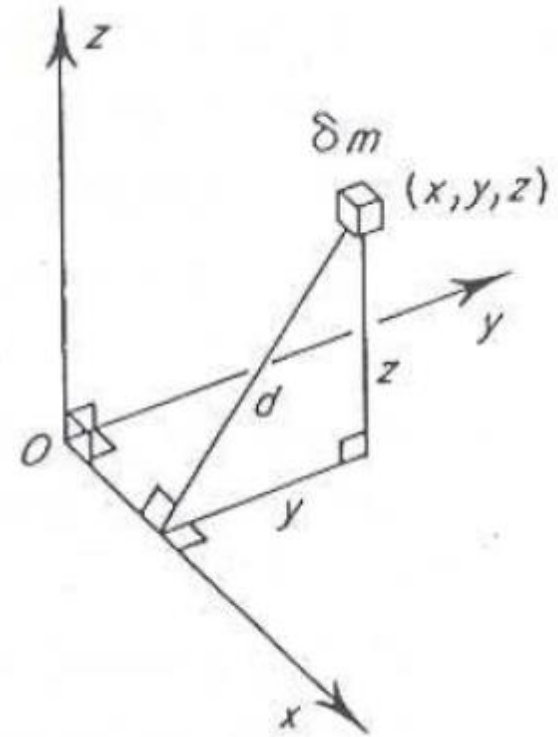


Ροπή Αδράνειας – Δευτερεύουσες ή φυγόκεντρες PA

- Δευτερεύουσες PA (γινόμενα αδράνειας):
 I_{xy}, I_{yz}, I_{zx}
- Το γινόμενο PA του άξονα-x είναι:

$$I_{yz} = \int yz dm$$

- Οι PA I_{xy} και I_{zx} (για τους άξονες z και y) ορίζονται με τον ίδιο τρόπο
- Τα γινόμενα PA είναι μέτρα έλλειψης συμμετρίας στην κατανομή μάζας ενός σώματος
- Αν υπάρχουν άξονες συμμετρίας, τότε τα γινόμενα αδράνειας για όλους τους άξονες σε αυτά τα επίπεδα θα είναι μηδέν





Κύριοι Άξονες

- Κύριοι Άξονες είναι συνδυασμοί ορθοκανονικών συστημάτων όπου τα γινόμενα PA είναι μηδέν
- Θα υπάρχει πάντα έστω και ένας συνδυασμός για κάθε σημείο του σώματος (με σημείο ενδιαφέροντος το κέντρο μάζας CoM/KM)
- Για συμμετρικά και αξονοσυμμετρικά σώματα οι κύριοι άξονες είναι εμφανείς
- Οι κύριοι άξονες είναι τα ιδιοδιανύσματα του τανυστή αδράνειας (inertia matrix)



Τανυστής αδράνειας (inertia matrix)

- Όπου $[I_O]$ είναι ο τανυστής αδράνειας αναφορικά με το σημείο $O(x,y,z)$

$$[I_O] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

- Παρατηρείστε ότι τα στοιχεία της διαγώνιου είναι ροπές αδράνειας και τα μη διαγώνια είναι τα αρνητικά γινόμενα των ροπών αδράνειας.

Στροφορμή ενός Στέρεου Σώματος

$H = I\omega$ (στροφορμή = ροπή αδράνειας · γωνιακή ταχύτητα)

$$[H] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$[H] = \begin{bmatrix} I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z - I_{xy}\omega_x \\ I_{zz}\omega_z - I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y \end{bmatrix}$$

Αν έχουμε κύριους άξονες μόνο, τα γινόμενα $\rightarrow 0$, άρα:

$$H = (I_{xx}\omega_x, I_{yy}\omega_y, I_{zz}\omega_z)^T$$

- Με τις εξισώσεις αυτές, μπορούμε να περιγράψουμε τον προσανατολισμό και γωνιακή κίνηση ενός διαστημικού οχήματος

Στροφορμή Στερεού Σώματος (με τροχούς/σφονδύλους)

- Η στροφορμή ενός δορυφόρου με επενεργητές-τροχούς (momentum/reaction wheel) μπορεί να εκφραστεί ως:
- Την στροφορμή του στερεού σώματος που περιλαμβάνει τον σφόνδυλο σε ακινησία
- Την πρόσθετη στροφορμή εξαιτίας της γωνιακής ταχύτητας του περιστρεφόμενου τροχού σχετικά με το σώμα (δορυφόρο)
- Αν υποθέσουμε ότι ο τροχός περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_{wh} σχετικά με το σώμα (δορυφόρο)
- Η διεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας ω_{wh} είναι σε αυτήν του άξονα συμμετρίας του τροχού προσαρμοσμένος στον δορυφόρο
- Αν η ροπή αδράνειας του τροχού είναι I_{wh} τότε προκαλείται μία πρόσθετη στροφορμή $H_{wh} = I_{wh} \omega_{wh}$ η οποία πρέπει να προστεθεί σε αυτήν του δορυφόρου
- Εάν έχουμε έναν ή περισσότερους τροχούς/σφονδύλους τότε οι συνιστώσες της στροφορμής $(H_x, H_y, H_z)^T$ είναι:

Στροφορμή Στερεού Σώματος (με τροχούς/σφονδύλους)

- Η συνολική στροφορμή ενός δορυφόρου με επενεργητές-τροχούς (momentum/reaction wheel) είναι:

Στροφορμή επενεργητών

$$[H] = \begin{bmatrix} I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{zx}\omega_z + H_x \\ I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z - I_{xy}\omega_x + H_y \\ I_{zz}\omega_z - I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y + H_z \end{bmatrix}$$

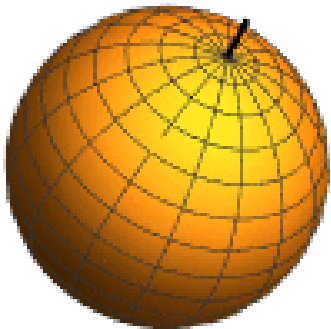
- Αν έχουμε κύριους άξονες μόνο:

$$H = (I_{xx}\omega_x + H_x, I_{yy}\omega_y + H_y, I_{zz}\omega_z + H_z)^T$$

Κίνηση Προσανατολισμού (Attitude Motion)

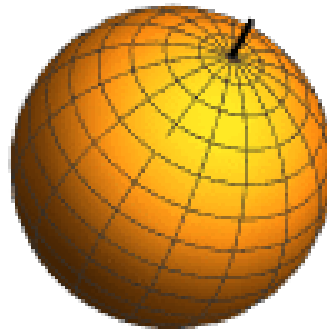
- Η απόκριση ή αντίδραση της στροφορμής ενός δορυφόρου σε μία εξωτερική διαταραχή/ροπή είναι καθορισμένη και προβλέψιμη με τις κινηματικές εξισώσεις που έχουμε δει έως τώρα.
- Η περιστροφική κίνηση όμως ενός δορυφόρου δεν είναι τόσο απλή και απαιτεί προσεκτική ανάλυση

Rotation



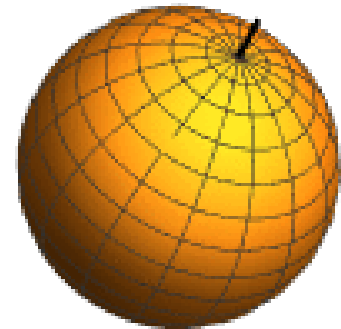
Περιστροφή

Precession



Μετάπτωση

Nutation



Κλόνιση

Κίνηση Προσανατολισμού (Attitude Motion)

- Έχουμε πει ότι ροπή = ρυθμός μεταβολής της στροφορμής

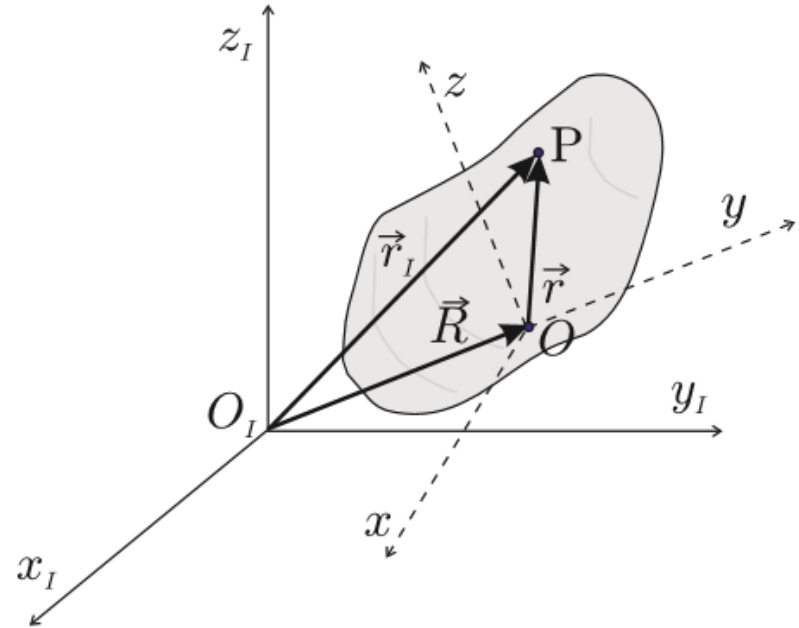
$$\underline{T} = d\underline{H}/dt , \text{ όπου } H = (I_{xx}\omega_x, I_{yy}\omega_y, I_{zz}\omega_z)^T$$

- Αλλά η παραπάνω είναι Νευτώνεια εξίσωση, δηλαδή ισχύει στο αδρανειακό πλαίσιο που ορίσαμε εξ αρχής
- Γενικά, το σωματόδετο σύστημα αξόνων που μελετάμε είναι περιστρεφόμενο (με επιτάχυνση) σε σχέση με το αδρανειακό χώρο και γι' αυτό πρέπει να την ερμηνεύσουμε μέσω του Θεωρήματος Coriolis



Κίνηση Προσανατολισμού (Attitude Motion)

- Η μελέτη της γενικής κίνησης ενός στερεού σώματος απαιτεί συνήθως την εισαγωγή δύο συστημάτων αναφοράς : Το αδρανειακό σύστημα αναφοράς που είναι το σύστημα αναφοράς (Σ_A) ενός ακίνητου παρατηρητή και το Σ_A των κυρίων αξόνων
- Το δεύτερο είναι χρήσιμο γιατί σε αυτό ο πίνακας ροπής αδράνειας είναι διαγώνιος.
- Δεν πρέπει όμως να ξεχνάμε ότι το Σ_A των κυρίων αξόνων είναι μη αδρανειακό καθώς κινείται μαζί με το σώμα.



Τα συστήματα αναφοράς $\Sigma_I (x_I, y_I, z_I)$ με αρχή αξόνων O_I (αδρανειακό) και Σ με αρχή αξόνων $O (x, y, z)$ (μη αδρανειακό) το οποίο κινείται μαζί με το σώμα.



Θεώρημα Coriolis

- Η χρονική μεταβολή μιας διανυσματικής ποσότητας \underline{P} στο αδρανειακό ΣΑ συνδέεται με αυτή του μη αδρανειακού (Περιστρεφόμενο με γωνιακή ταχύτητα $\underline{\Omega}$) με τη σχέση:

$$\left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{inertial} = \left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{rotating} + \vec{\Omega} \times \vec{P}$$

- Όπου ο δείκτης 'inertial' είναι το αδρανειακό ΣΑ και 'rotating' είναι το μη αδρανειακό/περιστρεφόμενο ΣΑ
- Άρα για την στροφορμή του συστήματος

$$\vec{T} = \left(\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{inertial} = \left(\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{rotating} + \vec{\Omega} \times \vec{H}$$

- όπου επιλέξαμε το ΜΑ/περιστρεφόμενο σύστημα να είναι το σύστημα αναφοράς των κυρίων αξόνων (ΚΑ). Στο ΚΑ ο πίνακας ροπής αδράνειας είναι διαγώνιος, για ένα οποιοδήποτε σώμα έχει τρία στοιχεία (κύριες ροπές αδράνειας) I_x, I_y και I_z .

Θεώρημα Coriolis - Εξισώσεις του Euler

- Αντικαθιστώντας, οι εξισώσεις κίνησης γράφονται στην μορφή:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_x \omega_x \\ I_y \omega_y \\ I_z \omega_z \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ I_x \omega_x & I_y \omega_y & I_z \omega_z \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_x \dot{\omega}_x \\ I_y \dot{\omega}_y \\ I_z \dot{\omega}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_z \omega_y (I_z - I_y) \\ \omega_x \omega_z (I_x - I_z) \\ \omega_y \omega_x (I_y - I_x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Επομένως οι εξισώσεις κίνησης δίνονται από

$$T_x = I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_z \omega_y$$

$$T_y = I_y \dot{\omega}_y + (I_z - I_x) \omega_z \omega_x$$

$$T_z = I_z \dot{\omega}_z + (I_x - I_y) \omega_x \omega_y$$

- που είναι γνωστές ως Εξισώσεις του Euler
- Με αυτές τις εξισώσεις μπορούμε πλέον να προβλέψουμε την περιστροφική κίνηση ενός διαστημικού οχήματος υπό την επήρεια εξωτερικών ροπών/διαταραχών



Κίνηση Προσανατολισμού (Attitude Motion) – Μέθοδοι

- Ανάλογα με την μέθοδο ελέγχου της κίνησης προσανατολισμού μπορούμε να τους χωρίσουμε σε κατηγορίες
- Η πρώτη υποκατηγορία είναι ανάμεσα σε δορυφόρους με σημαντική στροφορμή (λόγο περιστροφής του δορυφόρου ή μέρος αυτού) και αυτής που δεν έχουν κάποια μεροληψία/τάση (bias) στροφορμής
- Οι δορυφόροι χρησιμοποιούν διαφορετικές στρατηγικές κίνησης προσανατολισμού σε διαφορετικές στιγμές, για παράδειγμα, πολλοί δορυφόροι περιστρέφονται πριν την πυροδότηση ενός πυραυλοκινητήρα υψηλής ώσης για να τους δώσουν γυροσκοπική ακαμψία/ευστάθεια (gyroscopic rigidity)

Παράδειγμα: https://www.youtube.com/watch?v=n_6p-1J551Y

Εξωτερικές ροπές/ External Torques

	Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Πρωθητές	Μη εξαρτώμενο με το τροχιακό ύψος Για οποιαδήποτε τροχιά Παράγει ροπές σε όλους τους άξονες	Απαιτεί καύσιμο Προβλήματα μόλυνσης
Μαγνητική Ροπή	Δεν απαιτεί καύσιμο Το μέτρο της ροπής μπορεί να ελεγχθεί	Δεν παράγει ροπές στον κάθετο άξονα Εξαρτώμενη από το ύψος και το γεωγραφικό πλάτος Μαγνητική παρεμβολή
Βαθμίδα βαρύτητας	Δεν απαιτεί καύσιμο ή ισχύ	Δεν παράγει ροπές στον κάθετο άξονα Χαμηλή ροπή Εξαρτώμενη από το ύψος τροχιάς (φθίνει)
Ηλιακή ακτινοβολία	Δεν απαιτεί ισχύ	Χαμηλή ροπή



Εσωτερικές ροπές/Internal Torques

	Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Σφόνδυλοι Αντίδρασης (reaction wheels)	Για οποιαδήποτε τροχιά	Κινούμενα στοιχεία
Σφόνδυλοι Αδράνειας (Momentum wheels)	Τάση στροφορμής	Κινούμενα στοιχεία
Γυροσκόπια Ελεγχόμενης Ροπής (Control Moment Gyro)	Τάση στροφορμής Μεγάλες ροπές/ενισχυτής ροπών	Πολύπλοκο Προβλήματα αξιοπιστίας



Έλεγχος Προσανατολισμού – Πρωθητές Attitude Control

- Χρησιμοποιούνται σε ζεύγη ή συστάδες
- Χρησιμοποιούν κοινά καύσιμα σωληνώσεις με μεγαλύτερες πυραυλοκινητήρες (π/χ κινητήρες τροχιάς)
- Χρησιμοποιούνται για τον αποκορεσμό σφονδύλων/επενεργητών (αφαίρεση στροφορμής)
- Διάφορα καύσιμα N_2 , $MMH+N_2O_4$, ηλεκτρική προώθηση (Xe , H_2O)
- Περιορισμός στα καύσιμα



Soyuz Docking – Thruster Firings

https://www.youtube.com/watch?v=scGc1NS_IV8

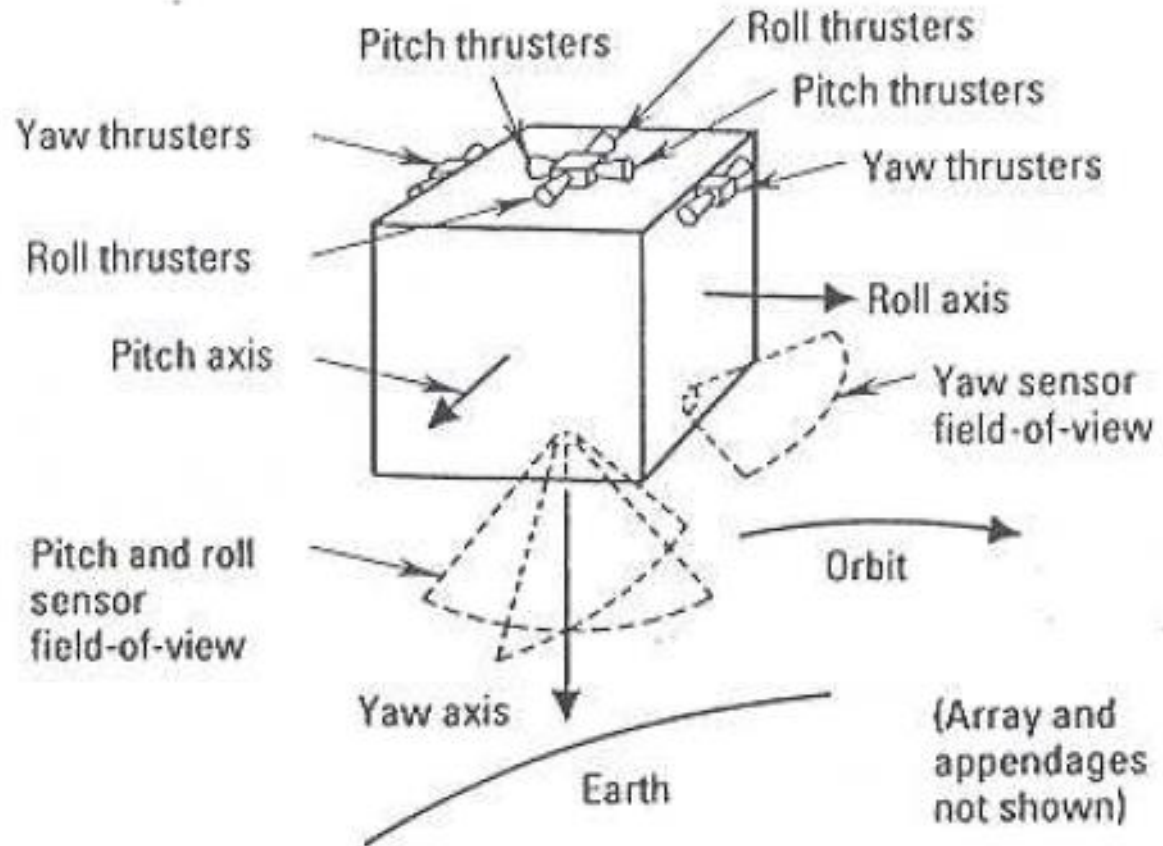


Ροπές Προωθητών

- Ζεύγος δυνάμεων από ζεύγος προωθητών
- Ειδική Ώθηση (Specific Impulse), είναι ο λόγος της ταχύτητας καυσαερίων V_e προς την επιτάχυνση της βαρύτητας g : $I_{sp} = V_e/g$
- Ώση $F = V_e(dm/dt)$, όπου dm/dt είναι ο ρυθμός κατανάλωσης καυσίμων (propellant)
- Δύο προωθητές σε απόσταση d από το κέντρο μάζας με αντίθετη κατεύθυνση (για να δημιουργήσουν ένα ιδανικό ζεύγος) προκαλούν μία ροπή T
- $T = 2 \cdot F \cdot d = 2 \cdot g \cdot I_{sp} \cdot (dm/dt) \cdot d$ [Nm]

Έλεγχος Προσανατολισμού – 3 Axis control

Reaction Control System



Άσκηση

Ένας μικροδορυφόρος είναι σε τροχιά 700 χλμ με μάζα 100 kg με γεωμετρικό σχήμα κύβου με μήκος πλευράς 1m και ένα ζεύγος κινητήρων προώθησης (thruster) 0.5N το καθένα. Υπολογίστε:

- Την ροπή αδράνειας στους τρεις κύριους άξονες (X, Y, Z) αν ένα κύβο έχουμε $I = (m/12)(b^2+c^2)$
- Πόση ώρα χρειάζεται ώστε ο δορυφόρος να μπει σε σταθερό ρυθμό περιστροφής 10 rpm (revolutions per minute) χρησιμοποιώντας το ζεύγος κινητήρων προώθησης;
- Την στροφορμή του μικροδορυφόρου
- Την δύναμη (thrust level/force) που χρειάζεται ώστε να ακυρωθεί πλήρως η στροφορμή του δορυφόρου, χρησιμοποιώντας πυροδοτήσεις των κινητήρων προώθησης του 1s, για να διατηρηθεί η αρχή διατήρησης της ορμής



Μαγνητική Ροπή

- Οι μηχανισμοί μαγνητικής ροπής είναι επενεργητές που παράγουν ροπή μαγνητικού δίπολου (magnetic dipole moment) που παράγεται από τη διέλευση ρεύματος μέσω ενός πηνίου και η οποία αλληλοεπιδρά με το μαγνητικό πεδίο της Γης, δημιουργώντας εξωτερικές ροπές στο δορυφόρο.
- Η αποτελεσματικότητα των μηχανισμών αυτών εξαρτάται άμεσα από την ισχύ του μαγνητικού πεδίου της Γης η οποία ελαττώνεται καθώς αυξάνεται το ύψος τροχιάς του δορυφόρου.
- Έτσι, η χρήση τους περιορίζεται κυρίως σε δορυφόρους που βρίσκονται στη Χαμηλή Περίγεια Τροχιά (Low Earth Orbit, LEO) όπου το γεωμαγνητικό πεδίο είναι σχετικά ισχυρό.
- Αντίθετα, η εφαρμογή τους στη Γεωστατική Τροχιά (Geostationary Orbit, GEO) καθώς και σε μεγαλύτερες τροχιές είναι δύσκολη αφού εκεί το μαγνητικό πεδίο είναι ασθενές και επηρεάζεται από την ηλιακή ακτινοβολία.



Μαγνητική Ροπή

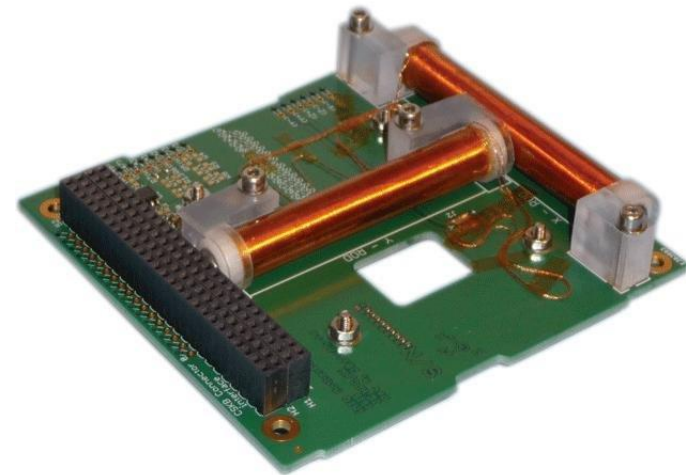
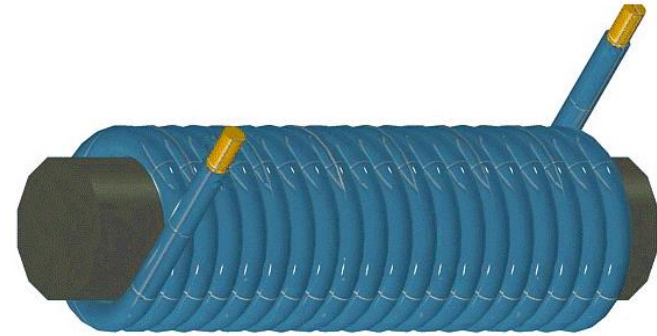
- Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ένας δορυφόρος αντιδρά με το μαγνητικό πεδίο της Γης και παράγει ένα εξωτερικό ζεύγος δυνάμεων
- Αν το μαγνητικό δίπολο – ροπή είναι $\underline{\mathbf{m}}$ και η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι $\underline{\mathbf{B}}$ τότε η ροπή είναι:

$$\underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{m}} \times \underline{\mathbf{B}}$$

- Χρησιμοποιούμε ηλεκτρομαγνήτες (πηνία) για να δημιουργήσουμε τέτοιες ροπές με μηχανισμούς που αποτελούνται από 'n' σπείρες τυλιγμένα σε ράβδους σιδηρομαγνητικού υλικού με διάμετρο A τα οποία διαπερνά ρεύμα I:

$$\underline{\mathbf{T}} = nIA(\hat{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{B}})$$

- Όπου $\hat{\mathbf{a}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην σπείρα



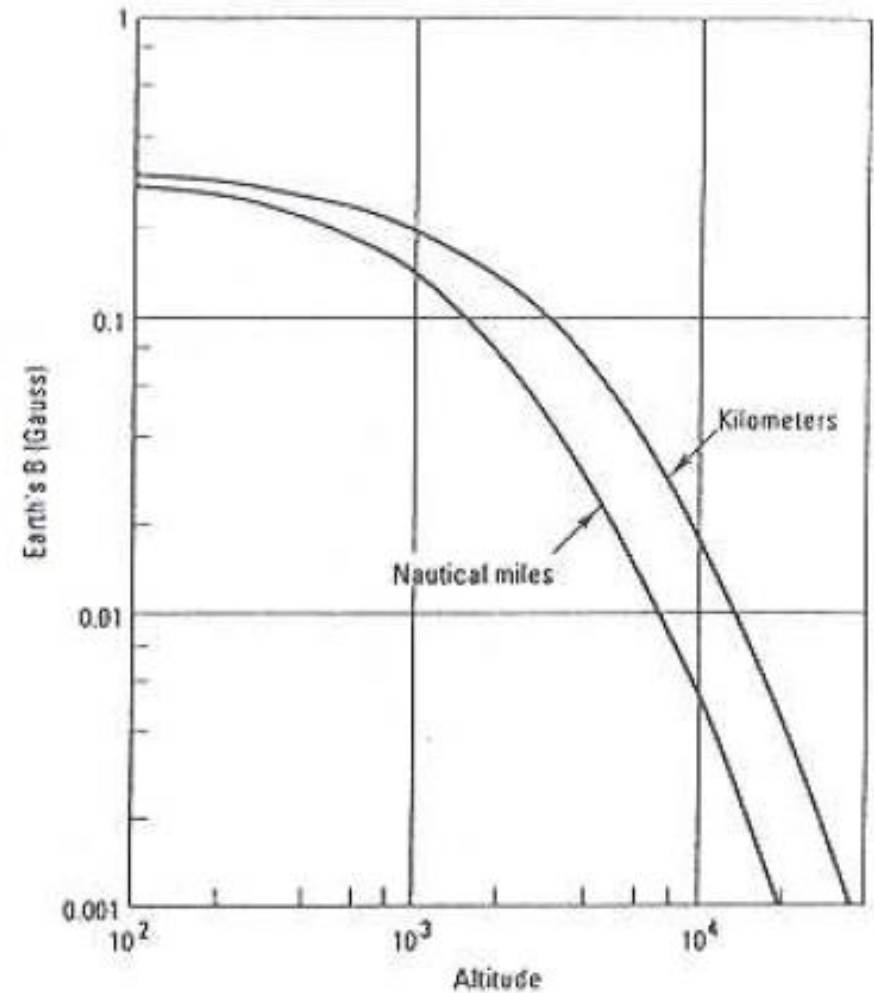


Μαγνητική Ροπή

- Το μαγνητικό πεδίο της Γης είναι διπολικό και φθίνει κατά $1/r^3$ της απόστασης από το κέντρο του δίπολου.
- Αν και φθίνει σημαντικά στο ύψος GEO, εξακολουθεί να είναι χρήσιμο
- Επειδή το μαγνητικό πεδίο της Γης μεταβάλετε σε ένταση και κατεύθυνση σε τροχιά, οι δορυφόροι είναι εξοπλισμένοι με μαγνητόμετρα για να μετρούν το μαγνητικό πεδίο
- Δεν υπάρχει συνιστώσα της μαγνητικής ροπής γύρω από την τοπική διεύθυνση του πεδίου
- Η μέγιστη ροπή είναι στον άξονα κάθετα στην διεύθυνση του πεδίου

Ένταση Μαγνητικού Πεδίου

Earth's Magnetic Field Strength





Ασκήσεις

1. Ένας σφόνδυλος αδράνειας στον άξονα γ (Pitch axis) σε έναν γεωστατικό δορυφόρο σταματά να λειτουργεί, κάνοντας τον να επιβραδύνει από τα 5000 rpm στο μηδέν. Ποια θα είναι η αντίδραση του δορυφόρου και γιατί; Αν περιστρέφεται ο δορυφόρος, να υπολογίσετε τον ρυθμό περιστροφής αν $I_{wheel} = 0.5 \text{ kg m}^2$ και $I_{sat} = 500 \text{ kg m}^2$
2. Ένας δορυφόρος με τάση στροφορμής (αρχική στροφορμή) έχει ένα σφόνδυλο αδράνειας (Momentum wheel) στον άξονα γ (pitch). Θέλουμε να αλλάξουμε την γωνία αυτή μόνο κατά 30° σε 10 s. Πόσο θα πρέπει να αλλάξει ο ρυθμός περιστροφής του σφονδύλου αδράνειας για να πραγματοποιηθεί ο ελιγμός; $I_{sat} = 250 \text{ kg m}^2$, $I_{wheel} = 2.5 \text{ kg m}^2$, $\Omega_1 = 30^\circ/10s = 3^\circ/s$.
3. Το μαγνητικό δίπολο της Γης μπορεί περιγράφεται από την εξίσωση:

$$B = 2.6 \cdot 10^{11} \frac{B_0}{r^3} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda} \quad [\text{tesla}]$$

Όπου r είναι η απόσταση του δορυφόρου από το κέντρο της Γης, λ είναι το γεωμαγνητικού γεωγραφικό πλάτος και B_0 είναι η πυκνότητα μαγνητικής ροής στο γεωμαγνητικό ισημερινό ($3 \cdot 10^5 \text{ Tesla}$). Να υπολογίσετε το μέτρο του μαγνητικού πεδίου B για τα υψόμετρα 300 km και γεωστατικής τροχιάς. Να κάνετε την γραφική παράσταση του B με το ύψος (Excel).