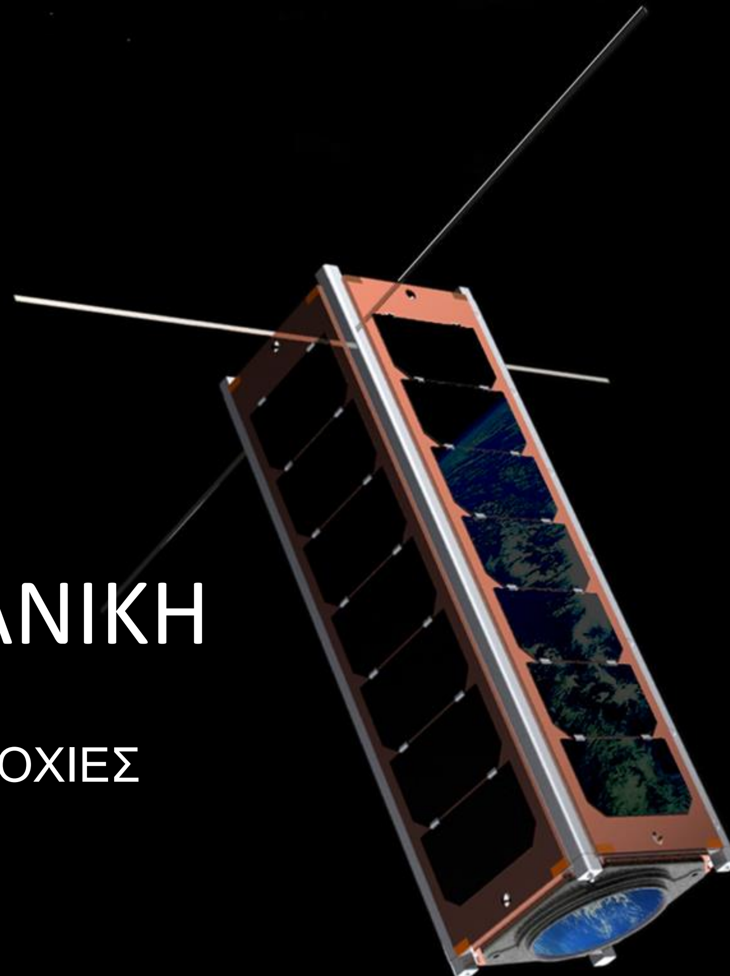
ΤΡΟΧΙΑΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΤΡΟΧΙΕΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

MEA_AM30 Space Technologies/Διαστημικές Τεχνολογίες

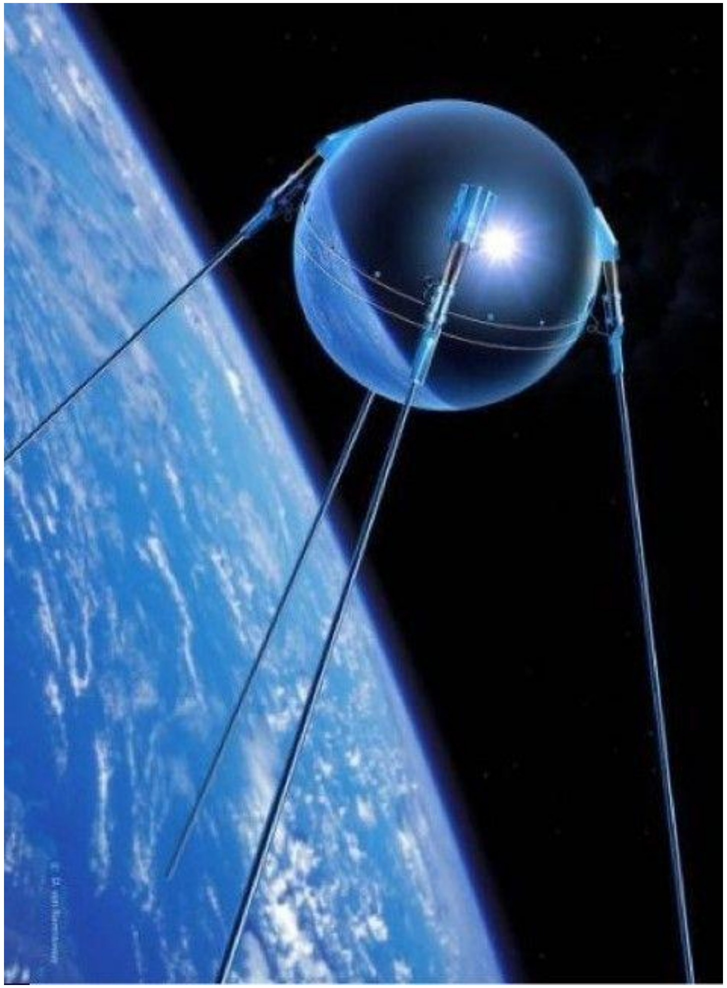
Prof V. Lappas, Prof V. Kostopoulos
Email: vlappas@upatras.gr

Δορυφόρος

- Ως *δορυφόρος* ορίζεται επιστημονικά οποιοιδήποτε αντικείμενο περιστρέφεται γύρω από ένα πλανήτη.
- Για παράδειγμα, η σελήνη είναι φυσικός δορυφόρος της Γης.
- Όπως όλοι γνωρίζουμε, υπάρχουν οχήματα τα οποία κινούνται γύρω από την Γη και ονομάζονται *τεχνητοί δορυφόροι* (ή, για συντομία, απλώς δορυφόροι).
- Παρόλο που οτιδήποτε σε τροχιά γύρω από την Γη είναι δορυφόρος, ο όρος τυπικά χρησιμοποιείται για να περιγράψει ένα χρήσιμο αντικείμενο το οποίο τοποθετήθηκε σε τροχιά γύρω από την Γη σκοπίμως για να τελέσει μία ορισμένη αποστολή ή έργο.
- Συχνά ακούμε για μετρολογικούς, τηλεπικοινωνιακούς, επιστημονικούς, και στρατιωτικούς/κατασκοπευτικούς δορυφόρους οι οποίοι λειτουργούν σε διάφορες τροχιές (ύψη) και έχουν διαφορετικά φορτία/όργανα ανάλογα με τη αποστολή τους.

Ο Πρώτος Δορυφόρος

- Ο πρώτος δορυφόρος στο διάστημα ήταν ο σοβιετικός ***Σπούτνικ*** (*Sputnik*), ο οποίος εκτοξεύθηκε στις 4 Οκτωβρίου 1957.
- Ήταν μια μεταλλική μπάλα διαμέτρου 58 εκατοστών/βάρους 83 κιλών.
- Μετέφερε θερμόμετρο, μπαταρία, και ένα πομπό που μετέδιδε μια σειρά από τόνους οι οποίοι αντιστοιχούσαν στις αλλαγές της θερμοκρασίας.
- Το εσωτερικό του σκάφους περιείχε άζωτο. Επίσης υπήρχαν 4 κεραίες στο εξωτερικό του σκάφος για την μετάδοση του σήματος στην συχνότητα των 27 περίπου μεγακύκλων, δηλαδή σε μια διαδεδομένη και εύκολα «προσβάσιμη» συχνότητα για όλο τον κόσμο.
- Οι σημερινοί δορυφόροι είναι βεβαίως πιο περίπλοκοι όμως οι βασικές αρχές παραμένουν ίδιες.

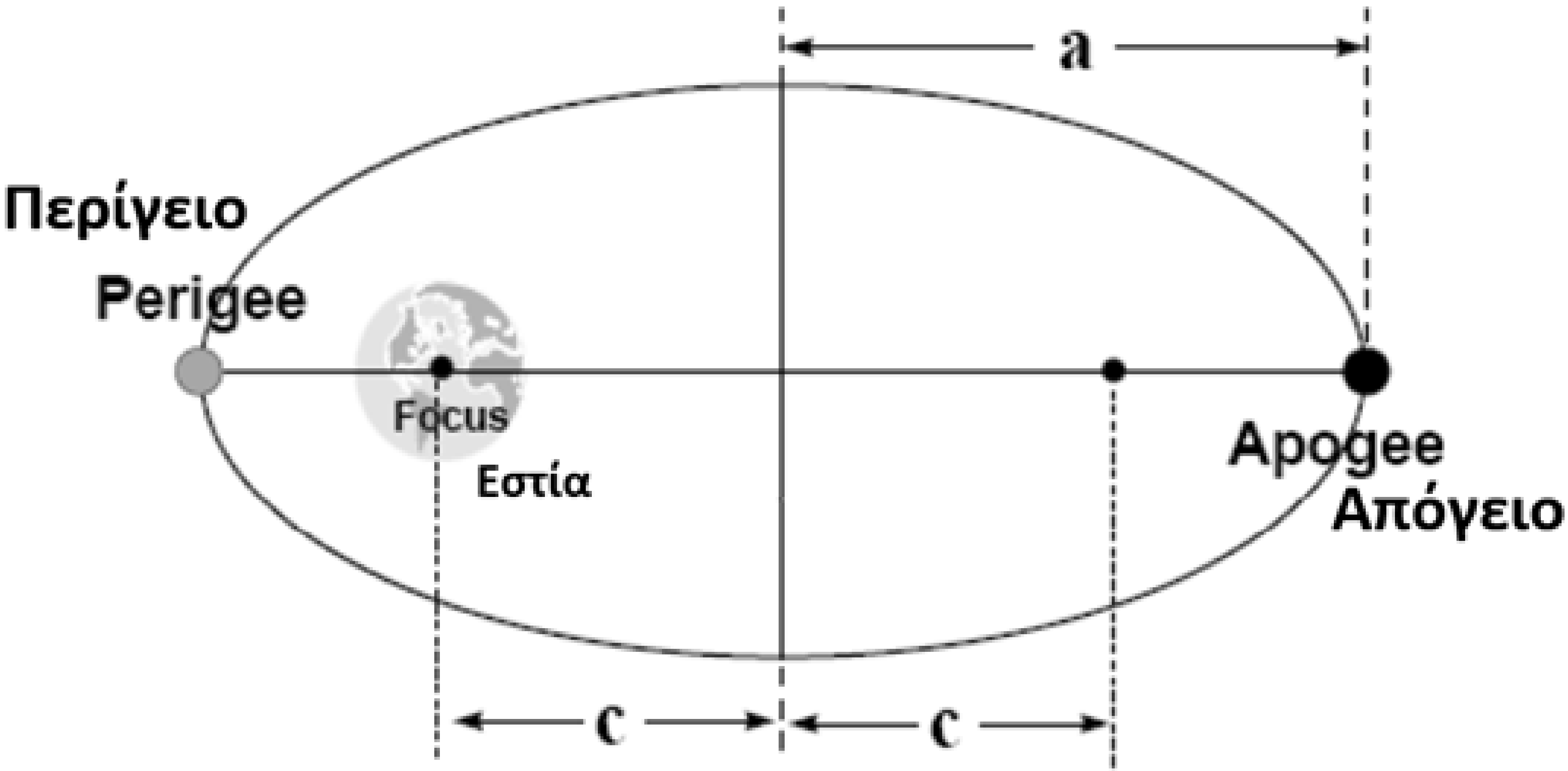


Σημερινοί Δορυφόροι

Τροχιές (Ι)

- *Η πορεία που ακολουθεί ένας δορυφόρος ονομάζεται τροχιά.*
- *Οι τροχιές είναι κυκλικές ή ελλειπτικές.* (Ακόμα και στη περίπτωση στην οποία οι δορυφόροι μπαίνουν σε σπειροειδή τροχιά συντριβής στην γήινη ατμόσφαιρα, η τροχιά τους είναι ελλειπτική με συνεχώς μεταβαλλόμενα χαρακτηριστικά.)
- *Στις κυκλικές τροχιές η απόσταση του δορυφόρου από την Γη είναι σταθερή.*
- *Στις ελλειπτικές, η Γη βρίσκεται σε μια από τις δύο εστίες.*
- Στην περίπτωση αυτή, όταν ο δορυφόρος βρίσκεται πιο κοντά στην Γη, τότε λέμε ότι βρίσκεται στο ***περίγειο***, ενώ όταν βρίσκεται στην πιο μακρινή θέση βρίσκεται στο ***απόγειο***

Τροχιές (ΙΙ)



Ελλειπτική Τροχιά

Τροχιές (ΙΙΙ)

- **Υπάρχουν τροχιές με ειδική σημασία και ονομασία:**
  - Οι *γεωσύγχρονες* τροχιές είναι αυτές με περίοδο (χρόνο περιστροφής γύρω από την Γη) όσο και ο χρόνος περιστροφής της Γης γύρω από τον εαυτό της (περίπου 24 ώρες).
  - Οι *γεωστατικές* είναι γεωσύγχρονες, κυκλικές τροχιές με κλίση 0^0. **Ο δορυφόρος παραμένει σε σταθερό σημείο πάνω από τον Ισημερινό.**
  - *Τροχιές Μολνίγια* (Molniya) : τροχιές με μεγάλη ελλειπτικότητα και κλίση.
  - *Πολικές* τροχιές: τροχιές με κλίση περίπου 90^0 (δηλαδή περνάνε πάνω από τους πόλους).
  - *Ηλιοσύγχρονες* τροχιές. Σταθερή γωνία δορυφόρου σε σχέση με τον Ήλιο.
  - *Ανάδρομες* τροχιές. Τροχιές με κατεύθυνση από την Ανατολή προς την Δύση

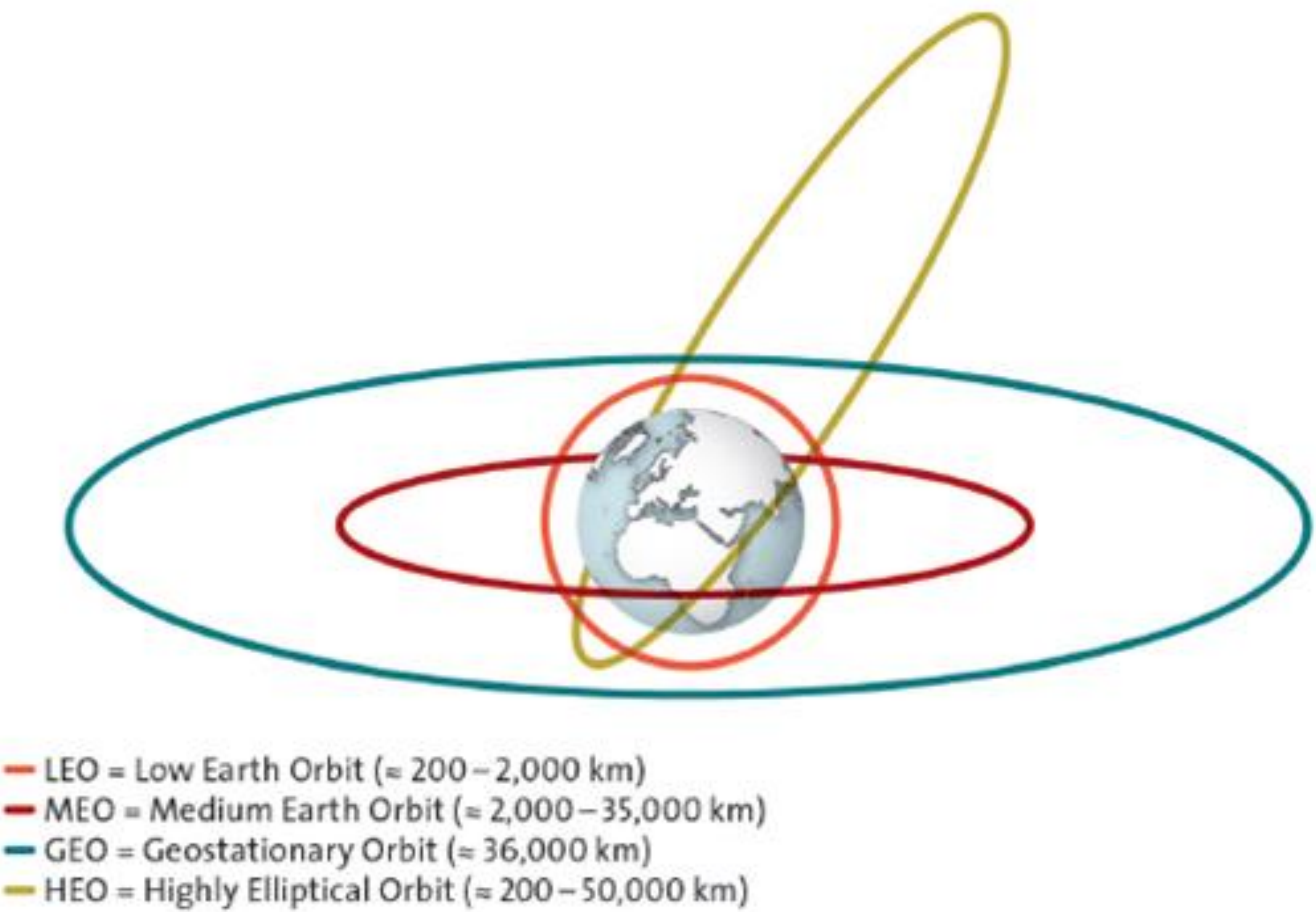
Τροχιές (IV)

- Η τροχιά κάθε δορυφόρου ***εξαρτάται από την αποστολή*** του κάθε δορυφόρου και βεβαίως αποτελεί βασική παράμετρο του σχεδιασμού.
- Πρέπει να αναφερθεί ότι οι δορυφόροι σε χαμηλές τροχιές γύρω από την Γη κινούνται σε μόρια της γήινης ατμόσφαιρας και σε συνδυασμό με την υψηλή ταχύτητά τους υπόκεινται σε οπισθέλκουσα.
- Η δύναμη αυτή προκαλεί μια σπειροειδή τροχιά και ο δορυφόρος εισέρχεται στην γήινη ατμόσφαιρα μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, το οποίο πολλές φορές είναι δύσκολο να υπολογισθεί με ακρίβεια.

Ύψη δορυφόρων

- Για τα ύψη των δορυφόρων υπάρχουν οι ακόλουθες γενικές παρατηρήσεις:
  - Σε ύψη από ***400 έως 2000 km*** *τοποθετούνται δορυφόροι* ***παρατήρησης*** για χαρτογράφηση, διαπίστωση μετακίνησης πάγου και άμμου (έρημος), διαπίστωση οικολογικών αλλαγών (εξαφάνιση δασών), έρευνα για αποθέματα μετάλλων, έρευνα με εφαρμογή στην γεωργία. Σε αυτό το εύρος βρίσκονται επίσης, *δορυφόροι* ***έρευνας και διάσωσης*** που αναμεταδίδουν σήματα κινδύνου καθώς και το Διαστημικό Λεωφορείο και ο Διαστημικός Σταθμός. Δορυφόροι σε αυτά τα ύψη λέγεται ότι βρίσκονται σε Χαμηλή Γήινη Τροχιά (ΧΓΤ)/Low Earth Orbit (LEO)
  - Στις τροχιές με ύψος ***2000 έως 30000 km*** ύψος βρίσκονται κυρίως ***δορυφόροι πλοήγησης ή επιστημονικοί δορυφόροι***. Αποστολή τέτοιων δορυφόρων είναι για παράδειγμα η συλλογή στοιχείων για το περιβάλλον και τα συστήματα προσδιορισμού θέσης, ταχύτητας και χρόνου. Δορυφόροι σε αυτά τα ύψη λέγεται ότι βρίσκονται σε Μέση Γήινη Τροχιά (ΜΓΤ)/Medium Earth Orbit (MEO)
  - Στις γεωστατικές τροχιές ***(ύψος 35780 km)*** *βρίσκονται* ***μετρολογικοί, τηλεπικοινωνιακοί, ραδιο/τηλεοπτικοί*** δορυφόροι. κ.α. Δορυφόροι σε αυτά τα ύψη λέγεται ότι βρίσκονται σε Γεωστατική Τροχιά (ΓΕΤ)/Geostationary Orbit (GEO)

Ύψη δορυφόρων – Γήινες Τροχιές



Γεωστατική τροχιά

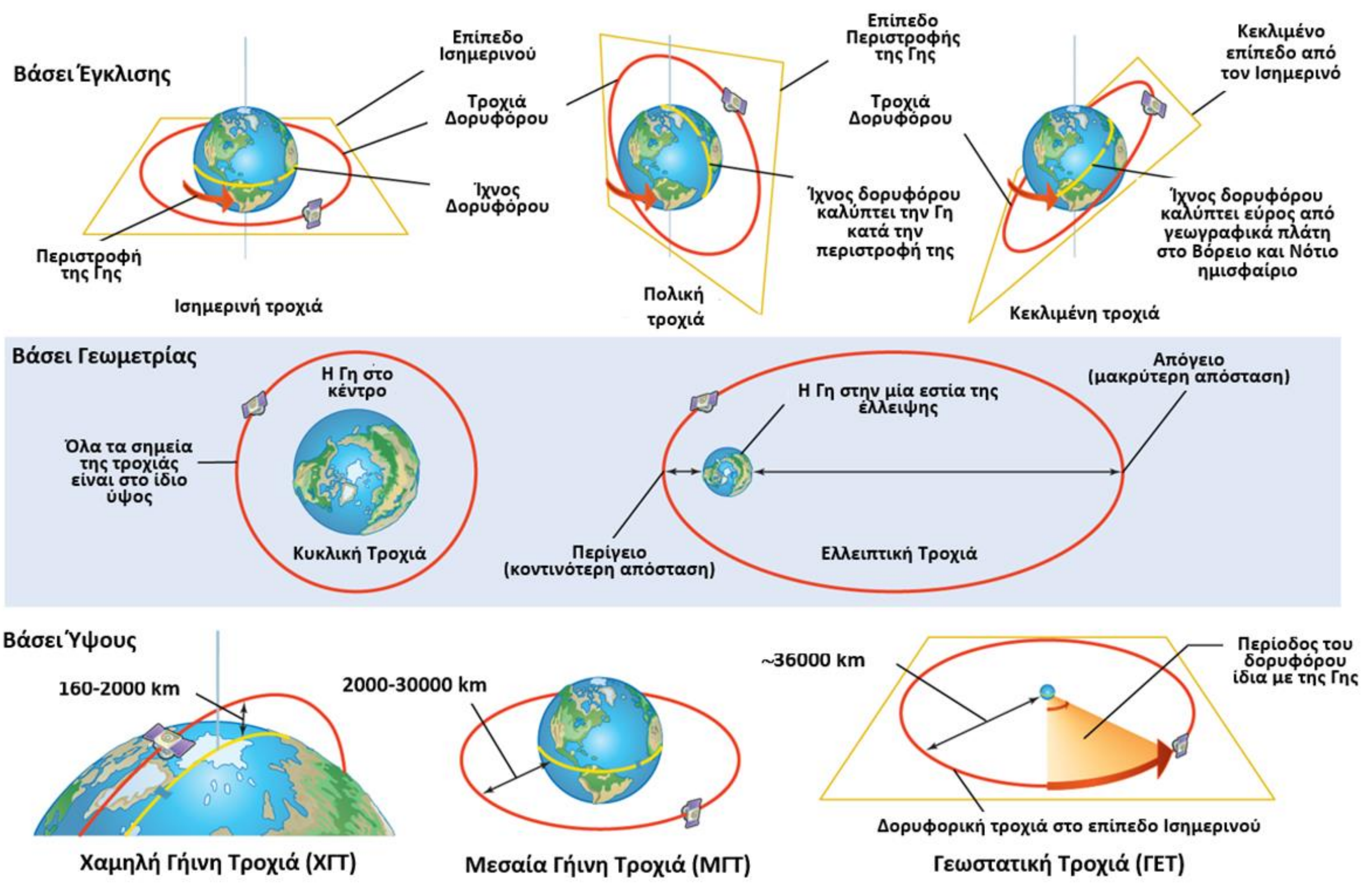
- Οι γεωστατικές τροχιές στα 36000 km πάνω από τον γήινο ισημερινό είναι γνωστές κυρίως για τους πολλούς τηλεπικοινωνιακούς δορυφόρους, συμπεριλαμβανομένων και των δορυφόρων για τα τηλεοπτικά σήματα.
- Τα σήματα από αυτούς τους δορυφόρους μπορούν να σταλθούν κυριολεκτικά σε κάθε άκρη της γης.
- Στις τηλεπικοινωνίες είναι αναγκαίο «να φαίνεται» ο δορυφόρος κάθε στιγμή και επομένως πρέπει να παραμένει στατικός στην ίδια θέση, σε σχέση με την επιφάνεια της γης.

Τηλεπισκόπηση

- Σε ό,τι αφορά την τηλεπισκόπηση, ένας στατικός δορυφόρος έχει το πλεονέκτημα ότι βλέπει πάντα τη γη από την ίδια οπτική γωνία, πράγμα που σημαίνει ότι έχει τη δυνατότητα να καταγράφει την ίδια εικόνα ανά τακτά χρονικά διαστήματα.
- Αυτή η ιδιότητα είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην παρατήρηση των καιρικών συνθηκών.
- Ένα μειονέκτημα των γεωστατικών τροχιών είναι η μεγάλη απόσταση από τη γη, γεγονός που μειώνει την μέγιστη δυνατή χωρική ανάλυση.
- Υπάρχουν αρκετοί μετεωρολογικοί δορυφόροι που έχουν κατανεμηθεί ομοιόμορφα σε γεωστατικές τροχιές γύρω από τη γη, παρέχοντας έτσι μια σφαιρική εικόνα των καιρικών φαινομένων σε ολόκληρο τον πλανήτη μας.

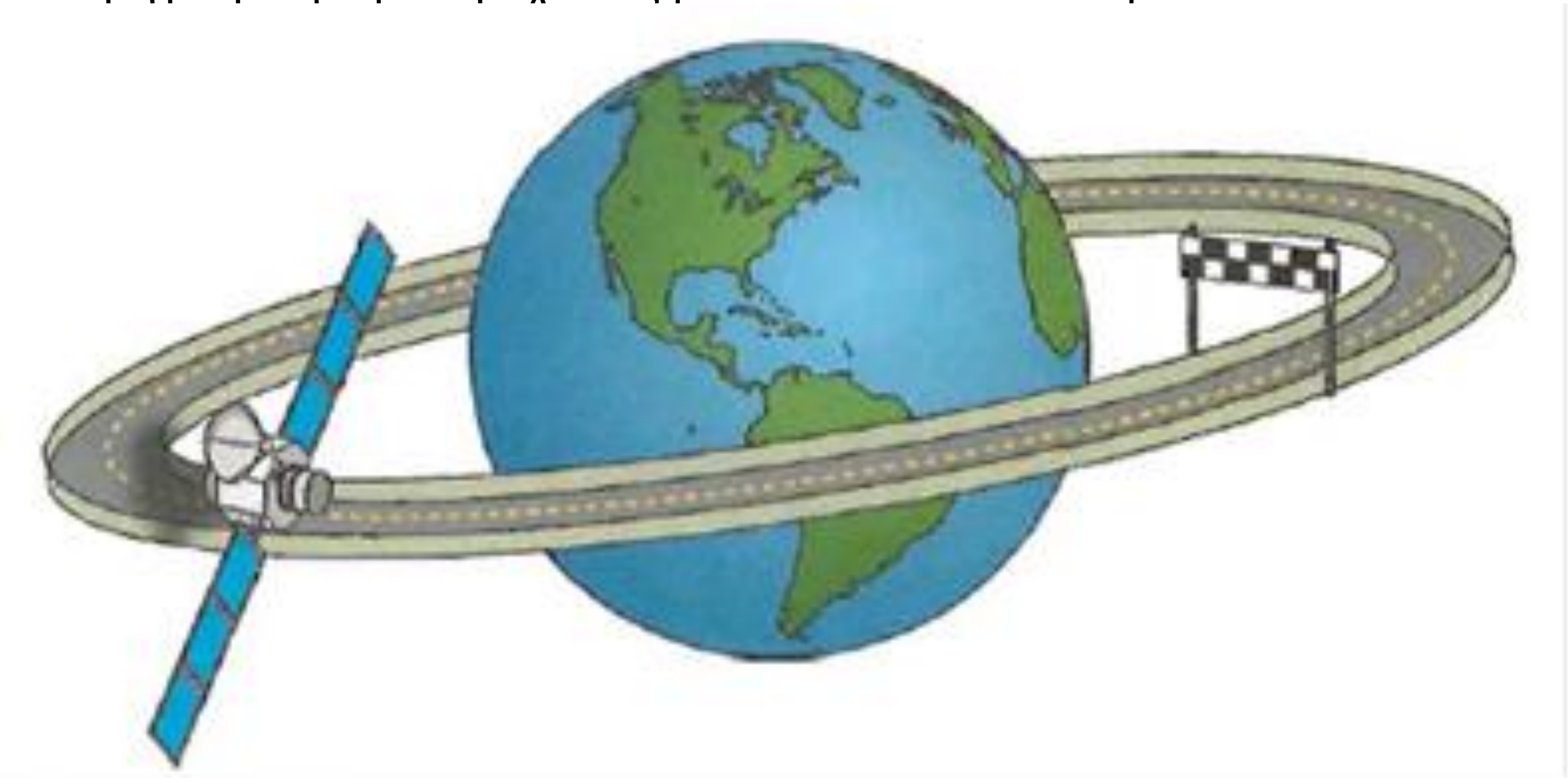
Ηλιοσύγχρονη τροχιά

- Οι δορυφόροι που είναι εξοπλισμένοι με συστήματα παθητικών αισθητήρων, εξαρτώνται από τον ηλιακό φως και επομένως από την τροχιά γύρω από τη γη.
- Επειδή οι αισθητήρες αυτοί μετρούν την αντανάκλαση του φωτός που προέρχεται από τον ήλιο και ανακλάται στη γη, οι τροχιές τους πρέπει να είναι προσαρμοσμένες στην εναλλαγή ημέρας-νύχτας.
- Είναι σημαντικό να μπορούμε να συγκρίνουμε τις εικόνες που καταγράφονται σε μια δεδομένη χρονική περίοδο.
- Προκειμένου να είναι συγκρίσιμες αυτές οι εικόνες, θα πρέπει οι συνθήκες φωτισμού να είναι ίδιες.
- Επομένως, οι καταγραφές θα πρέπει να πραγματοποιούνται την ίδια τοπική ώρα της ημέρας, έτσι ώστε ο ήλιος να βρίσκεται στο ίδιο σημείο πάνω από τον ορίζοντα και το επίπεδο της δορυφορικής τροχιάς να διατηρεί σταθερή γωνία ως προς το φως του ήλιου.
- Για να επιτευχθούν όλες αυτές οι προϋποθέσεις θα πρέπει ο δορυφόρος να κινείται σε πολική τροχιά
- **Ερώτηση:** Τι είναι πολική τροχιά και πια η διαφορά της με την ηλιοσύγχρονη τροχιά;


Βάσει Έγκλισης
Επίπεδο Ισημερινού
Τροχιά Δορυφόρου
Ίχνος Δορυφόρου
Περιστροφή της Γης
Ισημερινή τροχιά
Επίπεδο Περιστροφής της Γης
Ίχνος δορυφόρου καλύπτει την Γη κατά την περιστροφή της
Πολική τροχιά
Κεκλιμένο επίπεδο από τον Ισημερινό
Τροχιά Δορυφόρου
Ίχνος δορυφόρου καλύπτει εύρος από γεωγραφικά πλάτη στο Βόρειο και Νότιο ημισφαίριο
Κεκλιμένη τροχιά
Βάσει Γεωμετρίας
Η Γη στο κέντρο
Όλα τα σημεία της τροχιάς είναι στο ίδιο ύψος
Κυκλική Τροχιά
Η Γη στην μία εστία της έλλειψης
Απόγειο (μακρύτερη απόσταση)
Περίγειο (κοντινότερη απόσταση)
Ελλειπτική Τροχιά
Βάσει Ύψους
160-2000 km
Χαμηλή Γήινη Τροχιά (ΧΓΤ)
2000-30000 km
Μεσαία Γήινη Τροχιά (ΜΓΤ)
~36000 km
Περίοδος του δορυφόρου ίδια με της Γης
Δορυφορική τροχιά στο επίπεδο Ισημερινού
Γεωστατική Τροχιά (ΓΕΤ)

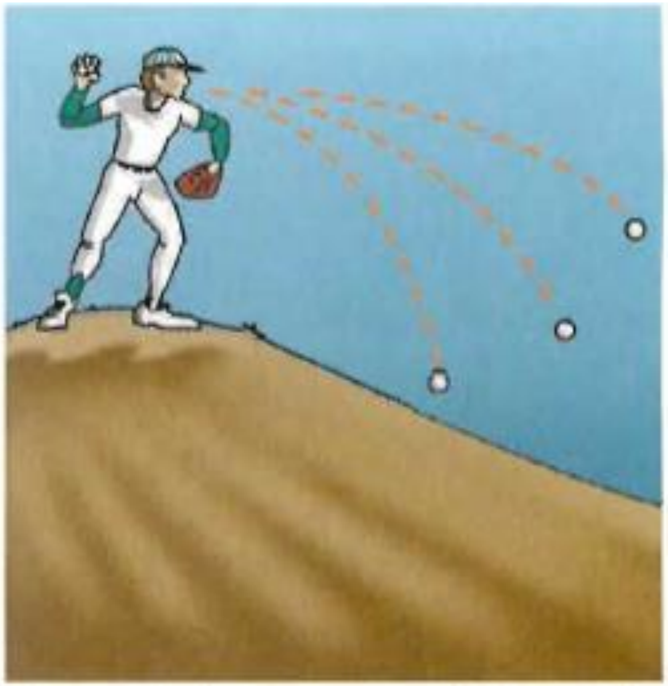
Κατανόηση/Ανάλυση Τροχιών

- Τα διαστημικά σκάφη λειτουργούν σε τροχιές. Μπορούμε να περιγράψουμε μια τροχιά ως μια «πίστα» πάνω στην οποία κινείται ένα

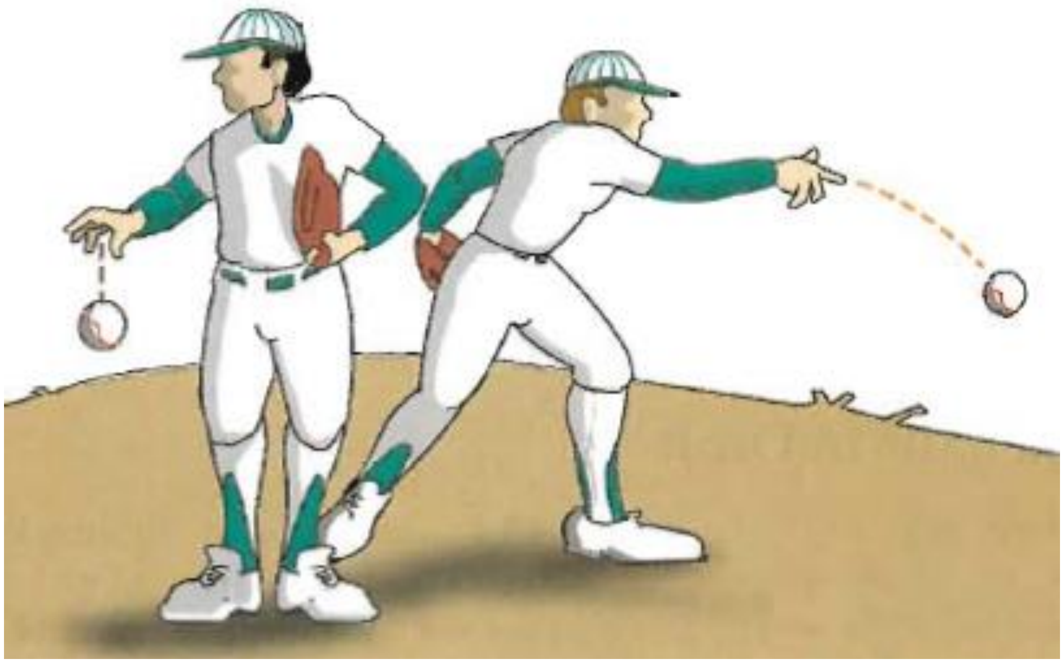


Τροχιά - Καμπύλη

Applied Mechanics Laboratory

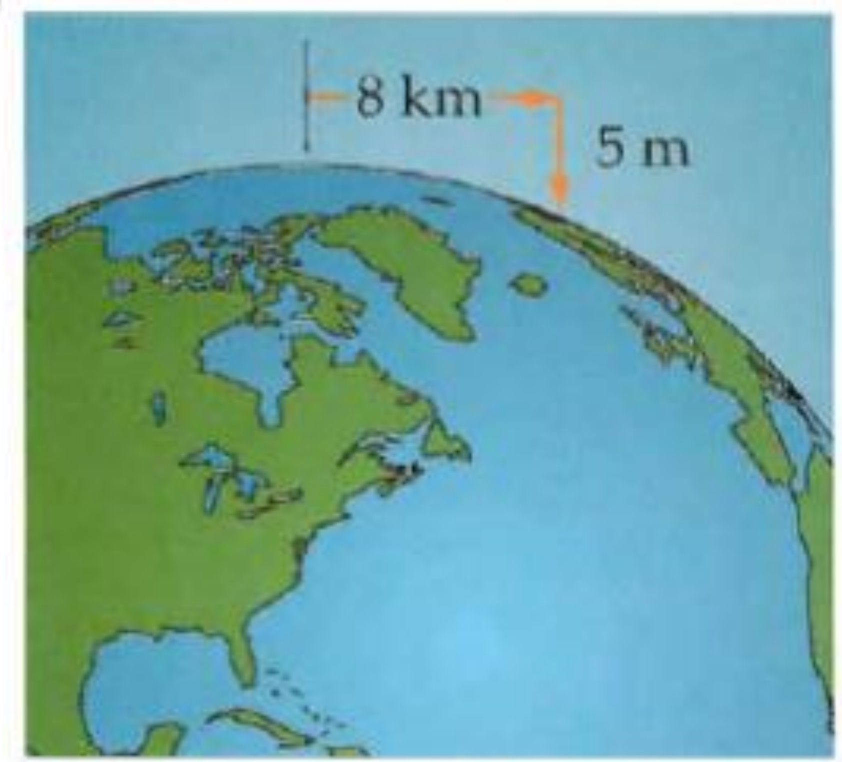


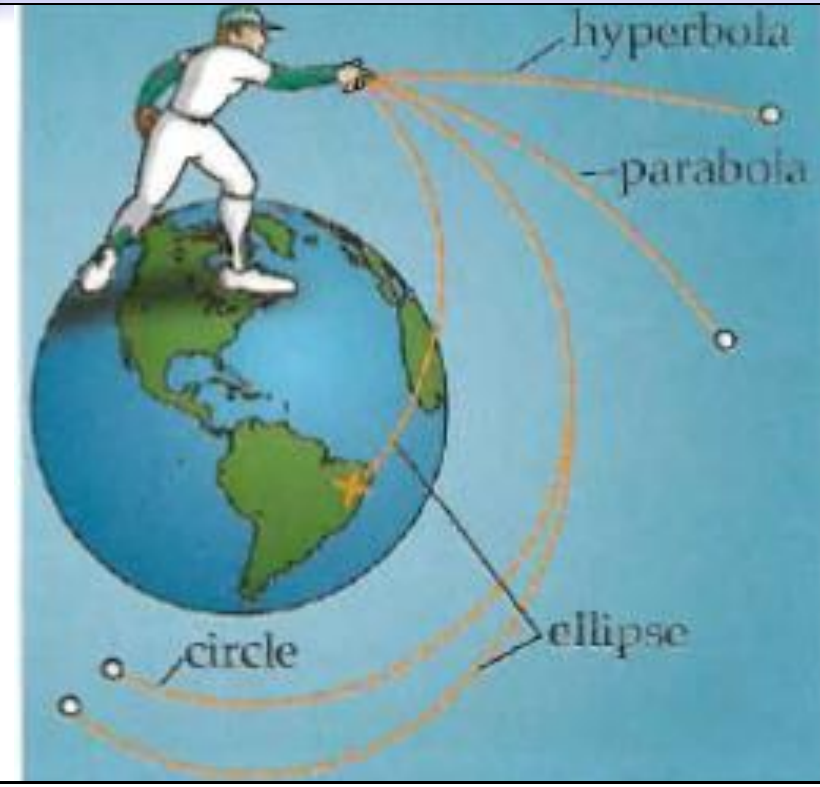
Σχήμα 1: Ρίχνοντας μπάλες του baseball από ένα βουνό. Ό,σο πιο γρήγορα τις πετάμε τόσο πιο μακριά πηγαίνουν (βολή)



Σχήμα 2: Ρίχνοντας μπάλες του baseball την ίδια στιγμή. Οι μπάλες πέφτουν στο έδαφος την ίδια στιγμή, καθώς η κάθετη και οριζόντια κίνησή τους είναι ανεξάρτητες

Τροχιά - Καμπύλη





Σχήμα 1: Η Καμπυλότητα της Γης κλίνει προς τα κάτω κατά 5μ για κάθε 8 χλμ οριζόντιας κίνησης	**Σχήμα 2: Ανάλογα με την ταχύτητα που πετάμε την μπάλα, η καμπυλότητα της Γης θα φθίνει. Στην σωστή ταχύτητα θα μπει σε κυκλική τροχιά. ΑΝ πάει πιο γρήγορα θα ξεφύγει από την Γη (παραβολή/υπερβολή)**

Τροχιά – Κωνικές Τομές

- **Αν αναλύσουμε τις διάφορες τροχιές από τις μπάλες του μπέιζμπολ, προκύπτει μια ολόκληρη σειρά από διαφορετικά σχήματα.**

- **Μόνο μία ταχύτητα παράγει μια τέλεια κυκλική τροχιά. Οι βραδύτερες ταχύτητες προκαλούν την τροχιά να χτυπήσει τη Γη κάποια στιγμή.**

- **Αν σχεδιάζαμε την προβολή αυτής της τροχιάς στην επιφάνεια της Γης θα βλέπαμε ότι η τροχιά είναι ένα μέρος μια έλλειψης (μοιάζει με παραβολή, αλλά είναι στην πραγματικότητα έλλειψη).**

- **Η ρίψη μιας μπάλας με ταχύτητα ελαφρώς μεγαλύτερη από την κυκλική ταχύτητα, έχει επίσης ως αποτέλεσμα μια έλλειψη.**

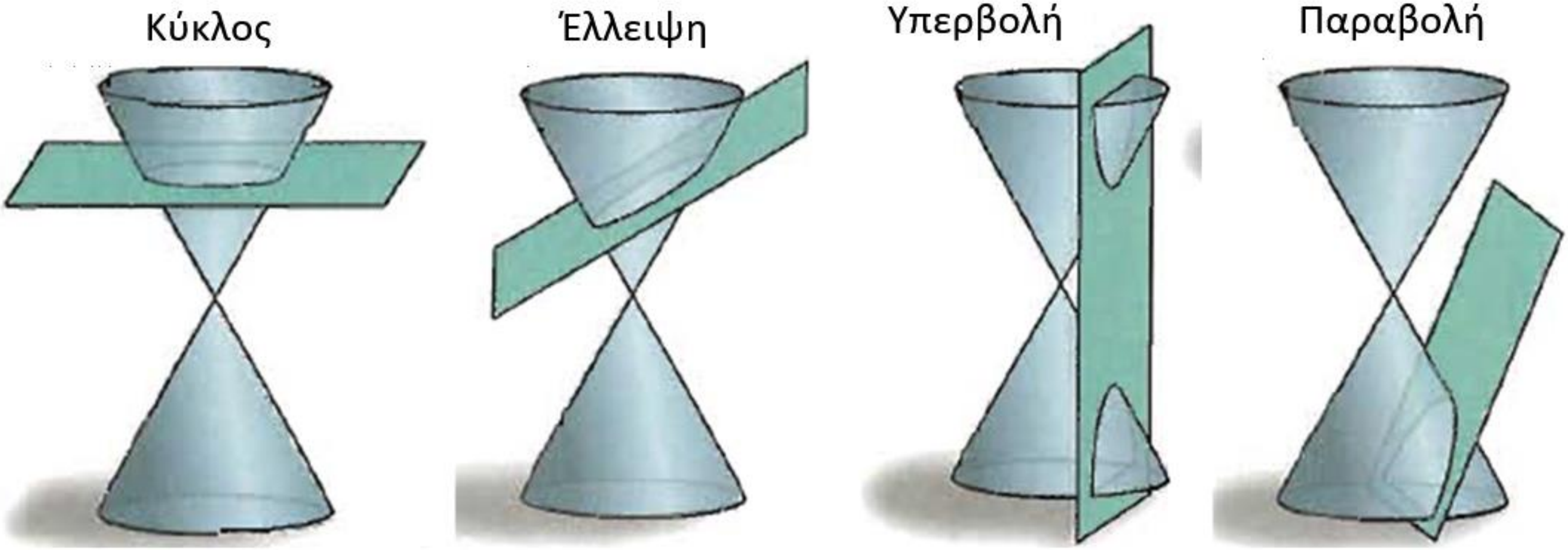
- **Εάν ρίξουμε την μπάλα με ακόμα μεγαλύτερη ταχύτητα, τότε ξεφεύγει από την βαρύτητα της Γη σε μια παραβολική ή υπερβολική τροχιά, χωρίς επιστροφή.**

- **Ανεξάρτητα από την ταχύτητα, μια τροχιά μπορεί να είναι κύκλος, έλλειψη, παραβολή ή υπερβολή.**

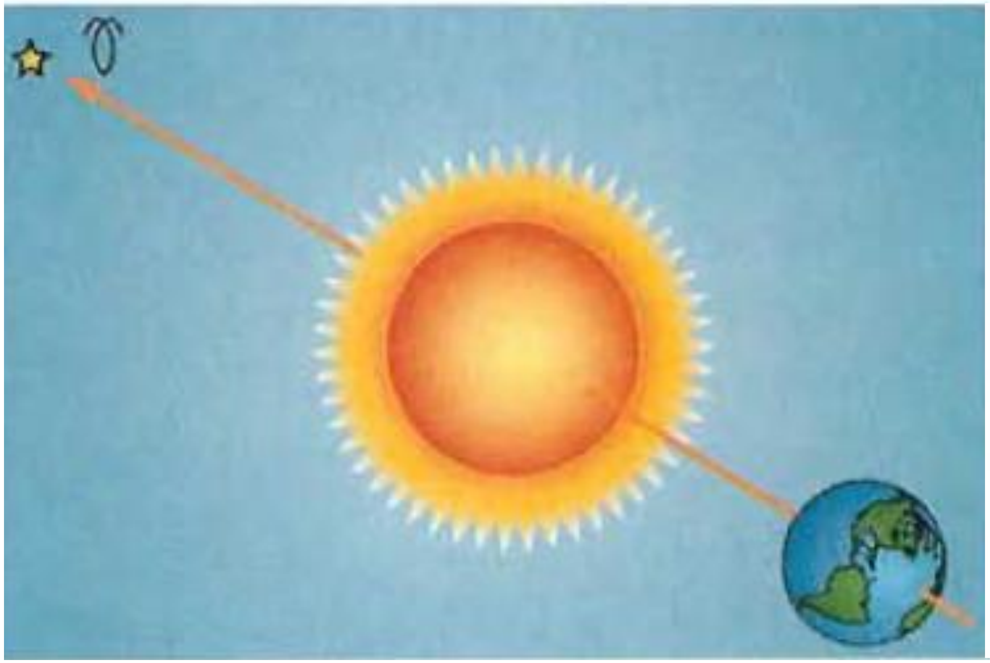
- **Όπως θα δούμε, αυτά τα τέσσερα σχήματα αποτελούν τις κωνικές τομές**

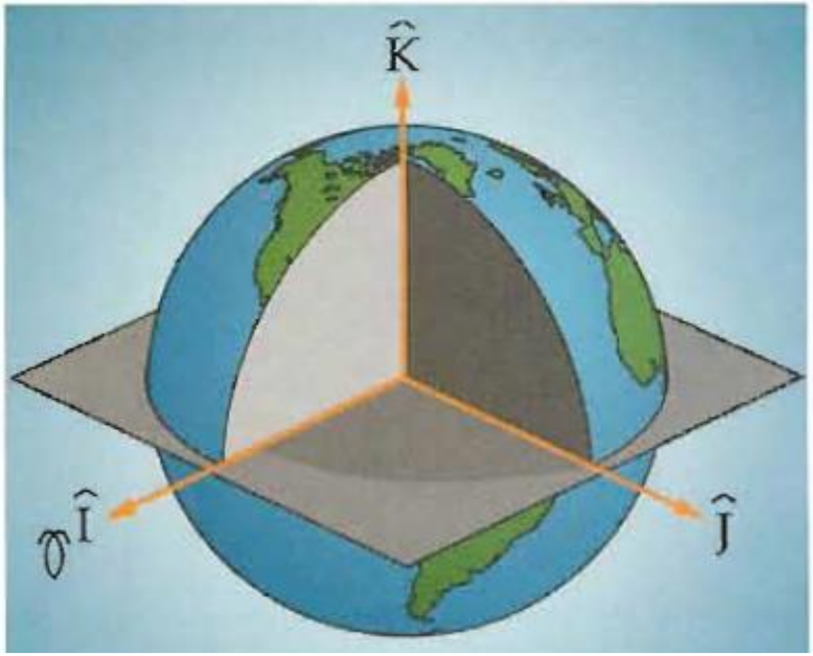
Κίνηση 2 Σωμάτων – Κωνικές Τομές

- Αυτή η εξίσωση είναι η λύση στην εξίσωση κίνησης δύο σωμάτων και περιγράφει τη θέση του διαστημικού σκάφους R σε όρους δύο σταθερών και πολικής γωνίας ν.
- Μπορεί να αναγνωρίσετε ότι αυτή η εξίσωση αντιπροσωπεύει επίσης μια γενική σχέση για κύκλο, έλλειψη, παραβολή ή υπερβολή, γνωστές και ως κωνικές τομές



Γεωκεντρικό-ισημερινό Σύστημα συντεταγμένων Τροχιές





Σχήμα 1: Διεύθυνση εαρινής ισημερίας είναι η ευθεία από την Γη στον Ήλιο την πρώτη μέρα της Άνοιξης – 21 Μαρτίου	Σχήμα 2: γεωκεντρικό-ισημερινό σύστημα συντεταγμένων

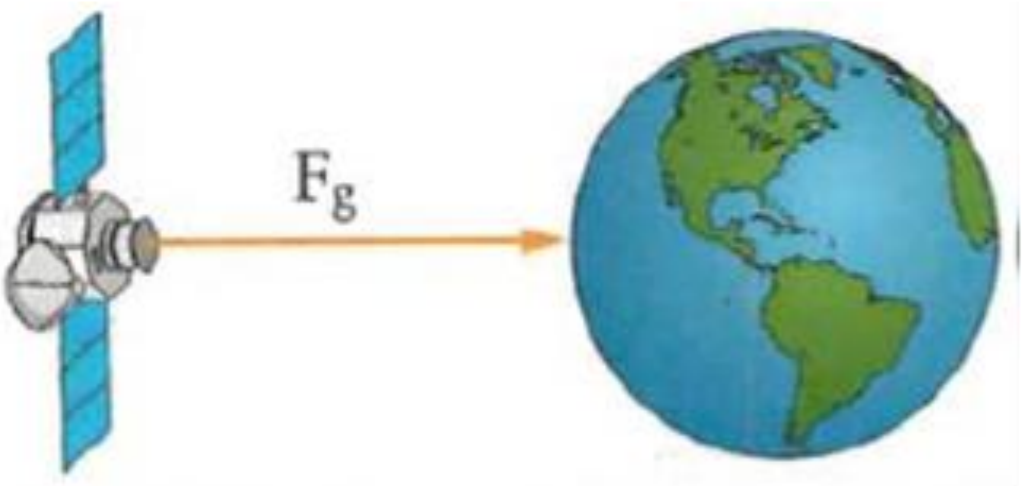
Γεωκεντρικό-ισημερινό σύστημα συντεταγμένων

- Η αρχή των αξόνων βρίσκεται στο κέντρο της Γης (εξ ου και το γεωκεντρικό όνομα)
- Θεμελιώδες επίπεδο είναι ο ισημερινός της Γης (εξ ου και γεωκεντρικός-ισημερινός). Κάθετο προς το επίπεδο του βόρειου πόλου.
- Η κύρια διεύθυνση είναι αυτή της εαρινής ισημερίας. Υπολογίζεται από την γραμμή που ενώνει τη Γη και τον Ήλιο την πρώτη μέρα της Άνοιξης,
- Ενώ αυτή η κατεύθυνση ίσως να μην φαίνεται "βολική" για εμάς, για τους αστρονόμους που καθόρισαν αρχικά το σύστημα είναι εξαιρετικά σημαντική.
- Ο τρίτος άξονας υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Υποθέσεις-Απλοποιήσεις (ΙΙ)

- Έτσι η μόνη δύναμη που ασκείται στο διαστημικό σκάφος είναι η βαρυτική δύναμη και η εξίσωση της κίνησης γίνεται

$$\Sigma\vec{F}_{external} = \vec{F}_{gravity} = m\vec{a}$$



Δεύτερος Νόμος Κίνησης του Νεύτωνα

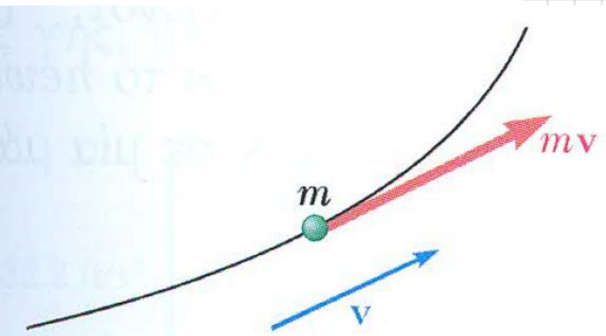
Εάν η συνισταμένη δύναμη που δρα επάνω σε ένα σωματίδιο δεν είναι μηδενική, το σωματίδιο έχει επιτάχυνση ανάλογη με το μέτρο της συνισταμένης και στην κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης.

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Επισημαίνουμε ότι το σύστημα αξόνων ως προς το οποίο προσδιορίζουμε την επιτάχυνση **a** δεν είναι αυθαίρετο. Οι άξονες αυτοί πρέπει να έχουν σταθερό προσανατολισμό ως προς τα άστρα, και το σημείο αφετηρίας τους πρέπει να είναι συνδεδεμένο στον ήλιο (ακριβέστερα, στο κέντρο μάζας του ηλιακού συστήματος) ή να κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς τον ήλιο. Ένα τέτοιο σύστημα αξόνων ονομάζεται **Νευτώνειο**

Γραμμική Ορμή ενός Σωματιδίου

$$\left.\begin{aligned} \Sigma \underline{F} &= m\underline{\alpha} \\ \underline{\alpha} &= \frac{d\underline{v}}{dt} \end{aligned}\right\} \Sigma \underline{F} = m\frac{d\underline{v}}{dt}$$



αν $m = const$

$$\Sigma \underline{F} = \frac{d}{dt}(m\underline{v})$$

$\underline{L} = m\underline{v}$ = γραμμική ορμή (ορμή)

$$\underline{L} = m\underline{v}$$

$$\frac{d\underline{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\underline{v}) \quad , \quad \alpha\nu \;\; m = const$$

$$\frac{d\underline{L}}{dt} = m\frac{d\underline{v}}{dt} = m\underline{\alpha} = \underline{F}$$

$$\boxed{\underline{F} = \frac{d\underline{L}}{dt}}$$

Διεθνές σύστημα μονάδων (SI)

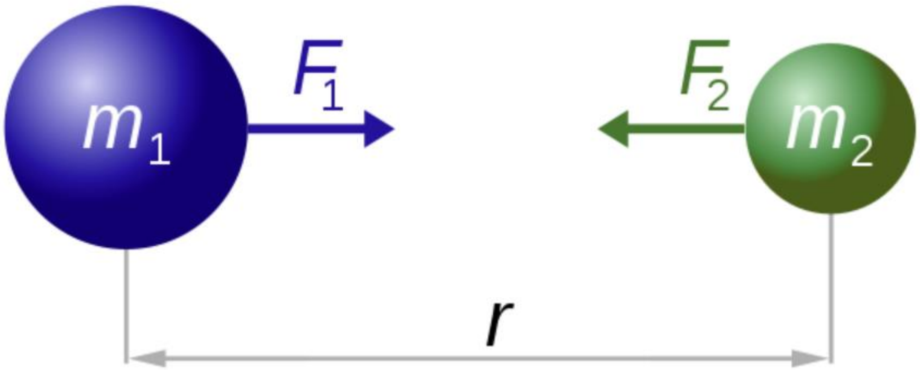
Υπόδειγμα $[M], [L], [T] \Rightarrow kg, m, s$

$$V = \frac{ds}{dt} \quad (m/s)$$

$$\alpha = \frac{dv}{dt} \quad (m/s^2)$$

$$\underline{F} = m\underline{\alpha} \quad \left(F_{\text{ονα}} = kg \cdot m/s^2 \Rightarrow F \ (\text{Newton}) \right)$$

ΝΟΜΟΣ της ΠΑΓΚΟΣΜΙΑΣ ΕΛΞΗΣ

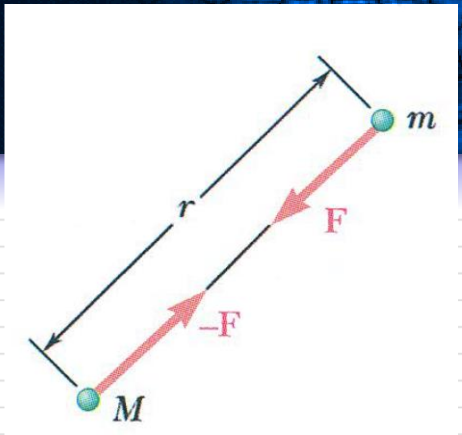


$$F_1 = F_2 = G\frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

G σταθερά της Παγκόσμιας Έλξης

G είναι $(66.73 \pm 0.03) \times 10^{-12}\ \mathrm{m^3/kg \cdot s^2}$

$$F = G\frac{Mm}{R^2}$$



αν M η μάζα της γης $= 5{,}972 \times 10^{24}$ kg

R η ακτίνα της γης $= 6{,}371 \times 10^{6}$ m

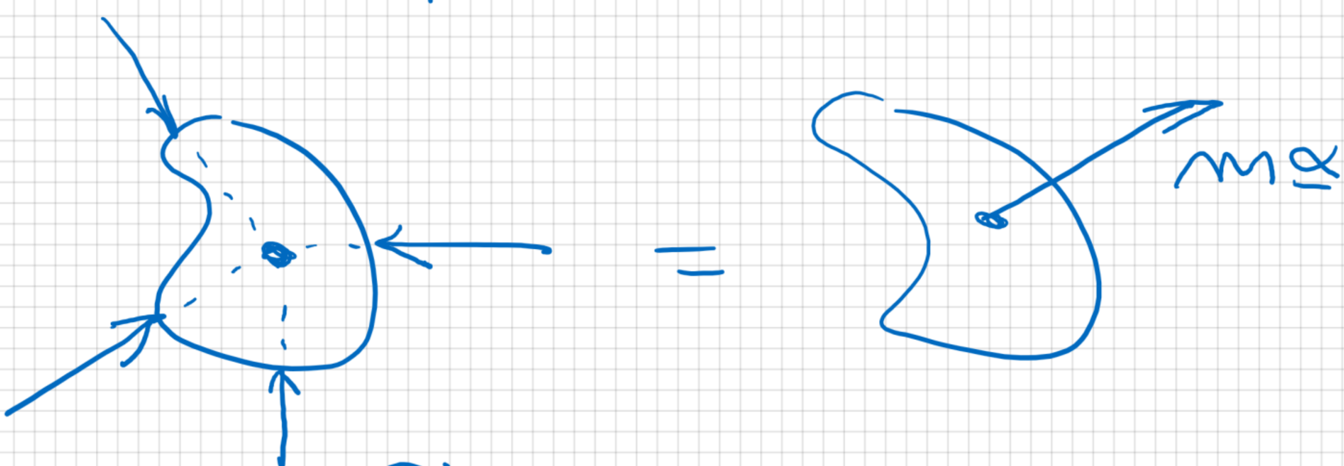
και $G = 66{,}73 \times 10^{-12}\ m^3/kg\,s^2$

τότε F είναι η δύναμη που η γη έλκει τη μάζα m

συνεπώς το ΒΑΡΟΣ

$$W = mg = G\frac{Mm}{R^2} \Longrightarrow \boxed{GM = gR^2}$$

Διαγραμματική αναπαράσταση του
2ου Νόμου του Νεύτωνα



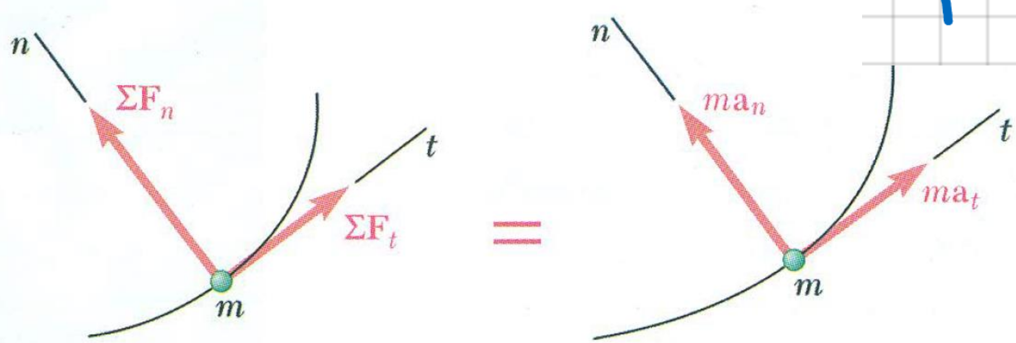
Διάγραμμα ελευθέρου σώματος = μάζα επί επιτάχυνση

Καρτεσιανό ΣΣ

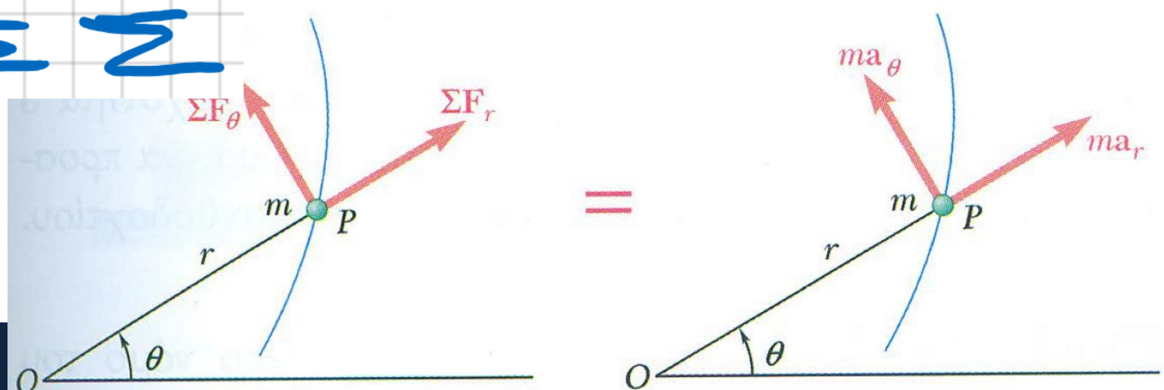
$$\Sigma(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}) = m(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})$$

$$\Sigma F_t = ma_t \qquad \Sigma F_n = ma_n$$

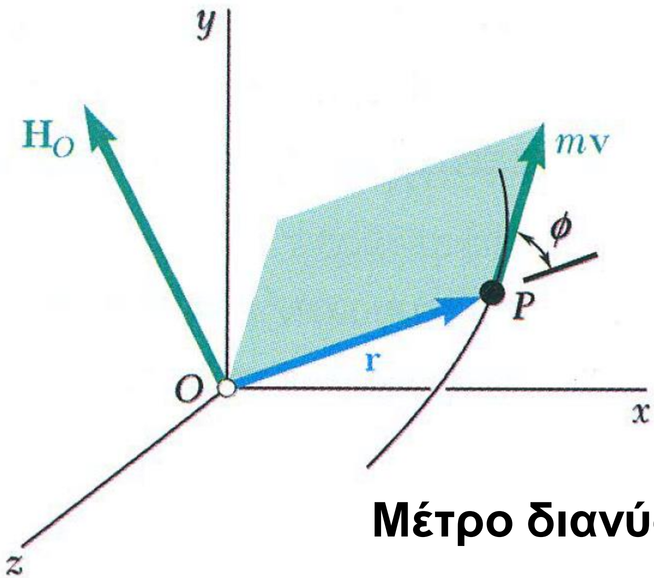
Φυσικό ΣΣ



Πολικό ΣΣ



Στροφορμή Υλικού Σημείου



$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

Μέτρο διανύσματος $H_o = m\, r\, v \sin\varphi$

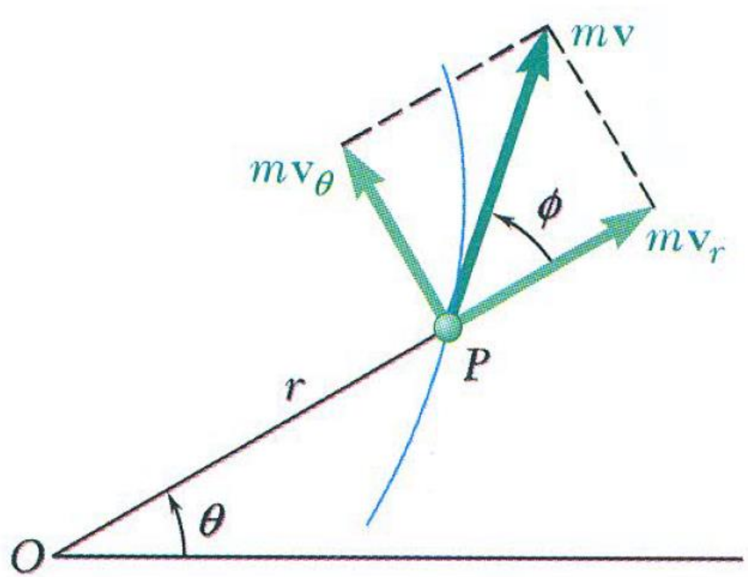
Μονάδες στροφορμής m kg m/s ⟶ kg m^2 / s

σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$

σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$H_x = m(y\upsilon_z - z\upsilon_y)$$
$$H_y = m(z\upsilon_x - x\upsilon_z)$$
$$H_z = m(x\upsilon_y - y\upsilon_x)$$



σε πολικές συντεταγμένες

$$H_O = rm\upsilon\sin\phi = rm\upsilon_\theta$$

όπου $\upsilon_\theta = r\dot{\theta}$

$$H_O = mr^2\dot{\theta}$$

Ρυθμός μεταβολής της ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ κινούμενου Υλικού Σημείου

$$\frac{d\underline{H}_o}{dt} = \frac{d}{dt}(\underline{r} \times m\underline{v}) \Rightarrow$$

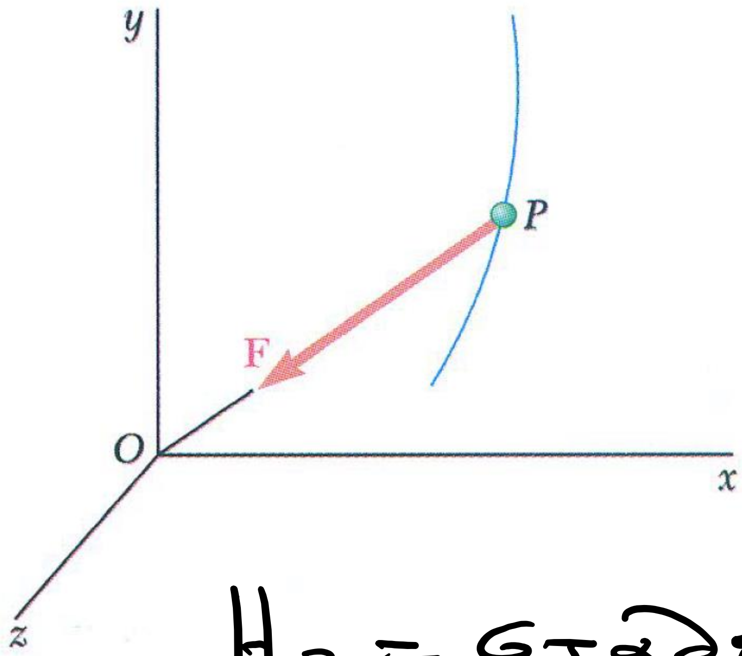
$$\dot{\mathbf{H}}_O = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \cancel{\mathbf{v} \times m\mathbf{v}}^{\,\emptyset} + \mathbf{r} \times m\mathbf{a}$$

άρα

$$\frac{d\underline{H}_o}{dt} = \dot{\underline{H}}_o = \underline{r} \times m\underline{a}$$

όμως: $\Sigma \underline{F} = m\underline{a}$ και

$$(\underline{r} \times \Sigma \underline{F}) = \Sigma \underline{M}_o \Rightarrow \boxed{\dot{\underline{H}}_o = \Sigma \underline{M}_o}$$



$$\Sigma \underline{M}_o = \underline{0} \Rightarrow$$

$$\frac{d\underline{H}_o}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{H}_o = \text{constant}$$

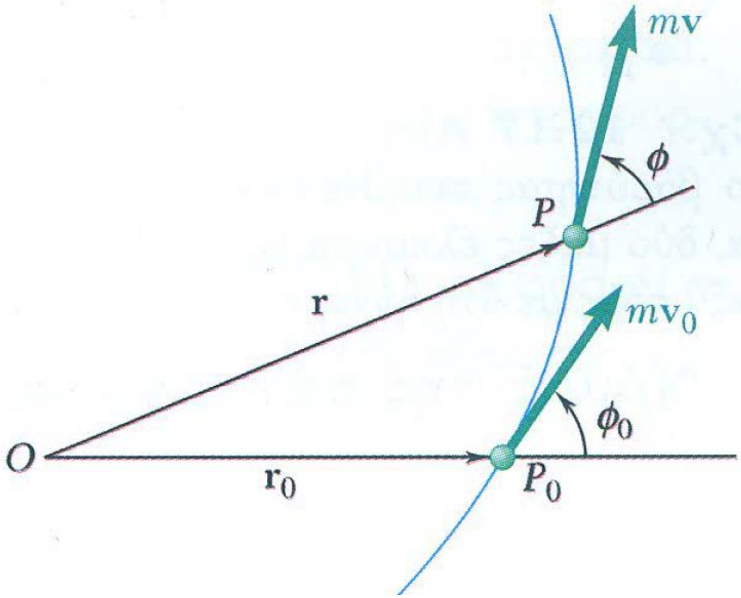
$\underline{H}_o$ = σταθερό $\Rightarrow$

$\underline{H}_o$ σταθερό ως μέτρο

σταθερό ως διεύθυνση

Διατήρηση της στροφορμής

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{H}_O = \text{σταθερά}$$



Κεντρική κίνηση στις πολικές συντεταγμένες

$\Rightarrow$

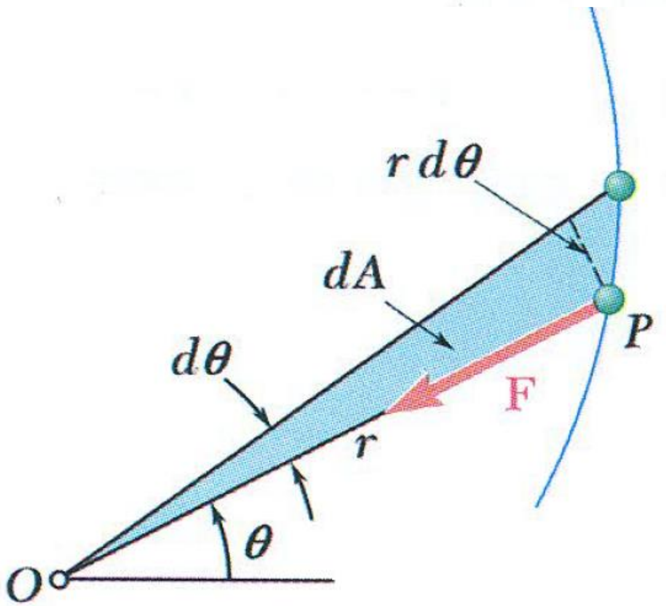
$$r m v \sin\phi = r_0 m v_0 \sin\phi_0$$

ή

$$m r^2 \dot{\theta} = H_O = \text{σταθερά}$$

Διαιρώντας με m και συμβολίζοντας με h τη στροφορμή ανά μονάδα μάζας H_0/m, έχουμε

$$\boxed{r^2\dot{\theta} = h}$$ σταθερό



$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

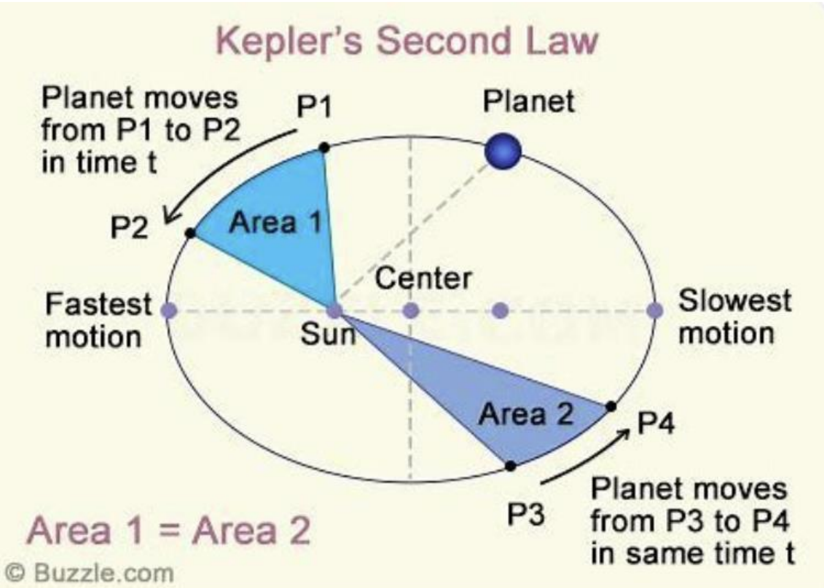
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \Longrightarrow$$

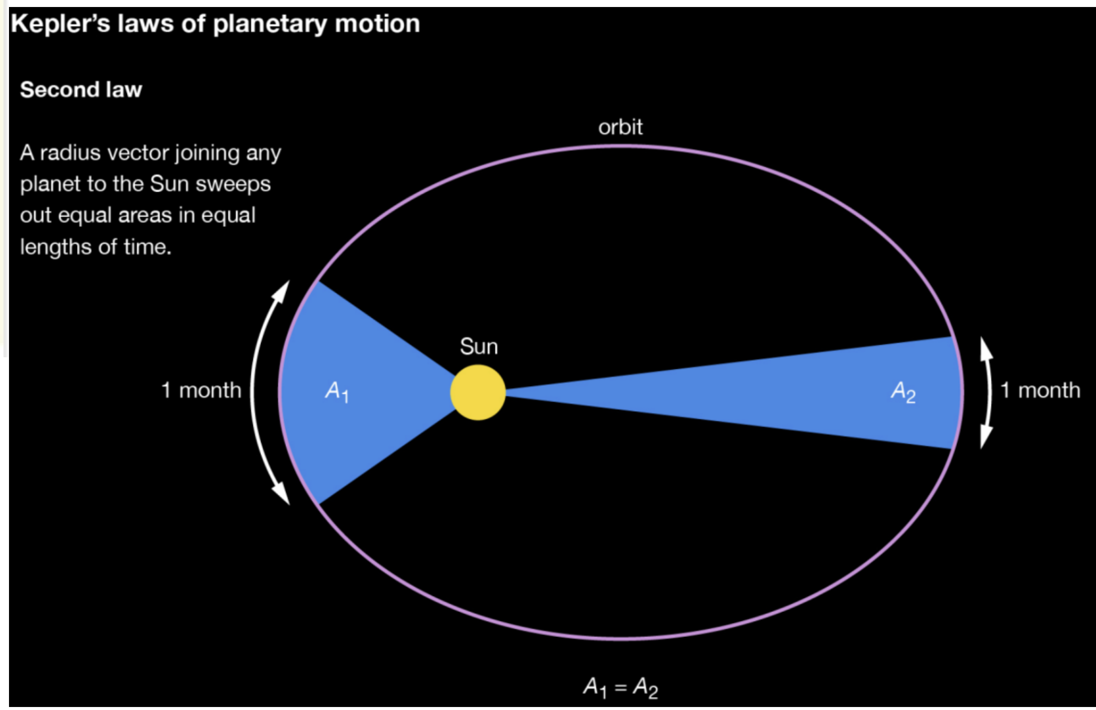
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} h =$$ σταθερό

$\Longrightarrow$ σταθερή εμβαδική ταχύτητα

Kepler's Second Law

A line segment joining a planet and the Sun sweeps out equal areas during equal intervals of time.





Trajectory of a Particle Under a Central Force

Πολικό ΣΣ

$$\Sigma F_r = ma_r$$
$$\Sigma F_\theta = ma_\theta$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad \text{and} \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -F$$
$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0$$

$$r^2\dot{\theta} = h \quad \text{or} \quad r^2\frac{d\theta}{dt} = h$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{d\dot{r}}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left[-h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

$$\ddot{r} = -\frac{h^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

θέτω $u = \frac{1}{r}$

$\Rightarrow$

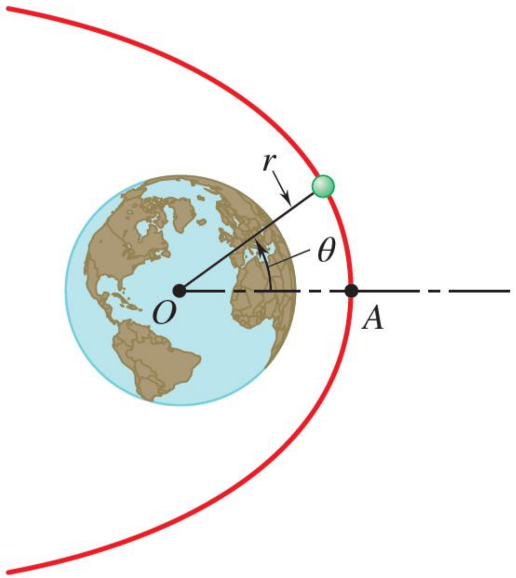
$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2}}$$

Application to Space Mechanics

$$F = \frac{GMm}{r^2} = GMmu^2$$

where M = mass of the earth
m = mass of space vehicle
r = distance from center of the earth to vehicle
$u = 1/r$

Then we obtain the differential equation



$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2}}$$

Note that the right-hand side is a constant.

To solve the differential equation (12.36), we add the particular solution $u = GM/h^2$ to the general solution $u = C \cos (\theta - \theta_0)$ of the corresponding homogeneous equation (i.e., the equation obtained by setting the right-hand side equal to zero). Choosing the polar axis so that $\theta_0 = 0$, we have

$$\frac{1}{r} = u = \frac{GM}{h^2} + C \cos \theta$$

Eq. (12.37) is the equation of a *conic section* (ellipse, parabola, or hyperbola) in the polar coordinates r and θ. The origin O of the coordinates, which is located at the center of the earth, is a *focus* of this conic section, and the polar axis is one of its axes of symmetry (Fig. 12.18).

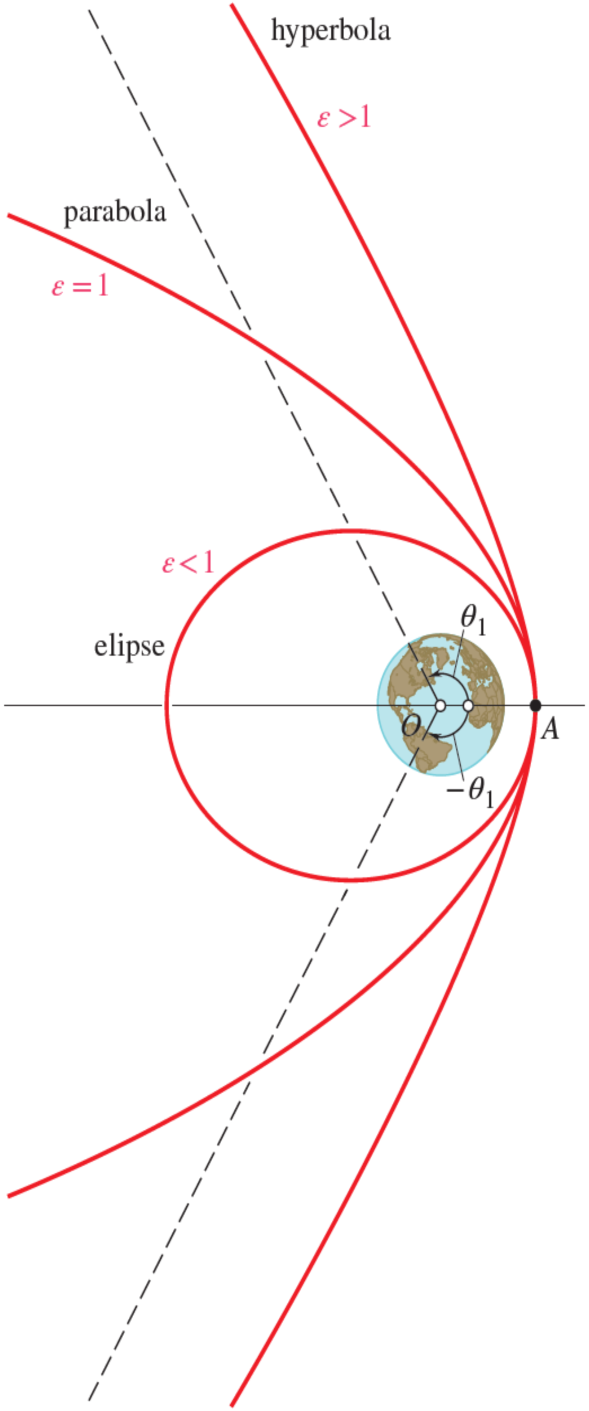
The ratio of the constants C and GM/h^2 defines the **eccentricity** ε of the conic section. If we set

$$\varepsilon = \frac{C}{GM/h^2} = \frac{Ch^2}{GM}$$

we can write Eq. (12.37) in the form

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2}(1 + \varepsilon \cos \theta)$$

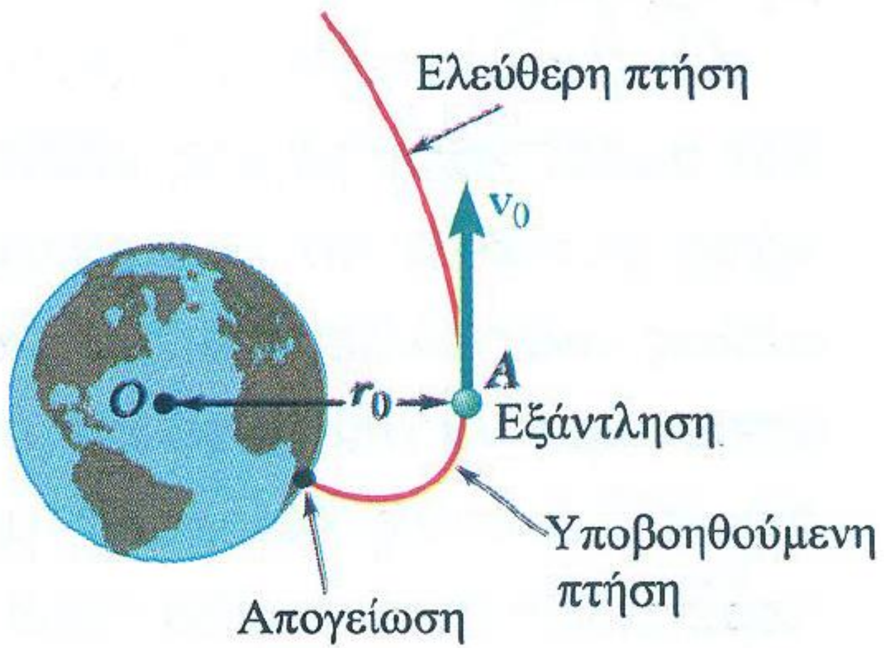
This equation represents three possible trajectories.



1. $\varepsilon > 1$, or $C > GM/h^2$: There are two values θ_1 and $-\theta_1$ of the polar angle, defined by $\cos\theta_1 = -GM/Ch^2$, for which the right-hand side of Eq. (12.37) becomes zero. For both these values, the radius vector r becomes infinite; the conic section is a *hyperbola* (Fig. 12.19).
2. $\varepsilon = 1$, or $C = GM/h^2$: The radius vector becomes infinite for $\theta = 180°$; the conic section is a *parabola.*
3. $\varepsilon < 1$, or $C < GM/h^2$: The radius vector remains finite for every value of θ; the conic section is an *ellipse*. In the particular case when $\varepsilon = C = 0$, the length of the radius vector is constant; the conic section is a circle.

$$\varepsilon = \frac{C}{GM/h^2} = \frac{Ch^2}{GM}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2}(1 + \varepsilon\cos\theta)$$



$$\frac{1}{r} = u = \frac{GM}{h^2} + C\cos\theta$$

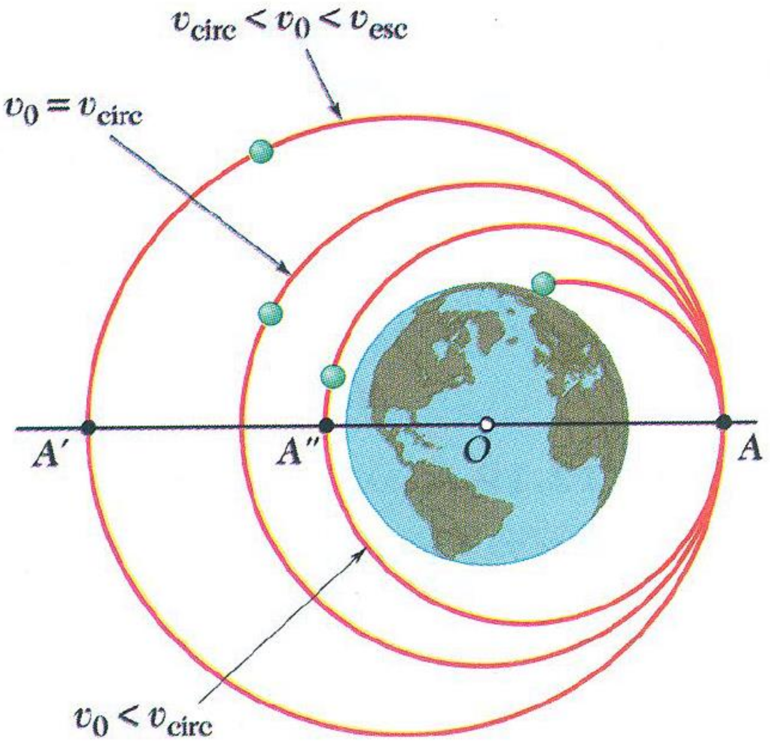
$$\boxed{h = r_0^2\dot{\theta}_0 = r_0 v_0}$$

$$GM = gR^2 \qquad R = 6.37\times10^6\text{m}$$

Για θ=0, r=ro ⇨ $C = \dfrac{1}{r_0} - \dfrac{GM}{h^2}$

Στην παραβολική τροχιά (ε=1) ⟹ $C = GM/h^2$: ⟹ $h^2 = \dfrac{GM}{C}$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$$



$$v_{\delta\iota\alpha\varphi} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \quad ή \quad v_{\delta\iota\alpha\varphi} = \sqrt{\frac{2gR^2}{r_0}}$$

Όταν C = 0 $\Rightarrow$

$$v_{\kappa\upsilon\kappa\lambda} = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} \quad ή \quad v_{\kappa\upsilon\kappa\lambda} = \sqrt{\frac{gR^2}{r_0}}$$

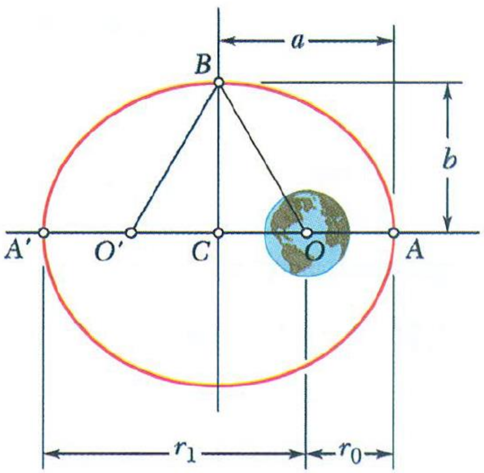
$$\tau = \frac{2\pi ab}{h}$$

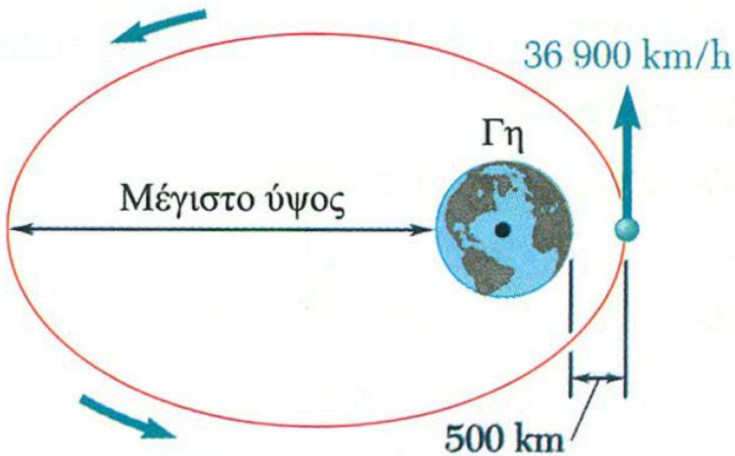
E = π ab

Εμβαδική ταχύτητα
= h/2

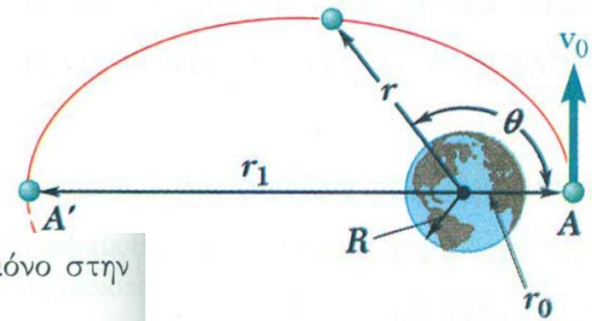
$$a = \frac{1}{2}(r_0 + r_1)$$

$$b = \sqrt{r_0 r_1}$$





Ένας δορυφόρος εκτοξεύεται σε κατεύθυνση παράλληλη στην επιφάνεια της Γης με ταχύτητα 36900 km/h από υψόμετρο 500 km. Να προσδιορίσετε *(α)* το μέγιστο υψόμετρο στο οποίο φθάνει ο δορυφόρος, *(β)* την περίοδο περιφοράς του δορυφόρου.



α. Μέγιστο Υψόμετρο. Μετά από τη εκτόξευσή του ο δορυφόρος, υπόκειται μόνο στην πλανητική έλξη της Γης. Επομένως, η κίνησή του διέπεται από την Εξ. (12.37), άρα

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} + C \cos \theta \qquad (1)$$

Εφόσον στο σημείο εκτόξευσης A η ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας είναι μηδενική, έχετε $h = r_0 v_0$. Υπενθυμίζοντας ότι για τη Γη, $R = 6370\,\text{km}$, μπορείτε να υπολογίσετε

$$r_0 = 6370\,\text{km} + 500\,\text{km} = 6870\,\text{km} = 6.87 \times 10^6\,\text{m}$$

$$v_0 = 36900\,\text{km/h} = \frac{36.9 \times 10^6\,\text{m}}{3.6 \times 10^3\,\text{s}} = 10.25 \times 10^3\,\text{m/s}$$

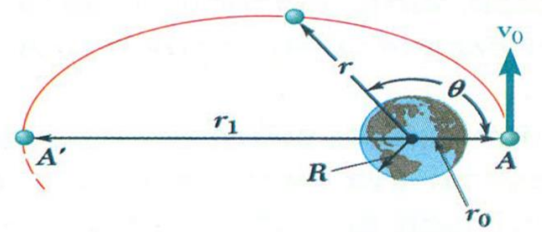
$$h = r_0 v_0 = (6.87 \times 10^6\,\text{m})(10.25 \times 10^3\text{m/s}) = 70.4 \times 10^{12}\,\text{m}^2/\text{s}$$

$$h^2 = 4.96 \times 10^{21}\,\text{m}^4/\text{s}^2$$

Εφόσον $GM = gR^2$, όπου R είναι η ακτίνα της Γης, έχουμε επίσης

$$GM = gR^2 = (9.81\,\text{m/s}^2)(6.37 \times 10^6\,\text{m})^2 = 398 \times 10^{12}\,\text{m}^3/\text{s}^2$$

$$\frac{GM}{h^2} = \frac{398 \times 10^{12}\,\text{m}^3/\text{s}^2}{4.96 \times 10^{21}\,\text{m}^4/\text{s}^2} = 80.3 \times 10^{-9}\,\text{m}^{-1}$$



Σχ. 1 Τροχιά δορυφόρου μετά από την εκτόξευση με ταχύτητα v_0.

Αντικαθιστώντας αυτήν την τιμή στην Εξ. (1) προκύπτει

$$\frac{1}{r} = 80.3 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}^{-1} + C\cos\theta \qquad (2)$$

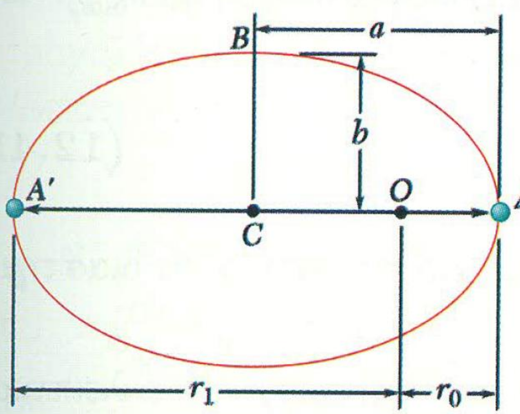
Επισημαίνουμε ότι στο σημείο A, $\theta = 0$ και $r = r_0 = 6.87 \times 10^6$ m (Σχ. 1). Από αυτό, μπορείτε να υπολογίσετε τη σταθερά C ως

$$\frac{1}{6.87 \times 10^6\,\mathrm{m}} = 80.3 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}^{-1} + C\cos 0^\circ \qquad C = 65.3 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}^{-1}$$

Στο A', το πιο μακρινό σημείο της τροχιάς από τη Γη, έχουμε $\theta = 180^\circ$. Χρησιμοποιώντας την Εξ. (2), μπορούμε να υπολογίσουμε την αντίστοιχη απόσταση r_1

$$\frac{1}{r_1} = 80.3 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}^{-1} + (65.3 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}^{-1})\cos 180^\circ$$

$$r_1 = 66.7 \times 10^6\,\mathrm{m} = 66700\,\mathrm{km}$$



Σχ. 2 Μεγάλος και μικρός ημιάξονας της τροχιάς.

β. Περίοδος Περιφοράς. Αφού τα A και A' είναι το περίγειο και το απόγειο της ελλειπτικής τροχιάς, αντίστοιχα, χρησιμοποιούμε τις Εξ. (12.44) και (12.45) για να υπολογίσουμε το μεγάλο και το μικρό ημιάξονα της τροχιάς (Σχ. 2):

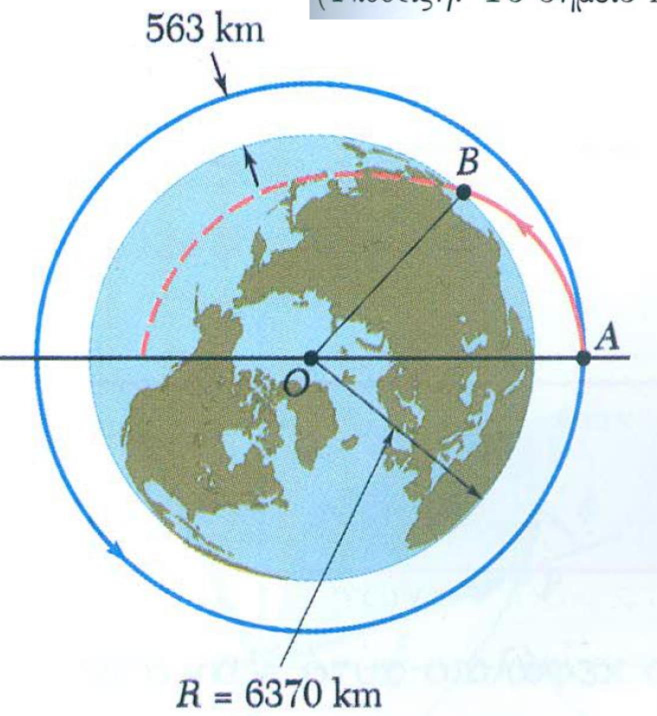
$$a = \frac{1}{2}(r_0 + r_1) = \frac{1}{2}(6.87 + 66.7)(10^6)\,\mathrm{m} = 36.8 \times 10^6\,\mathrm{m}$$

$$b = \sqrt{r_0 r_1} = \sqrt{(6.87)(66.7)} \times (10^6)\,\mathrm{m} = 21.4 \times (10^6)\,\mathrm{m}$$

$$\tau = \frac{2\pi ab}{h} = \frac{2\pi(36.8 \times 10^6\,\mathrm{m})(21.4 \times 10^6\,\mathrm{m})}{70.4 \times 10^9\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}}$$

$$\tau = 70.3 \times 10^3\,\mathrm{s} = 1171\,\mathrm{min} = 19\,\mathrm{h}\,31\,\mathrm{min}$$

12.116 Ένα διαστημικό λεωφορείο διαγράφει μία κυκλική τροχιά σε υψόμετρο 563 km επάνω από την επιφάνεια της Γης. Καθώς διέρχεται από το σημείο A, πυροδοτεί τον κινητήρα του για ένα μικρό χρονικό διάστημα για να μειώσει την ταχύτητά του κατά 152 m/s και ξεκινά την κάθοδό του προς τη Γη. Να προσδιορίσετε τη γωνία AOB έτσι ώστε το υψόμετρο του λεωφορείου στο σημείο B να είναι 121 km. (*Υπόδειξη:* Το σημείο A είναι το απόγειο της ελλειπτικής καθοδικής τροχιάς.)



Η απόσταση στην οποία βρίσκεται το ΔΛ

$r_0 = 6370 + 563 \Rightarrow$

$r_0 = 6933\ km = 6{,}933 \times 10^6\ m$

$$V_{circ} = \sqrt{\frac{gR^2}{r_0}} \Rightarrow V_{circ} = \text{known}$$

Μετά την απομείωση της ταχύτητας

$V_1 = V_{circ} - 152\ m/s \Rightarrow V_1 = \text{known}$

Στο A γνωρίζω απόσταση r_0 και ταχύτητα V_1

$\Rightarrow h = r_0 V_1 \Rightarrow h = \text{known}$

Ακριβώς στο A μετά την απομείωση της ταχύτητας

$$\frac{1}{r_0} = \frac{GM}{h^2} + C\cos(180^\circ) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{r_0} - \frac{GM}{h^2}\right) = -C \longrightarrow C \text{ known}$$

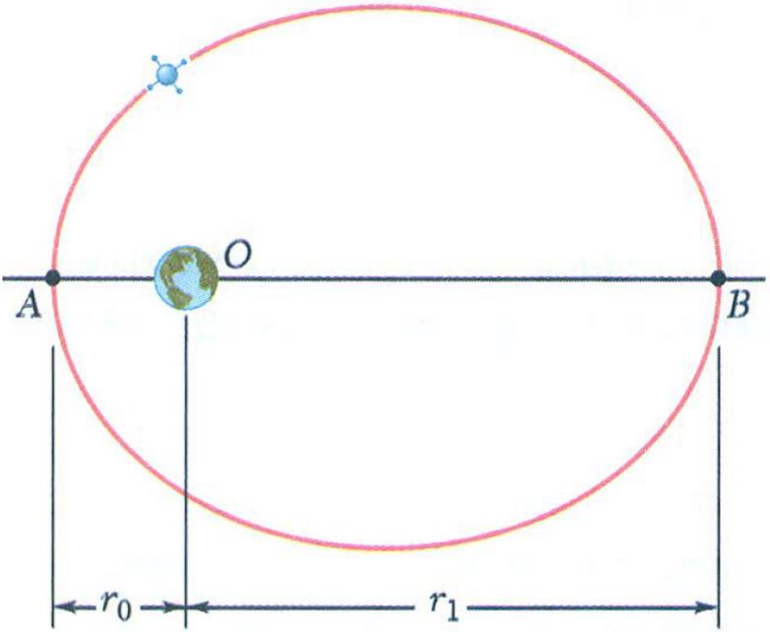
Τελικά στο ύψος $r_1 = R + 121$ km ισχύει

$$\frac{1}{r_1} = \frac{GM}{h^2} + C\cos\varphi \Rightarrow$$

$$\cos\varphi = \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{GM}{h^2}}{C} = \frac{h^2 - r_1 GM}{C r_1 h^2}$$

$\boxed{\varphi = 49^\circ}$ $\Rightarrow \cos\varphi$ known $\Rightarrow \varphi =$ known

12.118 Ένας δορυφόρος διαγράφει μία ελλειπτική τροχιά γύρω από έναν πλανήτη. Συμβολίζοντας με r_0 και r_1 τις αποστάσεις που αντιστοιχούν στο περίγειο και το απόγειο της τροχιάς, αντίστοιχα, να δείξετε ότι η καμπυλότητα της τροχιάς σε κάθε ένα από αυτά τα δύο σημεία μπορεί να εκφραστεί ως



$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1}\right)$$

F_A = $m\underline{a}_n^A$

$F_A \Rightarrow G\dfrac{Mm}{r_0^2} = m\dfrac{V_A^2}{\rho}$

$r_0 V_A = h \Rightarrow V_A = \left(\dfrac{h}{r_0}\right)$

$F_B \Rightarrow G\dfrac{Mm}{r_1^2} = m\dfrac{V_B^2}{\rho}$

$r_1 V_B = h$

$$\Rightarrow \quad \frac{GM}{r_0^2} = \left(\frac{h^2}{r_0^2}\right)\frac{1}{\rho}$$

$$\frac{GM}{r_1^2} = \left(\frac{h^2}{r_1^2}\right)\frac{1}{\rho}$$

$$\Rightarrow GM = \frac{h^2}{\rho}$$

$$\frac{1}{r_0} = \frac{GM}{h^2} + C$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{GM}{h^2} - C$$

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0}\right) = 2\frac{GM}{h^2} = 2\frac{h^2}{\rho h^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0}\right) = \frac{1}{\rho}}$$

Τροχιακά στοιχεία (III)

- Με τα εργαλεία που έχετε μάθει, το μόνο που μπορείτε να κάνετε είναι να σχεδιάσετε το R και το V σε ένα τρισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων και να προσπαθήσετε να απεικονίσετε την τροχιά.
- Ευτυχώς, υπάρχει ένας ευκολότερος τρόπος.
- Εκατοντάδες χρόνια πριν, ο Johannes Kepler ανέπτυξε μια μέθοδο περιγραφής των τροχιών που μας επιτρέπει να απεικονίσουμε το μέγεθος, το σχήμα και τον προσανατολισμό τους, καθώς και τη θέση του διαστημοπλοίου μέσα σε αυτές.
- Επειδή εξακολουθούμε να χρειαζόμαστε έξι μεταβλητές για να περιγράψουμε μια τροχιά και τη θέση του διαστημικού σκάφους σε αυτήν, ο Kepler όρισε έξι τροχιακά στοιχεία.
- Ονομάζονται κλασικά τροχιακά στοιχεία (ΚΤΣ)

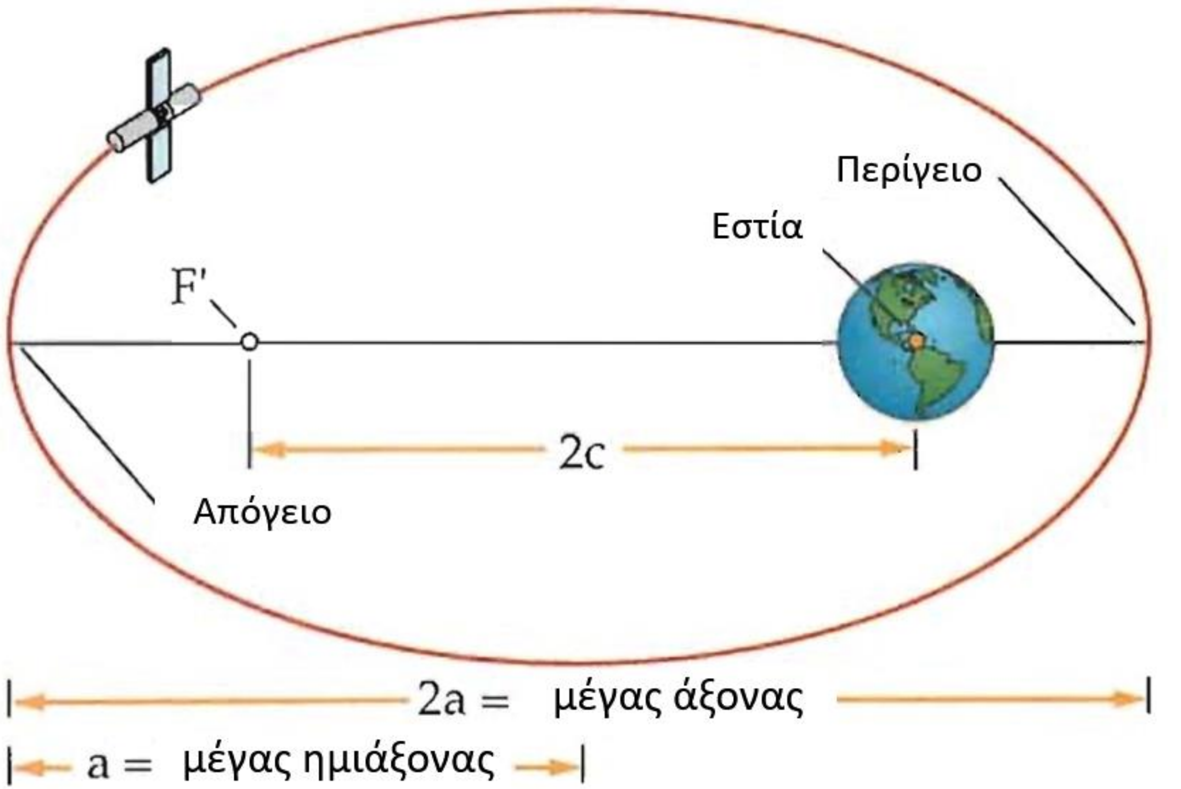
Κλασικά τροχιακά στοιχεία (ΚΤΣ)

- θα τα χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε τα τέσσερα εξής πράγματα:
  - Το τροχιακό μέγεθος, (τροχιακό στοιχείο: μεγάλος ημιάξονας α)
  - Το τροχιακό σχήμα, (τροχιακό στοιχείο: εκκεντρότητα e)
  - Προσανατολισμός του τροχιακού επιπέδου στο διάστημα,
    - (τροχιακό στοιχείο: κλίση τροχιάς i)
    - (τροχιακό στοιχείο: Ορθή άνοδος ανοδικού κόμβου Ω)
  - Τον προσανατολισμό της τροχιάς στο επίπεδο (τροχιακό στοιχείο: όρισμα του περιγείου ω) και τέλος
  - Τη θέση του διαστημικού σκάφους στην τροχιά (τροχιακό στοιχείο: Αληθής ανωμαλία ν).

- Ας εξετάσουμε αυτά τα στοιχεία για να δούμε πως συμβάλλει το καθένα στην κατανόηση των τροχιών

1ο στοιχείο: Ημιάξονας της Ελλειπτικής Τροχιάς 2ο Στοιχείο Εκκεντρότητα

- Ο μεγάλος ημιάξονας, α, ισούται με το μισό του μεγάλου άξονα της τροχιάς, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, και το θεωρούμε το πρώτο τροχιακό στοιχείο.
- Η εκκεντρότητα (e) προσδιορίζει το σχήμα μιας τροχιάς εξετάζοντας την λόγο της απόστασης μεταξύ των δύο εστιών και του μήκους του κύριου άξονα.



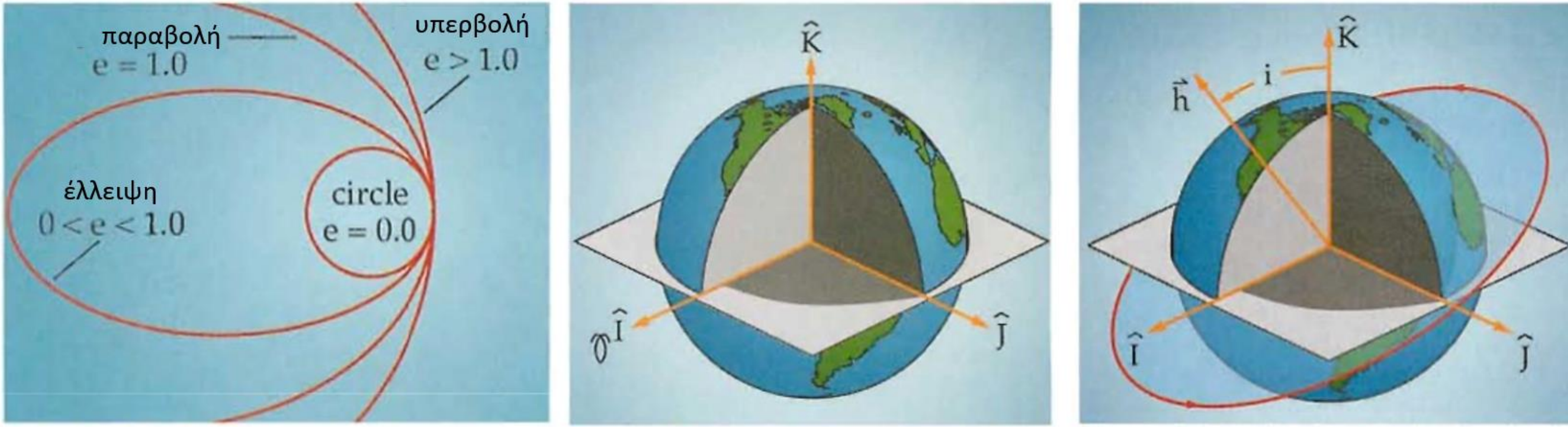
$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2\alpha}$$

$$e = \frac{2c}{2a}$$

3ο στοιχείο Κλίση ή Έγκλιση Τροχιάς

- Η πρώτη γωνία που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε τον προσανατολισμό μιας τροχιάς σε σχέση με το σύστημα συντεταγμένων μας είναι η **κλίση, i**.
- Η κλίση περιγράφει την κλίση του τροχιακού επιπέδου σε σχέση με το θεμελιώδες επίπεδο (το επίπεδο του ισημερινού σε αυτή την περίπτωση).
- Θα μπορούσαμε να περιγράψουμε αυτή την κλίση ως τη γωνία μεταξύ των δύο επιπέδων, αλλά αυτό είναι πιο δύσκολο να γίνει μαθηματικά.
- Αντίθετα, ορίζουμε την κλίση ως τη γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων.
- Το πρώτο είναι κάθετο στο το τροχιακό επίπεδο και συμβολίζεται με $\vec{h}$ (διάνυσμα της ειδικής γωνιακής ορμής) ενώ το δεύτερο είναι κάθετο στο επίπεδο του ισημερινού, $\vec{K}$
- Η κλίση έχει εύρος τιμών από 0° έως 180°.

Εκκεντρότητα & Κλίση Τροχιάς



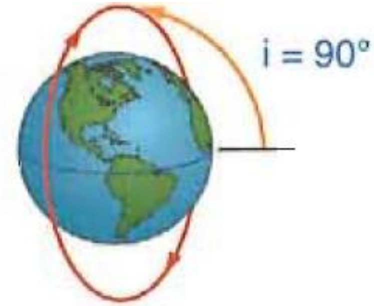
(α) (β) (γ)

(α) Η εκκεντρότητα καθορίζει το σχήμα της τροχιάς (β) Το γεωκεντρικό-ισημερινό σύστημα συντεταγμένων (γ) Κλίση ή Έγκλιση Τριχιάς, i

Κλίση ή Έγκλιση Τροχιάς

- Χρησιμοποιούμε την κλίση για να ορίσουμε διάφορα είδη τροχιάς.
- Για παράδειγμα, μια τροχιά γύρω από τη Γη με κλίση 0° ή 180° αποτελεί μια ισημερινή τροχιά, επειδή παραμένει πάνω στον ισημερινό.
- Αν η τροχιά έχει i = 90°, την ονομάζουμε πολική τροχιά επειδή περνά ακριβώς πάνω από τους δύο πόλους.
- Χρησιμοποιούμε επίσης την τιμή της κλίσης για να διακρίνουμε δύο μεγάλες κατηγορίες τροχιών.
  - Αν 0°<i<90°, το διαστημικό σκάφος κινείται με την περιστροφή της γης (σε ανατολική κατεύθυνση) και τότε λέμε ότι το διαστημικό σκάφος βρίσκεται σε ορθή τροχιά.
  - Εάν το διαστημικό σκάφος βρίσκεται σε τροχιά με κλίση 90 °<i <180 °, τότε κινείται αντίθετα από την περιστροφή της Γης (σε δυτική κατεύθυνση) και η τροχιά αυτή ονομάζεται οπισθοδρομική/ανάδρομη
- Έτσι, η κλίση είναι το τρίτο τροχιακό στοιχείο. Καθορίζει την κλίση του τροχιακού επιπέδου σε σχέση με το θεμελιώδες επίπεδο και μας βοηθά να κατανοήσουμε τον προσανατολισμό της τροχιάς σε σχέση με τον ισημερινό.

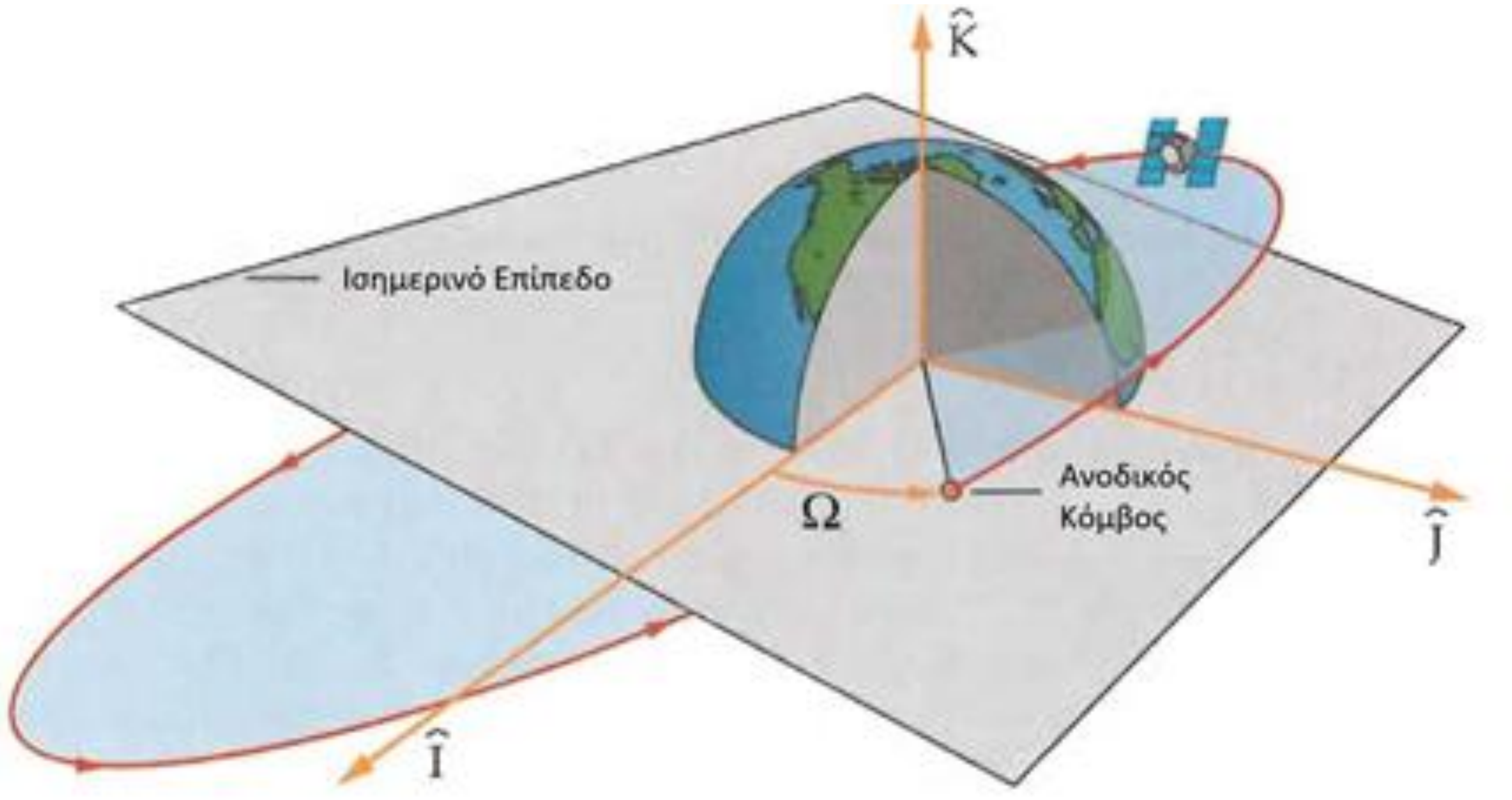
Τύποι Τροχιών και η Κλίση τους

Κλίση	Τύπος Τροχιάς	Σχήμα
0° ή 180°	Ισημερινού	
90°	Πολική	
0° ≤ i < 90°	Ορθή (με τη φορά της Γης)	 Ανοδικός κόμβος
90° < i ≤ 180°	Ανάδρομη (αντίθετη με την φορά της Γης)	 Καθοδικός κόμβος

Ορθή άνοδος του ανοδικού κόμβου Ω

- Το τέταρτο τροχιακό στοιχείο είναι μια άλλη γωνία, η ορθή άνοδος του ανοδικού κόμβου Ω, που χρησιμοποιείται για να περιγράψει τον τροχιακό προσανατολισμό σε σχέση με την κύρια κατεύθυνση, *J*.
- Η ορθή άνοδος του ανοδικού κόμβου (RAAN) είναι μία γωνία, μετρούμενη από το κέντρο της Γης, από το σημείο εαρινής ισημερίας (Vernal Equinox) μέχρι το ανοδικό κόμβο (Ascending Node).
- Ο ανοδικός κόμβος είναι το σημείο του επιπέδου του ισημερινού από το οποίο περνά ένας δορυφόρος κινούμενος από νότο προς βορά
- Αντίστοιχα, ο καθοδικός κόμβος είναι το σημείο του επιπέδου του ισημερινού από το οποίο περνά ο δορυφόρος κινούμενος από βορά προς νότο.
- Ο ανοδικός και το καθοδικός κόμβος ορίζουν μία ευθεία, η οποία είναι η τομή του επιπέδου της τροχιάς με το ισημερινό επίπεδο.

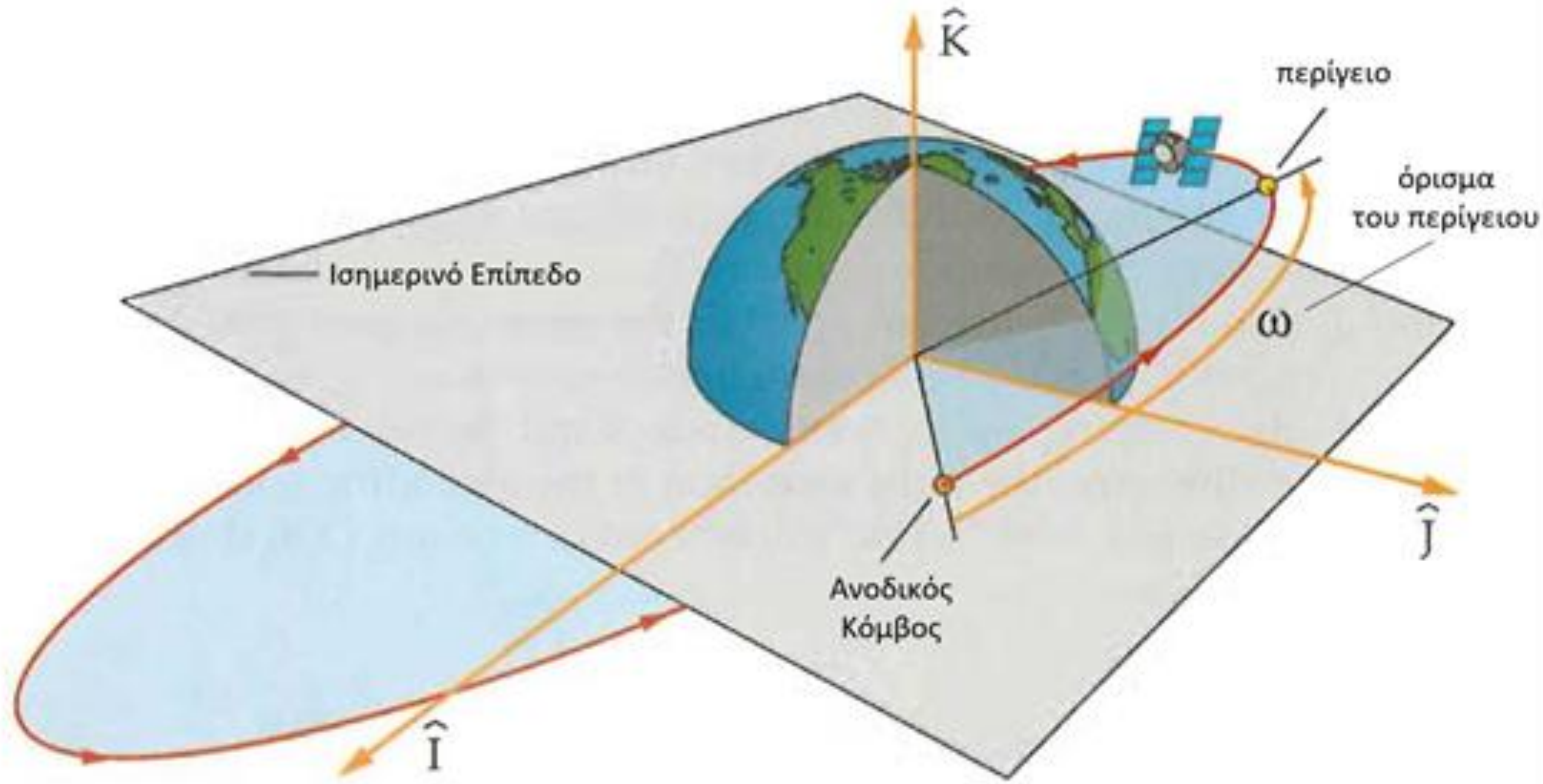
Ορθή άνοδος του ανοδικού κόμβου Ω



Όρισμα του περίγειου ω

- Γνωρίζουμε τώρα το μέγεθος της τροχιάς, το σχήμα της, την κλίση της, το i και την γωνία Ω.
- Δεν γνωρίζουμε όμως πως η τροχιά είναι προσανατολισμένη στο επίπεδο.
- Για παράδειγμα, για μια ελλειπτική τροχιά, ίσως να θέλουμε να μάθουμε αν το περίγειο (το σημείο που βρίσκεται πιο κοντά στη Γη) βρίσκεται στο βόρειο ή το νότιο ημισφαίριο.
- Αυτό είναι σημαντικό αν θέλουμε να τραβήξουμε φωτογραφίες υψηλής ανάλυσης ενός συγκεκριμένου σημείου.
- Επομένως, χρησιμοποιούμε το πέμπτο τροχιακό στοιχείο, το όρισμα του περίγειου ω.
- Το όρισμα του περίγειου ω είναι η γωνία από την ορθή άνοδος του ανοδικού κόμβου μέχρι το περίγειο. Η γωνία μετράτε στο επίπεδο της τροχιάς και προς την κατεύθυνση της κίνησης.

Όρισμα του περίγειου ω



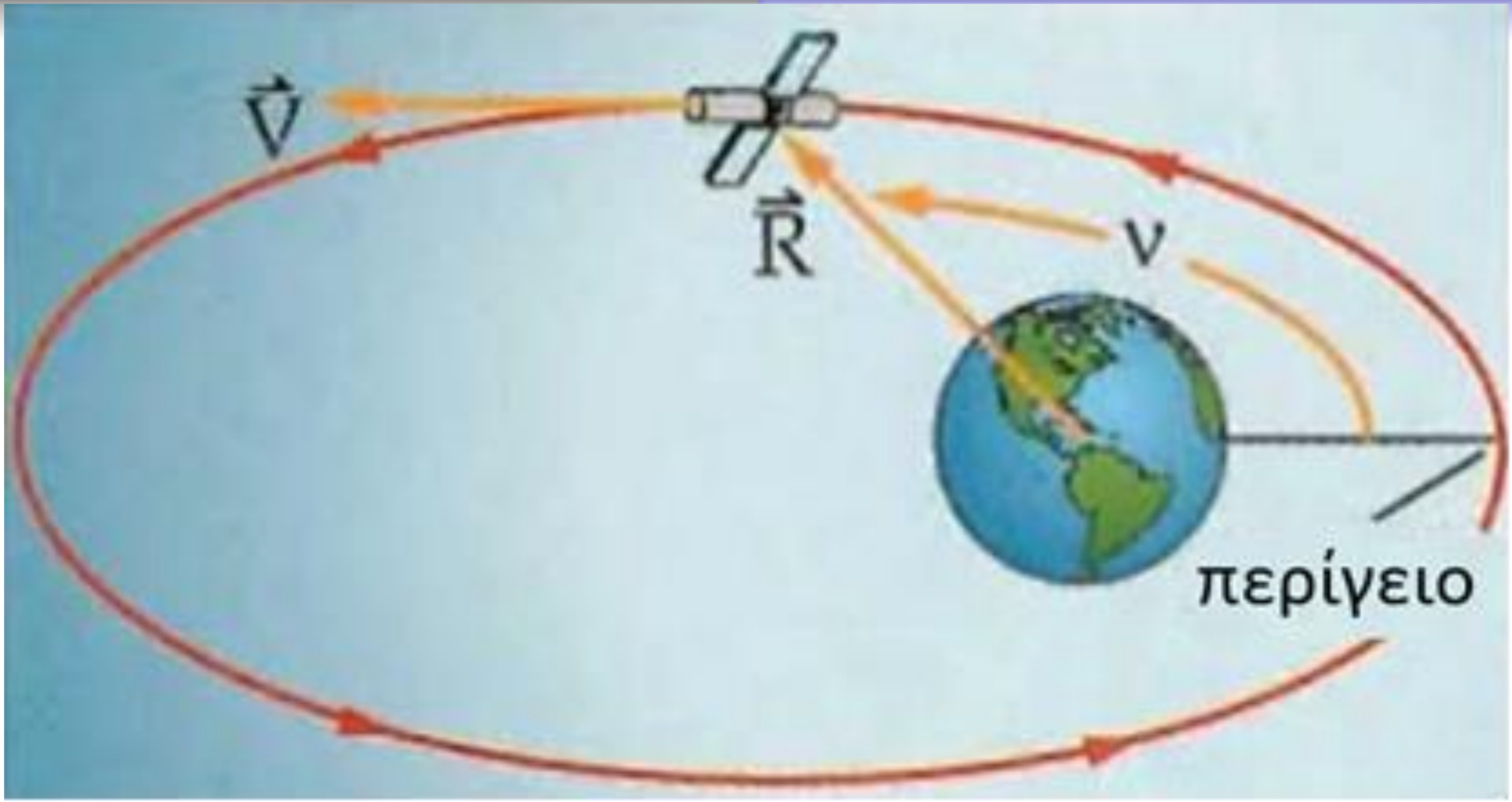
Όρισμα του περίγειου ω

- Για παράδειγμα, όταν ω = 0 μοίρες, το περίγειο βρίσκεται στην ίδια θέση με το ανοδικό κόμβο.
- Αυτό σημαίνει ότι ο δορυφόρος θα βρίσκεται κοντύτερα στη γη την ίδια στιγμή που θα διασχίζει τον ισημερινό
- Όταν ω = 180 μοίρες, το απόγειο θα βρίσκεται στην ίδια θέση με το καθοδικό κόμβο.
- Αυτό σημαίνει ότι ο δορυφόρος θα βρίσκεται μακρύτερα από τη Γη την ίδια στιγμή που θα διασχίζει τον ισημερινό
- Πολλές φορές, στην ξενόγλωσση βιβλιογραφία, το όρισμα του περίγειου απαντάται και με το γράμμα w.

Αληθής ανωμαλία, ν

- Αφού καθορίσαμε το μέγεθος και το σχήμα της τροχιάς, μαζί με τον προσανατολισμό της (κλίση και Ω), πρέπει ακόμα να βρούμε τη θέση του διαστημοπλοίου μέσα στην τροχιά.
- Όπως έχουμε δει ήδη, μπορούμε να τη βρούμε χρησιμοποιώντας την αληθή ανωμαλία.
- Η αληθής ανωμαλία, ν είναι η πραγματική γωνία κατά την οποία μετακινήθηκε ένας δορυφόρος από την τελευταία φορά που πέρασε από το περίγειο
- Ισούται με τη μέση ανωμαλία μόνο κατά το περίγειο και το απόγειο για τις ελλειπτικές τροχιές, ενώ για τις κυκλικές τροχιές τα δύο αυτά στοιχεία ταυτίζονται.
- Από όλα τα τροχιακά στοιχεία, μόνο η πραγματική ανωμαλία αλλάζει με το χρόνο καθώς το διαστημικό σκάφος κινείται στην τροχιά του

Αληθής ανωμαλία, ν



Σύνοψη Κλασσικών Τροχιακών Στοιχείων

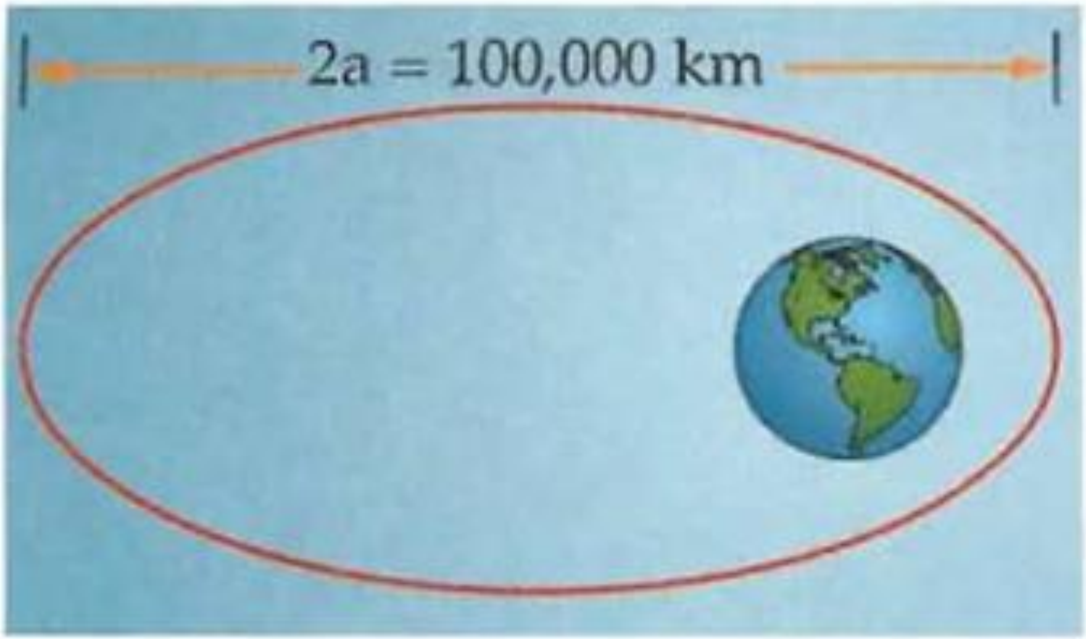
Στοιχείο	Όνομα	Χαρακτηριστικά	Τιμές (Όρια)
a	Ημιάξονας	Μέγεθος	Διάφορες
e	Εκκεντρότητα	Σχήμα της τροχιάς	e=0, κύκλος 0 < ε < 1, έλλειψη
I	Κλίση ή έγκλιση	Κλίση, η γωνία μεταξύ του διανύσματος της ειδικής στροφορμής, $\vec{h}$, με την κάθετο στο επίπεδο του ισημερινού, $\vec{K}$	0 ≤ 1 ≤ 180°
Ω	ορθή άνοδος του ανοδικού κόμβου	Η γωνία μεταξύ του σημείου εαρινής ισημερίας (Vernal Equinox) και του ανοδικού κόμβου	0 ≤ Ω ≤ 360°
ω	όρισμα του περίγειου	Η γωνία από την ορθή άνοδος του ανοδικού κόμβου μέχρι το περίγειο	0 ≤ ω ≤ 360°
ν	αληθής ανωμαλία	Η γωνία μεταξύ της θέσης του δορυφόρου μέχρι το περίγειο	0 ≤ ν ≤ 360°

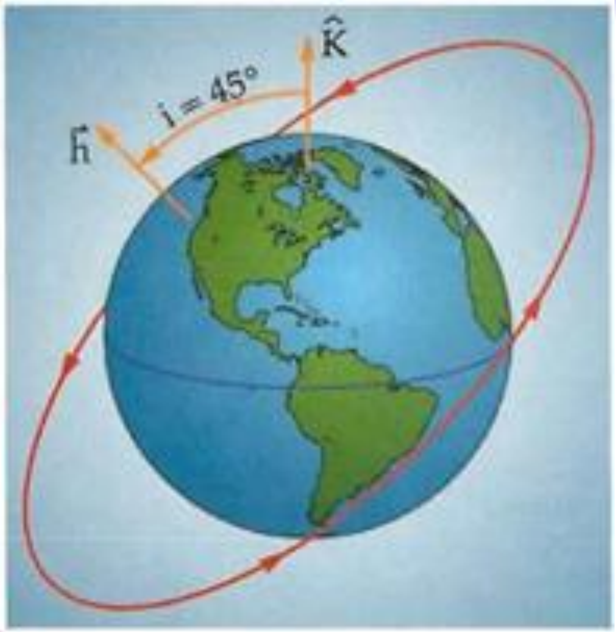
Παράδειγμα - ΚΤΣ

- Ας δούμε ένα παράδειγμα για να δούμε πώς μπορούν τα τροχιακά στοιχεία να μας βοηθήσουν να απεικονίσουμε μια τροχιά.
- Ας υποθέσουμε ότι ένας δορυφόρος επικοινωνίας έχει τα ακόλουθα τροχιακά στοιχεία
  - Μεγάλος ημιάξονας, a = 50.000 χλμ.
  - Εκκεντρότητα, e = 0.4
  - Κλίση, i = 45°
  - Ορθή άνοδος του ανοδικού κόμβου, Ω = 50°
  - Όρισμα του περίγειου, ω=110°
  - Αληθής ανωμαλία, ν = 170°

Παράδειγμα - ΚΤΣ

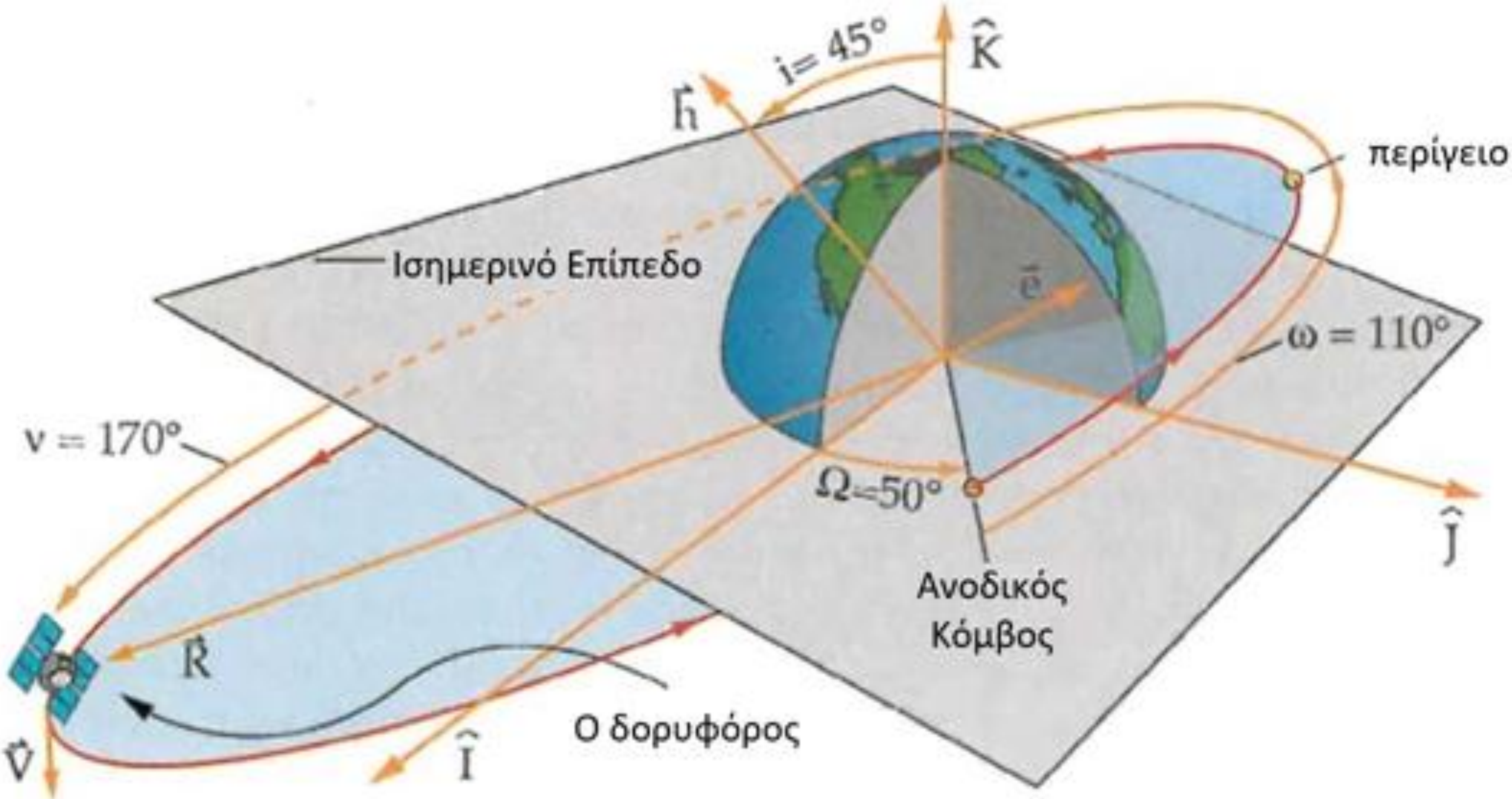
Applied Mechanics Laboratory





- Η εκκεντρότητα 0.4 δείχνει μια ελλειπτική τροχιά (είναι μεταξύ 0 και 1).
- Ο μεγάλος ημιάξονας των 50.000 χλμ. μας λέει πόσο μεγάλη είναι η τροχιά.
- Τώρα που βλέπουμε την τροχιά σε δύο διαστάσεις, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα άλλα τροχιακά στοιχεία για να απεικονίσουμε πώς είναι προσανατολισμένη η τροχιά σε τρεις διαστάσεις.
- Επειδή η γωνία κλίσης είναι 45°, γνωρίζουμε ότι το τροχιακό επίπεδο γέρνει 45° από τον ισημερινό.

Παράδειγμα - ΚΤΣ



- Βρίσκοντας την τροχιά. Η θέση του δορυφόρου μέσω των ΚΣΤ: a = 50000 km, i = 45°, e = 0.4, Ω = 50°, ω = 110°, ν = 170°

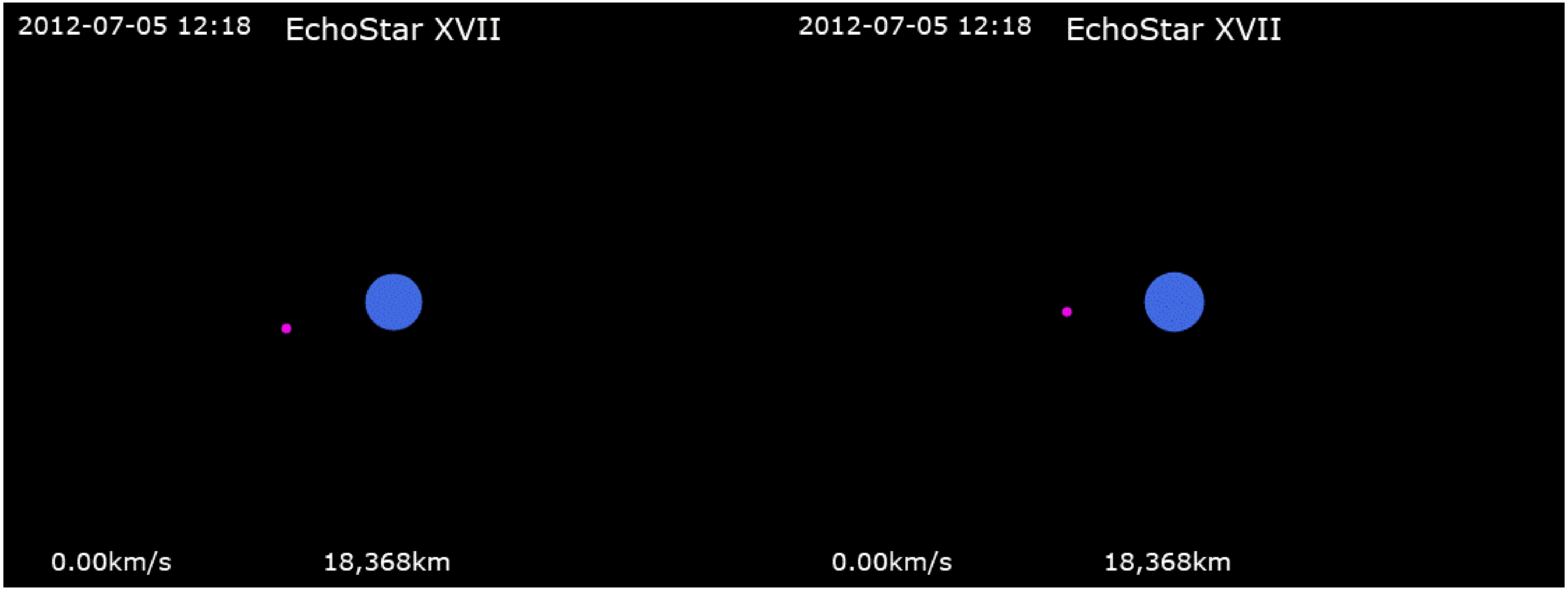
Ελιγμοί στο διάστημα

- Σε αυτήν την ενότητα θα μάθετε να:
  - Εξηγείτε τις πιο ενεργειακά αποδοτικές μεθόδους κίνησης μεταξύ δύο σημείων – μεταφορά Hohmann
  - Προσδιορίζετε την απαιτούμενη μεταβολή ταχύτητας ΔV για την εκτέλεση μιας μεταφοράς Hohmann μεταξύ δύο τροχιών
  - Εξηγείτε τις αλλαγές στο τροχιακό επίπεδο και τον τρόπο να τις επιτύχετε
  - Εξηγείτε τα τροχιακά ραντεβού και να προσδιορίζετε την απαιτούμενη μεταβολή ταχύτητας ΔV καθώς και τη χρονική στιγμή εκκίνησης της μεταφοράς

Ελιγμοί στο Διάστημα. Γιατί;

- Ένα διαστημικό σκάφος σπάνια παραμένει για μεγάλο χρονικό διάστημα σε μία μόνο τροχιά.
- Σχεδόν σε κάθε αποστολή στο διάστημα, υπάρχει η ανάγκη για αλλαγή ενός ή περισσοτέρων τροχιακών στοιχείων τουλάχιστον μία φορά.
- Οι δορυφόροι επικοινωνίας, για παράδειγμα, ποτέ δεν τοποθετούνται εξ αρχής στις γεωστατικές τους θέσεις.
- Αρχικά μεταβαίνουν σε χαμηλή τροχιά (περίπου 300 χλμ.) πριν μεταφερθούν σε γεωστατική με υψόμετρο (περίπου 35.780 χλμ.).
- Ενώ συμβαίνει αυτή η μεγάλη μεταβολή στον μεγάλο ημιάξονα, ένας ακόμα ελιγμός μειώνει την κλίση του δορυφόρου σε 0°.
- Ακόμη και μετά την άφιξή τους στην τροχιά της αποστολής τους, πρέπει να προσαρμόζονται τακτικά για να παραμείνουν στη θέση τους.
- Σε άλλες αποστολές, τα διαστημικά σκάφη χρειάζεται να εκτελέσουν ελιγμούς για να συναντηθούν με κάποιο άλλο διαστημόπλοιο, όπως το διαστημικό λεωφορείο που συναντήθηκε με το διαστημικό τηλεσκόπιο Hubble για να το επισκευάσει 5 φορές από το 1993-2009

Μεταφορά σε Γεωστατική Τροχιά



Ελιγμοί στο Διάστημα

- Όπως θα δούμε σε αυτήν την ενότητα, αυτοί οι τροχιακοί ελιγμοί δεν είναι τόσο απλοί.
- Επειδή ένα διαστημικό σκάφος βρίσκεται πάντα στο βαρυτικό πεδίο κάποιου σώματος (όπως η Γη ή ο Ήλιος), πρέπει να ακολουθήσει τους νόμους περί τροχιακής κίνησης για να μεταφερθεί από ένα μέρος σε ένα άλλο.
- Σε αυτήν την ενότητα θα χρησιμοποιήσουμε το πρόβλημα των δύο σωμάτων για να μάθουμε για τους ελιγμούς στο διάστημα.
- Θα εξηγήσουμε τον **οικονομικότερο τρόπο** μετακίνησης από μια τροχιά σε μια άλλη, θα βρούμε πώς και πότε πρέπει να αλλάζουμε το τροχιακό επίπεδο ενός διαστημικού σκάφους και τέλος θα περιγράψουμε ό,τι απαιτείται για να βρεθούν δύο διαστημόπλοια μαζί με ασφάλεια σε τροχιά.

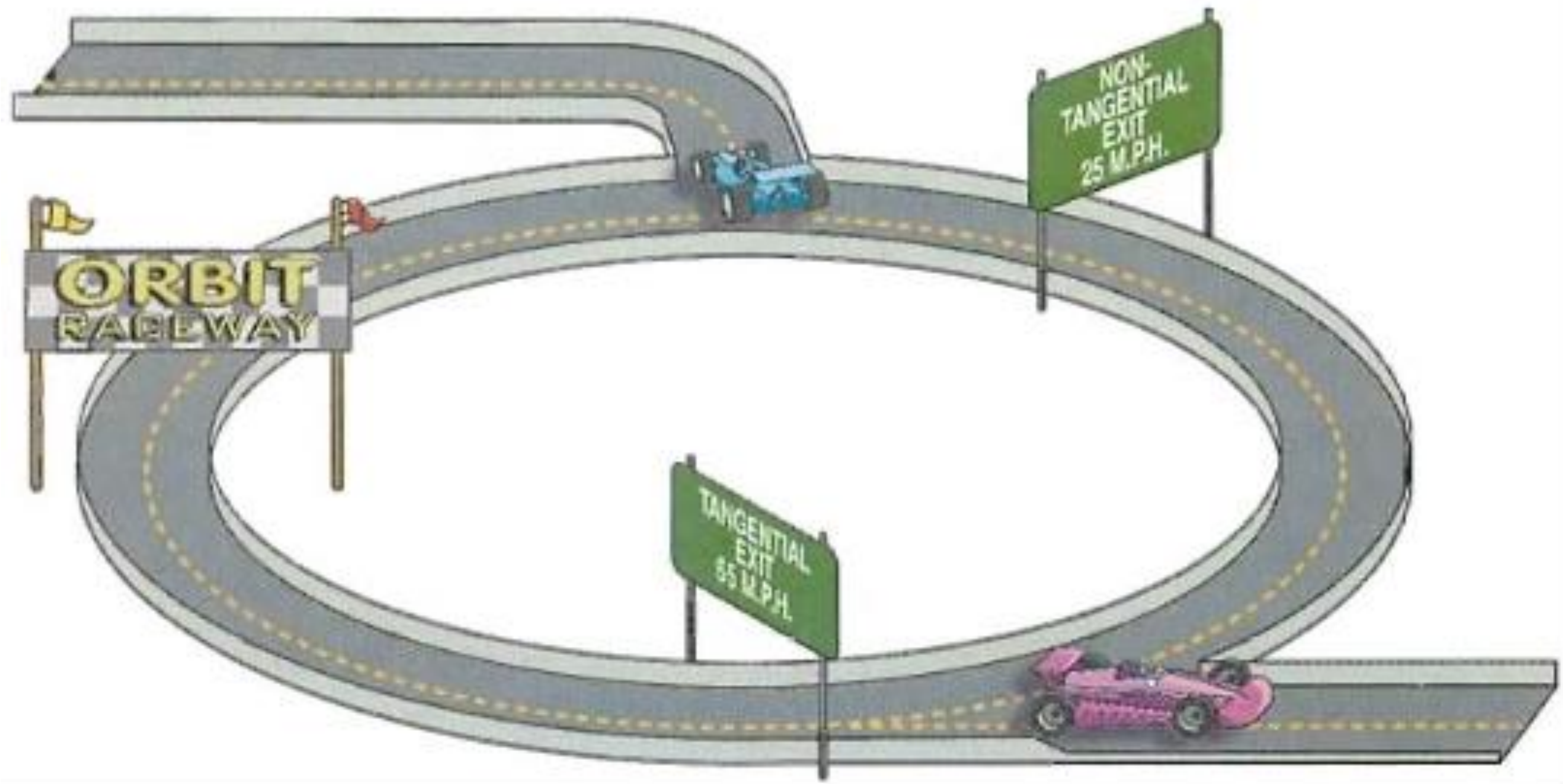
Μεταφορά Hohmann

- Σε αυτή την ενότητα θα μάθετε να:
  - Περιγράφετε τα βήματα μιας μεταφοράς Hohmann, τον πιο αποδοτικό-ως προς καύσιμα- τρόπο για μεταφορά από μία τροχιά σε μία άλλη στο ίδιο επίπεδο.
  - Προσδιορίζετε την απαιτούμενη μεταβολή ταχύτητας ώστε να υλοποιηθεί μια μεταφορά Hohmann

Μεταφορά Hohmann

- Το 1925, ο Γερμανός μηχανικός, Walter Hohmann, επινόησε μια μέθοδο εξοικονόμησης καυσίμων για τη μεταφορά μεταξύ τροχιών.
- Αυτή η μέθοδος, που ονομάζεται Μεταφορά Hohmann, χρησιμοποιεί μια ελλειπτική τροχιά μεταφοράς που εφάπτεται στις αρχικές και τελικές τροχιές.
- Ας φανταστούμε ότι οδηγούμε ένα αυτοκίνητο γύρω από μια πίστα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 6-3.

Μεταφορά Hohmann (II)



Οι ελιγμοί (μανούβρες) δορυφόρων ως μία ‘πίστα’ με αγωνιστικά αυτοκίνητα

Μεταφορά Hohmann (III)

- Η προσπάθεια που απαιτείται για να βγείτε από την πίστα εξαρτάται από τη θέση και τον προσανατολισμό της εξόδου.
- Για παράδειγμα, αν η έξοδος εφάπτεται στην τροχιά σας, τότε θα βγείτε εύκολα - απλά ισιώνετε τις ρόδες.
- Αντίθετα αν η έξοδος είναι κάθετη στην πίστα, πρέπει να επιβραδύνετε πολύ, ίσως να σταματήσετε και έπειτα στρίψετε.
- Με την εφαπτόμενη έξοδο χρειάζεται να αλλάξετε μόνο το μέγεθος της ταχύτητάς σας, πατώντας απλά τα φρένα.
- Με την κάθετη έξοδο, πρέπει γρήγορα να αλλάξετε το μέγεθος και την κατεύθυνση της ταχύτητάς σας που είναι δύσκολο να γίνει χωρίς να αναποδογυρίσετε το αυτοκίνητο σας

Μεταφορά Hohmann (IV)

- Η μεταφορά Hohmann εφαρμόζει αυτό το απλό παράδειγμα της πίστας σε τροχιές.
- Χρησιμοποιώντας εισόδους και εξόδους που εφάπτονται στις αρχικές και τελικές τροχιές μας, αλλάζουμε τις τροχιές χρησιμοποιώντας όσο το δυνατόν λιγότερη ενέργεια.
- Για τους μηχανικούς, η εξοικονόμηση ενέργειας σημαίνει εξοικονόμηση καυσίμων, κάτι που είναι πολύτιμο για τις αποστολές στο διάστημα.
- Εξ ορισμού, περιορίζουμε τις Μεταφορές Hohmann σε:
  - Τροχιές στο ίδιο επίπεδο (συνεπίπεδες τροχιές)
  - Τροχιές με τους μεγάλους άξονες (γραμμή των αψίδων) ευθυγραμμισμένους (κυκλικές τροχιές)
  - Στιγμιαίες μεταβολές ταχύτητας (ΔVs) εφαπτόμενες στις αρχικές και τελικές τροχιές

Μεταφορά Hohmann (IV)

- Θα ασχοληθούμε αργότερα με το πρόβλημα της αλλαγής μεταξύ τροχιακών επιπέδων.
- Οι κυκλικές τροχιές έχουν τους μεγάλους άξονες τους (γραμμή των αψίδων) ευθυγραμμισμένους μεταξύ τους.
- Επίσης, στην περίπτωση των στιγμιαίων αλλαγών ταχύτητας υποθέτουμε ότι ο χρόνος που ο κινητήρας λειτουργεί είναι πολύ μικρός σε σύγκριση με τον χρόνο ολοκλήρωσης της μεταφοράς Hohmann.
- Η εφαπτομενική αλλαγή ταχύτητας σημαίνει ότι το διαστημικό σκάφος αλλάζει το μέτρο του διανύσματος ταχύτητας, αλλά όχι κατεύθυνση του για να ξεκινήσει και να τελειώσει η μεταφορά Hohmann.
- Για να γίνει αυτό ,το διαστημικό σκάφος θα πρέπει να λειτουργήσει τις μηχανές του σε διεύθυνση παράλληλη με το διάνυσμα ταχύτητας του

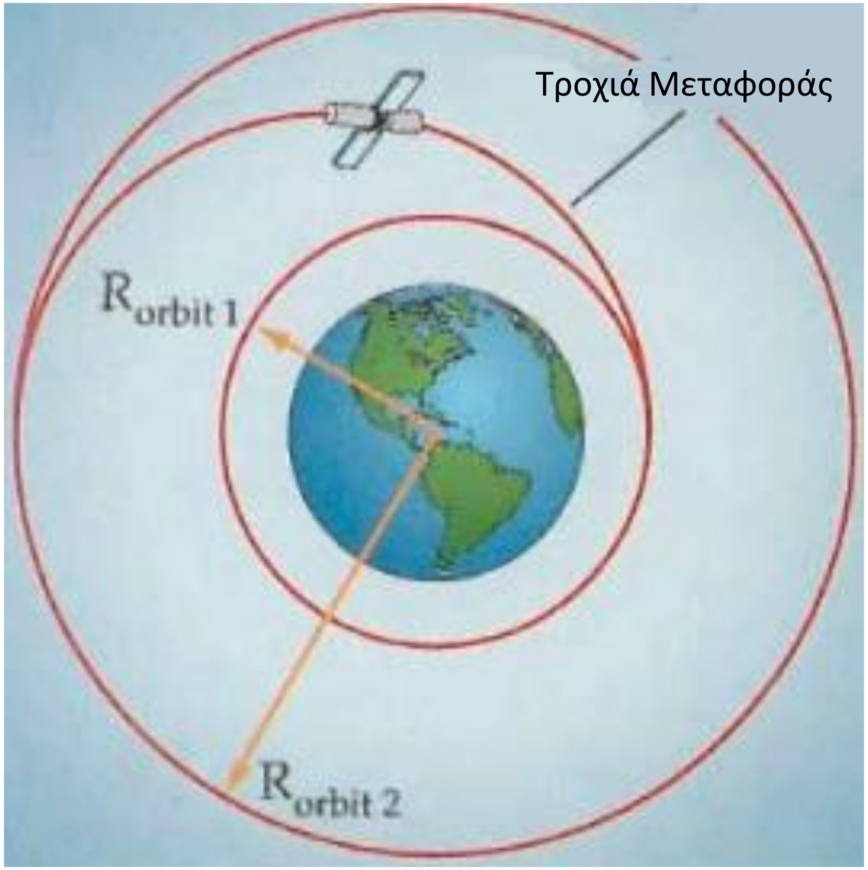
Αλλαγές Ταχύτητας

- Ας εξετάσουμε πως αυτές οι αλλαγές ταχύτητας επηρεάζουν την τροχιά.
- Υποθέτοντας ότι όλα τα ΔV εμφανίζονται σχεδόν στιγμιαία, χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα από το πρόβλημα δύο σωμάτων.
- Κάθε φορά που αυξάνουμε ή ελαττώνουμε ταχύτητα, αλλάζουμε την ειδική μηχανική ενέργεια της τροχιάς, ε, και επομένως το μέγεθος ή αλλιώς τον μεγάλο ημιάξονα της, α.
- Θυμηθείτε ότι αυτές οι ποσότητες συνδέονται ως:

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2\alpha}$$

Αλλαγή Τροχιάς

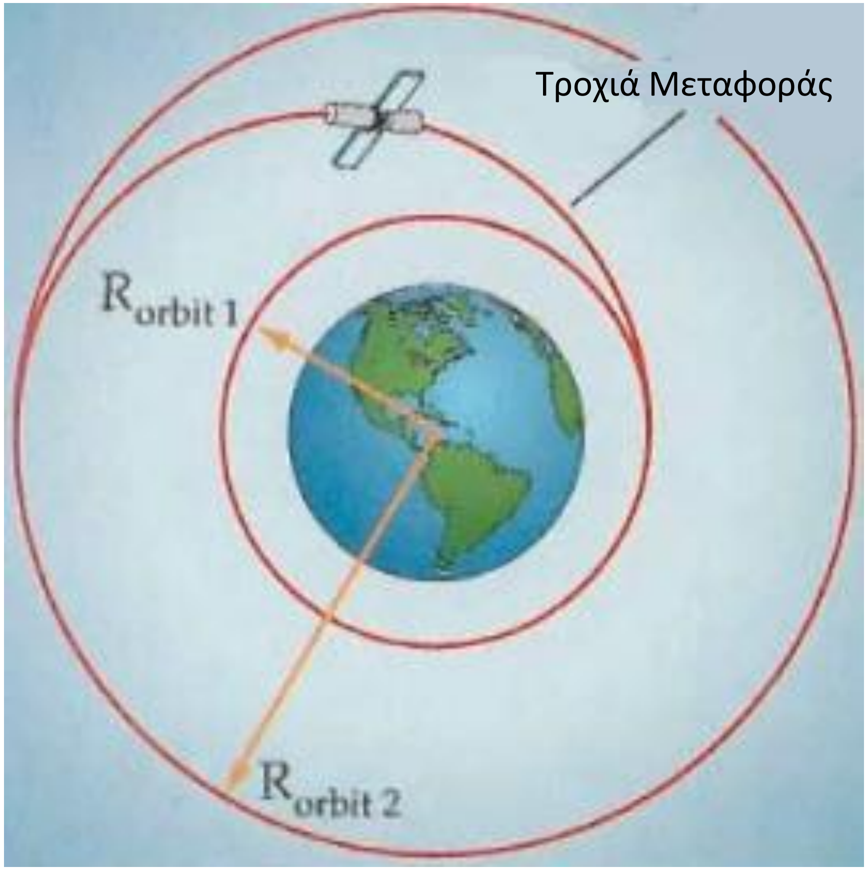
- Εάν θελήσουμε να μετακινήσουμε ένα διαστημικό σκάφος σε υψηλότερη τροχιά, πρέπει να αυξήσουμε τον μεγάλο ημιάξονα (προσθήκη ενέργειας στην τροχιά) αυξάνοντας την ταχύτητα.
- Από την άλλη πλευρά, για να μετακινήσουμε το διαστημικό σκάφος σε μια χαμηλότερη τροχιά, θα πρέπει να μειώσουμε την ενέργεια και άρα την ταχύτητα.



Αλλαγή Τροχιάς (II)

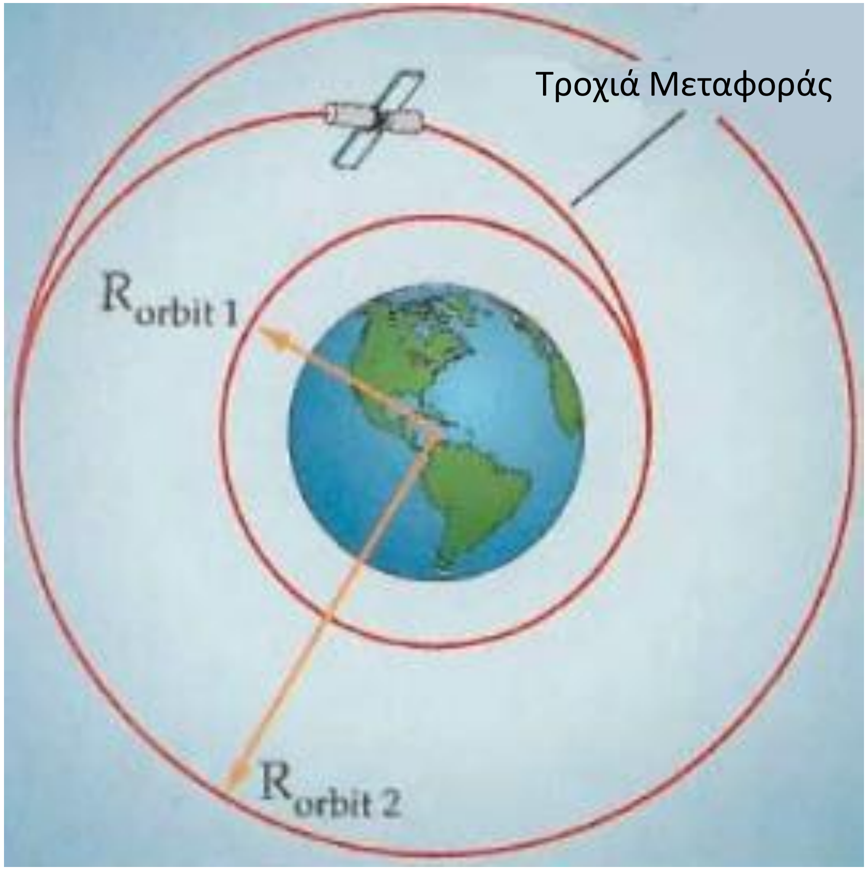
Applied Mechanics Laboratory

- Κατά τη διάρκεια μιας αποστολής, μερικές φορές πρέπει να μεταφέρουμε ένα διαστημικό σκάφος από μια τροχιά (τροχιά 1) σε μια άλλη (τροχιά 2).
- Το διαστημικό σκάφος πρέπει να τεθεί σε μια τροχιά μεταφοράς, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
- Για να πάμε από την τροχιά 1 στην τροχιά μεταφοράς, αλλάζουμε την ενέργεια της τροχιάς (μεταβάλλοντας την ταχύτητα του διαστημικού σκάφους κατά ΔV_1).



Αλλαγή Τροχιάς (III)

- Στη συνέχεια, όταν το διαστημικό σκάφος φτάσει στην τροχιά 2, αλλάζουμε και πάλι την ενέργειά του (αλλάζοντας την ταχύτητά του κατά ΔV_2).
- Εάν δεν αλλάξουμε τη δεύτερη φορά την ενέργεια του, το διαστημικό σκάφος θα παραμείνει στην τροχιά μεταφοράς επ' αόριστον, περνώντας από το σημείο που ξεκίνησε στην τροχιά 1, και το σημείο της τροχιάς 2.
- Έτσι, ένας πλήρης ελιγμός απαιτεί δύο ξεχωριστές ενεργειακές αλλαγές που επιτυγχάνεται με την αλλαγή των τροχιακών ταχυτήτων (ΔV_1 και ΔV_2).



Υπολογισμός ΔV (I)

- Το ΔV αντιπροσωπεύει την αλλαγή από την τρέχουσα ταχύτητα σε μια επιθυμητή ταχύτητα:

$$\Delta V = |V_{\varepsilon\pi\iota\theta} - V_{\tau\rho\varepsilon\chi}|$$

- Παρατηρήστε ότι παίρνουμε την απόλυτη τιμή αυτής της διαφοράς επειδή θέλουμε να γνωρίζουμε το μέτρο της μεταβολής της ταχύτητας, ώστε να μπορούμε να υπολογίσουμε την ενέργεια και επομένως το απαραίτητο καύσιμο.
- Δεν ανησυχούμε για το πρόσημο του ΔV επειδή χρειαζόμαστε καύσιμο είτε το διαστημικό σκάφος επιταχύνει είτε επιβραδύνει.
- Αν ΔV_1 είναι η ταχύτητα που μεταφέρει το διαστημικό σκάφος από την τροχιά 1 στην τροχιά μεταφοράς τότε

$$\Delta V_1 = |V_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi_1} - V_{\tau\rho o\chi\iota\alpha_1}|$$

ΔV_1: μεταβολή ταχύτητας για αλλαγή από τροχιά_1 σε τροχιά μεταφοράς (km/s)

$V_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi_1}$: ταχύτητα στην τροχιά μεταφοράς σε ακτίνα της τροχιά_1 (km/s)

$V_{\tau\rho o\chi\iota\alpha_1}$: ταχύτητα στην τροχιά_1 (km/s)

Υπολογισμός ΔV (II)

ΔV_2 είναι η μεταβολή ταχύτητας ώστε να μεταφερθεί το διαστημικό σκάφος από την τροχιά μεταφοράς στην τροχιά$_2$

$$\Delta V_2 = |V_{\tau\rho o\chi\iota\alpha_2} - V_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi_2}|$$

Όπου

ΔV_2: μεταβολή ταχύτητας για αλλαγή από τροχιά μεταφοράς σε τροχιά$_2$ (km/s)

Για να υπολογίσουμε την ολική ΔV που χρειαζόμαστε, αθροίζουμε :

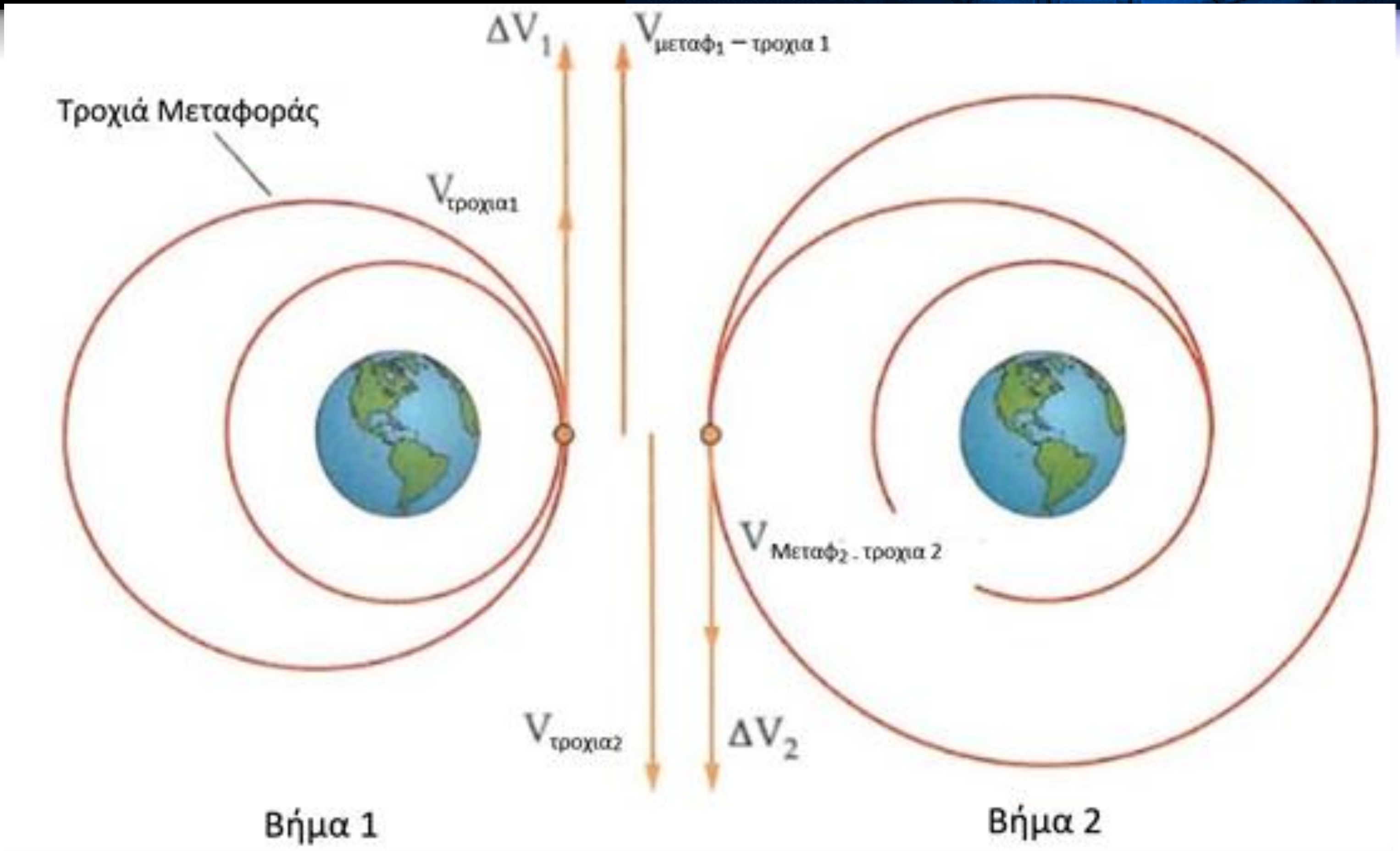
$$\Delta V_{total} = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

Όπου

ΔV_{total}: ολική μεταβολή ταχύτητας για τη μεταφορά (km/s)

Υπολογισμός ΔV (III)

Applied Mechanics Laboratory



Μεταφορά Hohmann. Βήμα 1: Η πρώτη πυροδότηση (καύση) ή ΔV βγάζει τον δορυφόρο από την αρχική του κυκλική τροχιά και μπαίνει σε μία ενδιάμεση ελλειπτική τροχιά μεταφοράς. Βήμα 2: Η δεύτερη πυροδότηση μεταφέρει τον δορυφόρο από την ελλειπτική τροχιά μεταφοράς στην τελική κυκλική τροχιά

Υπολογισμός

ΔV_{total}

- Για να υπολογίσουμε τη χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις ενέργειας από την τροχιακή μηχανική.
- Όλα όσα πρέπει να γνωρίζουμε για την επίλυση ενός προβλήματος τροχιακών ελιγμών προέρχονται από αυτές τις δύο πολύτιμες σχέσεις, όπως μπορείτε να δείτε στο Παράδειγμα 3-3.
- Πρώτον, χρειαζόμαστε την ειδική μηχανική ενέργεια, ε:

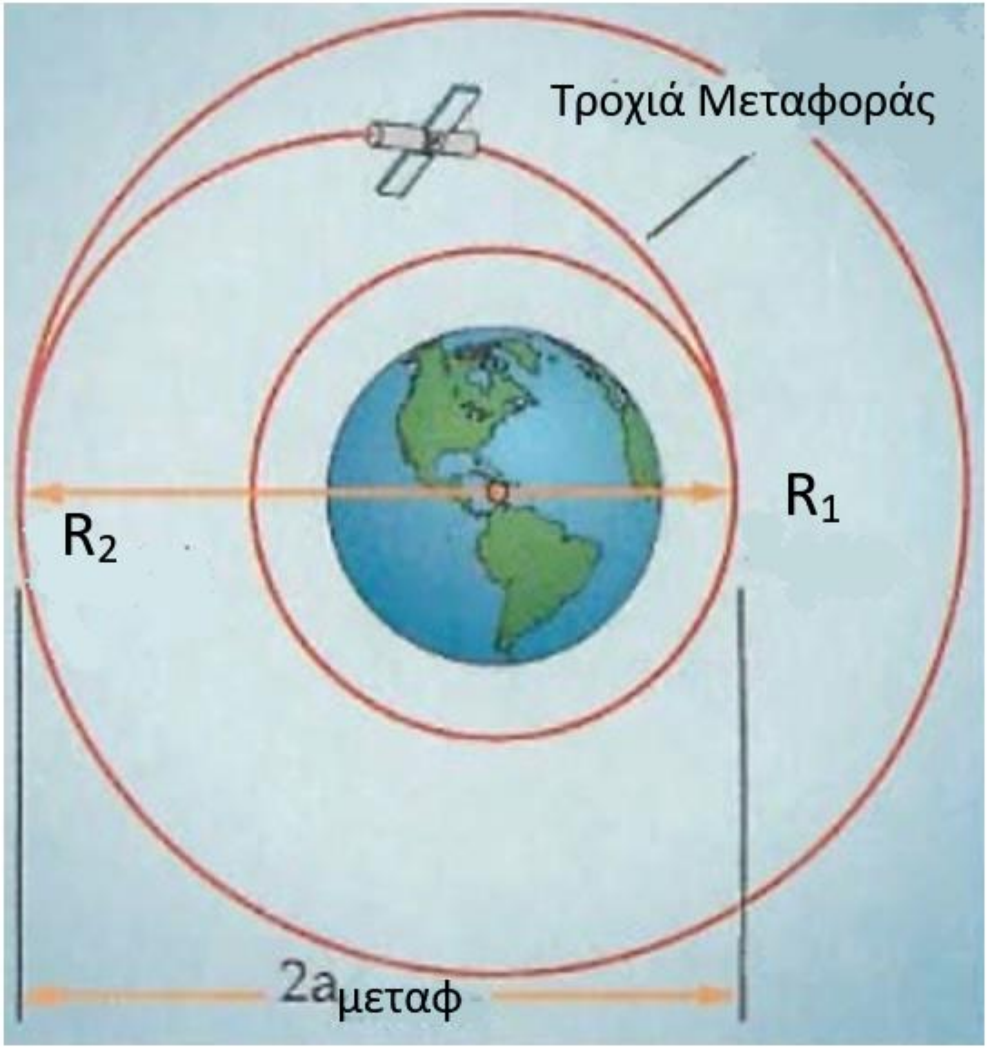
$$\varepsilon = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{R}$$

- Στη συνέχεια χρειαζόμαστε την ειδική μηχανική ενέργεια στη μορφή:

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2\alpha}$$

Διαδικασία μεταφοράς Τροχιών

- Βήμα 1: η μεταβολή ΔV_1 μεταφέρει το διαστημικό σκάφος από την τροχιά$_1$ στην τροχιά μεταφοράς
- Βήμα 2: η μεταβολή ΔV_2 μεταφέρει το διαστημικό σκάφος από την τροχιά μεταφοράς στην τροχιά$_2$



Υπολογισμός ΔV_1 και ΔV_2 (Ι)

- Για να λύσουμε ως προς τα ΔV_1 και ΔV_2 πρέπει να βρούμε την ενέργεια σε κάθε τροχιά. Αν γνωρίζουμε τα μεγέθη των τροχιών 1 και 2, τότε γνωρίζουμε τους μεγάλους ημιάξονες (τους α_1 και α_2)
- Ο μεγάλος άξονας της τροχιάς μεταφοράς ισούται με το άθροισμα των ακτινών των δύο τροχιών $2\alpha_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi} = R_1 + R_2$
- Χρησιμοποιώντας την ε... την περιγραφή της ειδικής μηχανικής ενέργειας πρ...

$$\varepsilon_1 = -\frac{\mu}{2\alpha_1}$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\mu}{2\alpha_2}$$

$$\varepsilon_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi} = -\frac{\mu}{2\alpha_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi}}$$

Υπολογισμός ΔV_1 και ΔV_2 (II)

- Γνωρίζοντας αυτές τις ενέργειες μπορούμε να υπολογίσουμε:

$$V_{\tau\rho o\chi\iota\alpha_1} = \sqrt{2\left(\frac{\mu}{R_1} + \varepsilon_1\right)}$$

$$V_{\tau\rho o\chi\iota\alpha_2} = \sqrt{2\left(\frac{\mu}{R_2} + \varepsilon_2\right)}$$

$$V_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi_1} = \sqrt{2\left(\frac{\mu}{R_1} + \varepsilon_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi}\right)}$$

$$V_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi_2} = \sqrt{2\left(\frac{\mu}{R_2} + \varepsilon_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi}\right)}$$

Υπολογισμός ΔV_1 και ΔV_2 (III)

- Τελικά, για να υπολ ... ις διαφορές:

$$\Delta V_1 = |V_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi_1} - V_{\tau\rho o\chi\iota\alpha_1}|$$

$$\Delta V_2 = |V_{\tau\rho o\chi\iota\alpha_2} - V_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi_2}|$$

- και προσθέτουμε:

$$\Delta V_{o\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

Μεταφορά Hohmann

- Η μεταφορά Hohmann είναι ενεργειακά αποδοτική, αλλά απαιτεί χρόνο για να ολοκληρωθεί.
- Για να υπολογίσουμε τον απαιτούμενο χρόνο μεταφοράς ας κοιτάξουμε το σχήμα του ελιγμού.
- Η μεταφορά καλύπτει ακριβώς το μισό μιας έλλειψης.
- Θυμηθείτε ότι βρίσκουμε τη συνολική περίοδο για οποιαδήποτε κλειστή τροχιά από την εξίσωση:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{\alpha^3}{\mu}}$$

- Συνεπώς ο χρόνος πτήσης/μεταφοράς ισούται με:

$$TOF = \frac{P}{2} = \pi\sqrt{\frac{\alpha_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi}^3}{\mu}}$$

Όπου

TOF: χρόνος πτήσης/μεταφοράς (s)

P: περίοδος τροχιάς (s)

μ: βαρυτική παράμετρος (km^3/s^3)=3.98 x 10^5 km^3/s^2 για τη Γη

α: μεγάλος ημιάξονας (km)

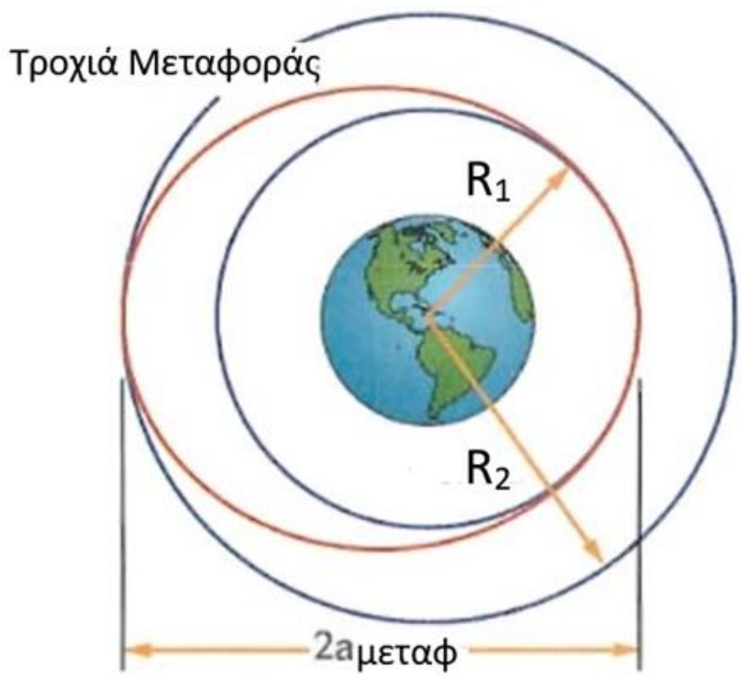
Παράδειγμα 3-7

Υποθέτουμε ότι η NASA θέλει να μεταφέρει έναν δορυφόρο τηλεπικοινωνιών από χαμηλή (LEO) τροχιά σε γεωσύγχρονη τροχιά. Δίνονται:

- $R_1 = 6570\ km$
- $R_2 = 42160\ km$

Πόση είναι η ολική ΔV για αυτή την μεταφορά και πόσος χρόνος απαιτείται για να ολοκληρωθεί;

Σχήμα προβλήματος



Παράδειγμα 3-7 - Λύση