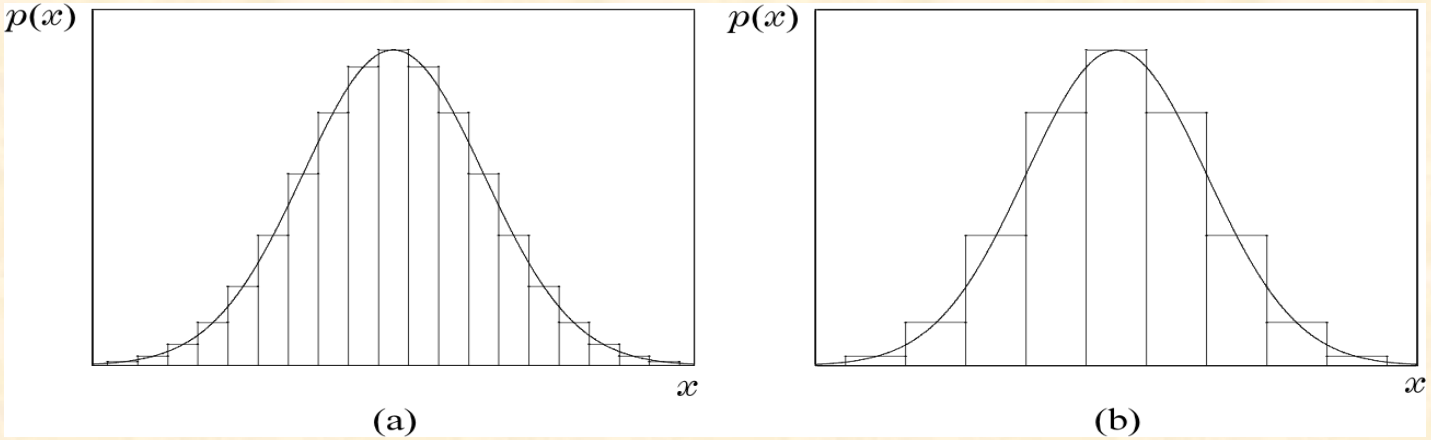
❖ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΠΡΟΤΥΠΩΝ
❖(PATTERN RECOGNITION)

Σέργιος Θεοδωρίδης

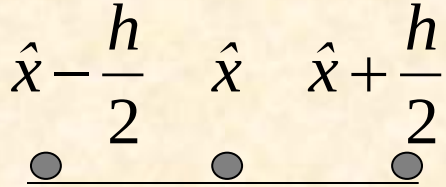
Κωνσταντίνος Κουτρούμπας

❖ Μη παραμετρική εκτίμηση



- $P \approx \dfrac{k_N}{N}$ → k_N στο h; N συνολικά

- $\hat{p}(x) \equiv \hat{p}(\hat{x}) = \dfrac{1}{h}\,\dfrac{k_N}{N}, \quad |x-\hat{x}| \le \dfrac{h}{2}$

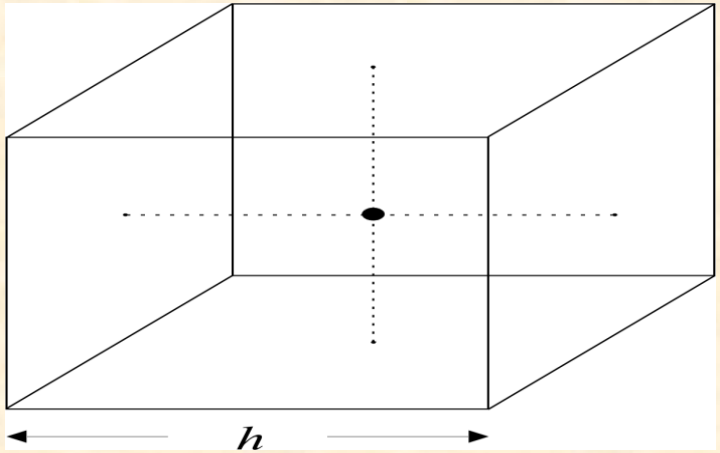


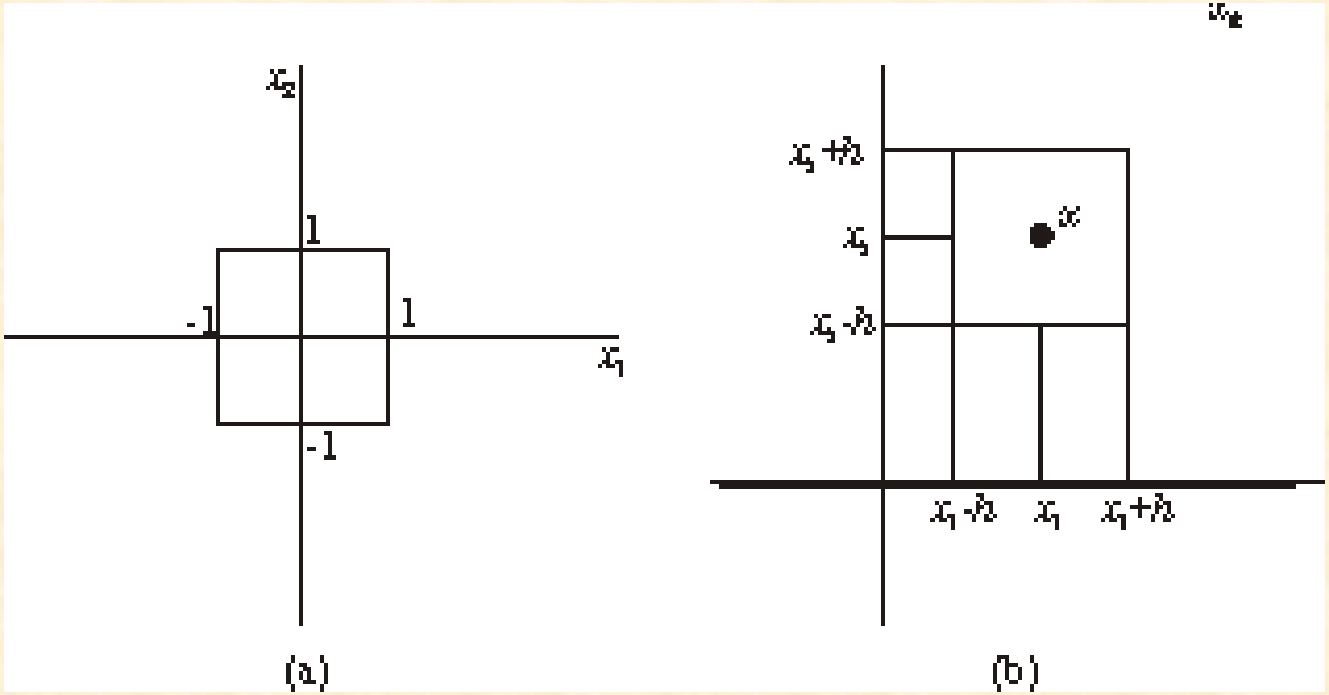
- Αν $p(x)$ συνεχής, $\hat{p}(x) \to p(x)$ καθώς $N \to \infty$, αν

$$h_N \to 0, \quad k_N \to \infty, \quad \frac{k_N}{N} \to 0$$

❖ Παράθυρα Parzen

- ➢ Διαίρεση του πολυδιάστατου χώρου σε υπερκύβους





- Ορίζουμε

$$\phi(\underline{x}_i) = \begin{cases} 1 & |x_{ij}| \le 1/2 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

  - Δηλαδή, είναι 1 μέσα σε υπερκύβο μοναδιαίας πλευράς με κέντρο το 0
  - $$\hat{p}(\underline{x}) = \frac{1}{h^l}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi\left(\frac{\underline{x}_i - \underline{x}}{h}\right)\right)$$

$\frac{1}{\text{όγκος}} * \frac{1}{N} *$ αριθμός σημείων εντός

ένας υπερκύβος πλευράς h κεντραρισμένος στο $\underline{x}$

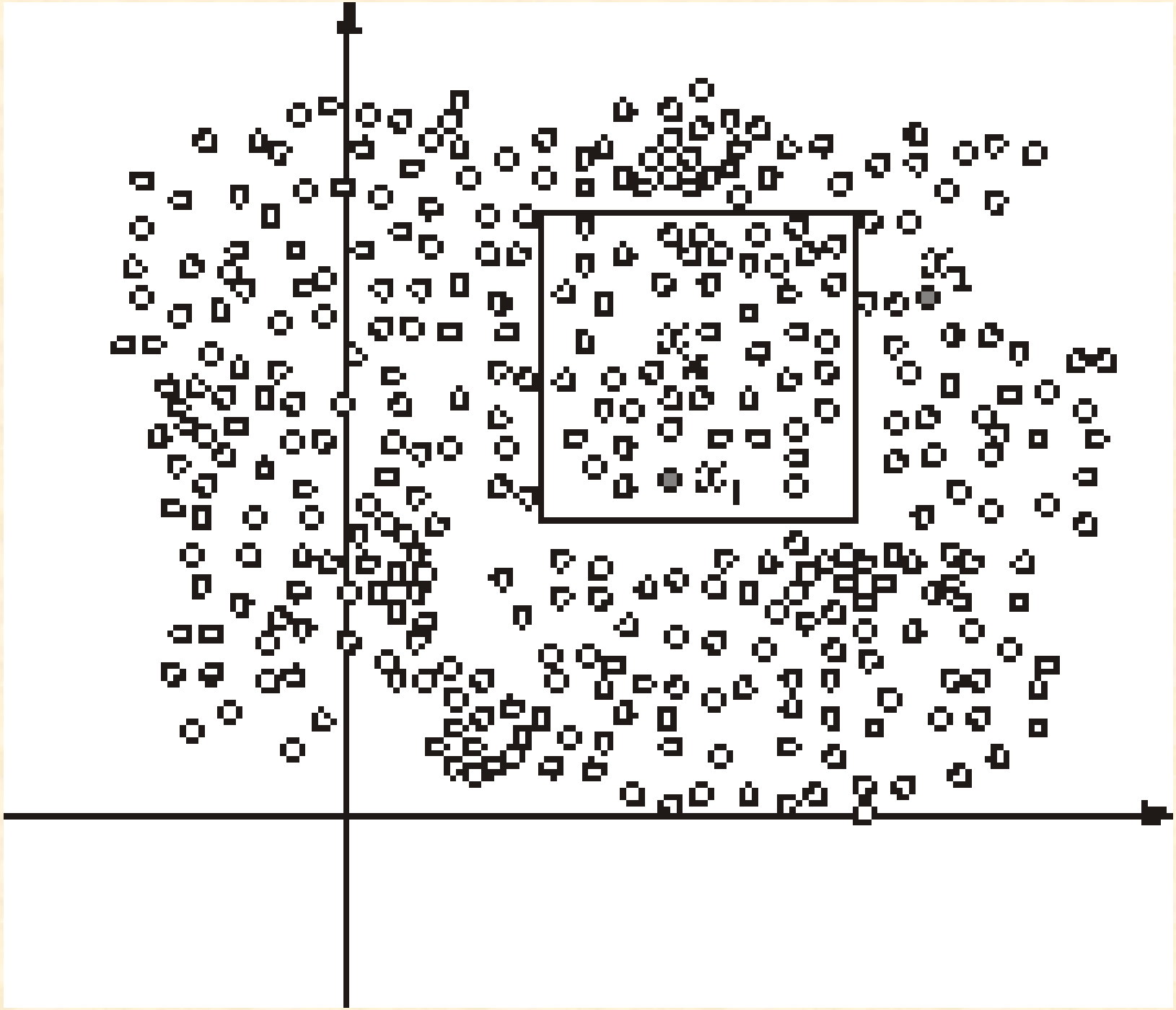
- Το πρόβλημα: $p(\underline{x})$ συνεχής

  $\phi(.)$ ασυνεχής

- Παράθυρα Parzen-Πυρήνες-συναρτήσεις δυναμικού

  $\phi(\underline{x})$ είναι ομαλή

$$\phi(\underline{x}) \ge 0, \quad \int_{\underline{x}} \phi(\underline{x}) d\,\underline{x} = 1$$



Αν $\varphi(x)=N(0,I)$ τότε

$$\hat{p}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{l}{2}} h^{l}} \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i)^T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i)}{2h^2}\right)$$

➢ Μέση τιμή

$$E[\hat{p}(\underline{x})] = \frac{1}{h^l}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E[\varphi(\frac{\underline{x}_i - \underline{x}}{h})]\right) = \int_{\underline{x}'} \frac{1}{h^l}\varphi(\frac{\underline{x}' - \underline{x}}{h})\, p(\underline{x}')\, d\underline{x}'$$

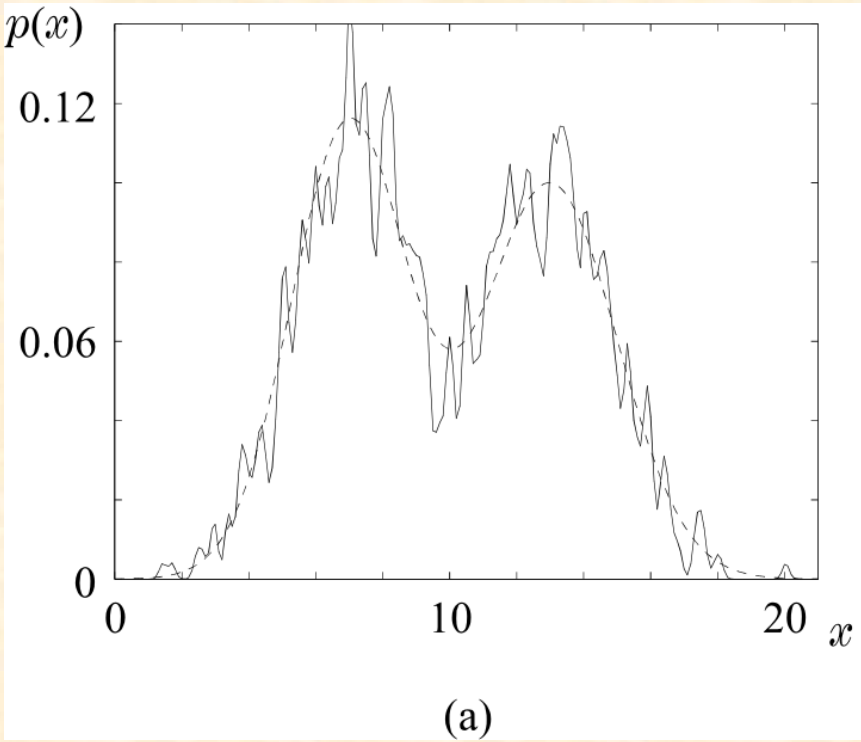
- $h \to 0,\ \frac{1}{h^l} \to \infty$
- $h \to 0$ το εύρος της $\phi(\frac{\underline{x}' - \underline{x}}{h}) \to 0$
- $\int \frac{1}{h^l}\varphi(\frac{\underline{x}' - \underline{x}}{h})\, d\underline{x} = 1$
- $h \to 0\ \ \frac{1}{h^l}\varphi(\frac{\underline{x}}{h}) \to \delta(\underline{x})$

$$E[\hat{p}(x)] = \int_{\underline{x}'} \delta(\underline{x}' - \underline{x})\, p(\underline{x}')\, d\underline{x}' = p(\underline{x})$$

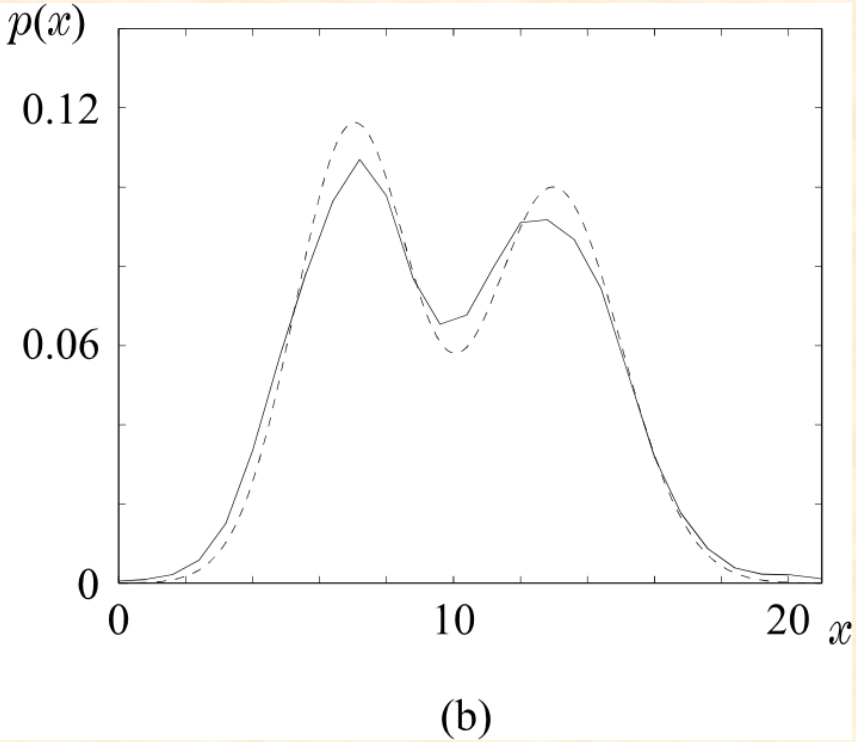
Συνεπώς αμερόληπτος (unbiased) στο όριο

- Διασπορά
  - Όσο μικρότερο το h, τόσο μεγαλύτερη η διασπορά

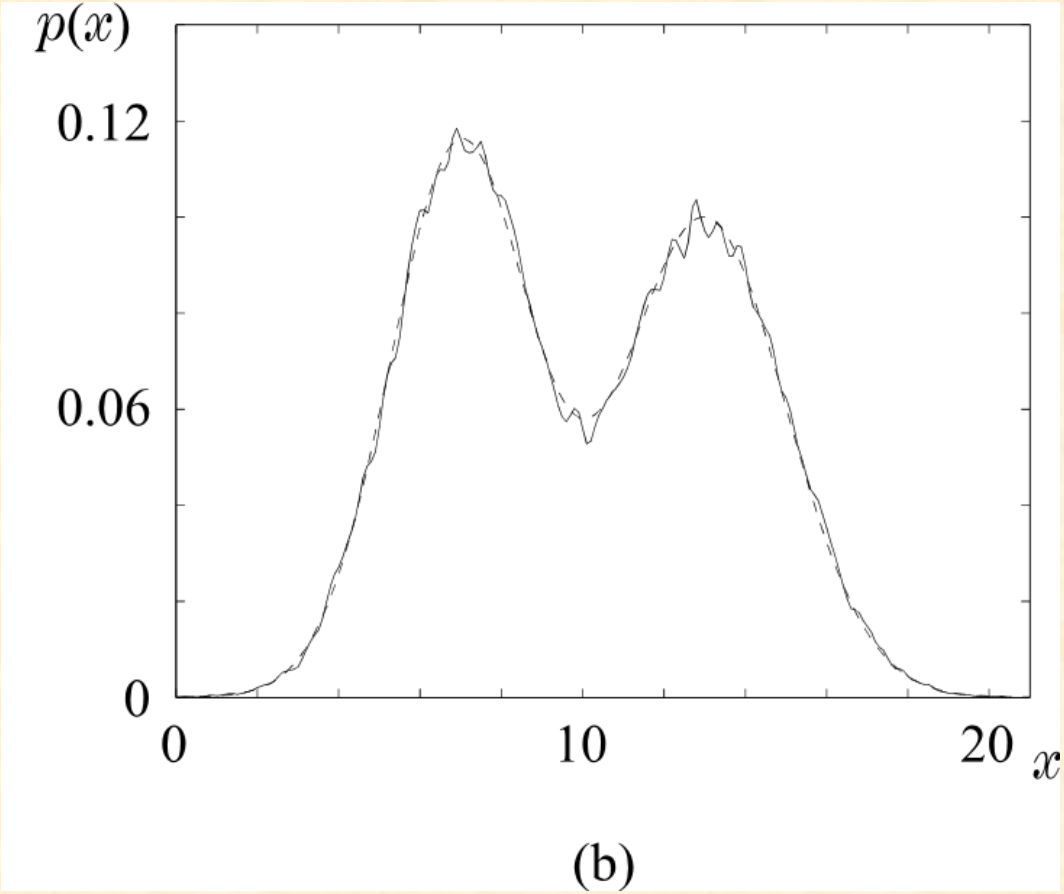
h=0.1, N=1000



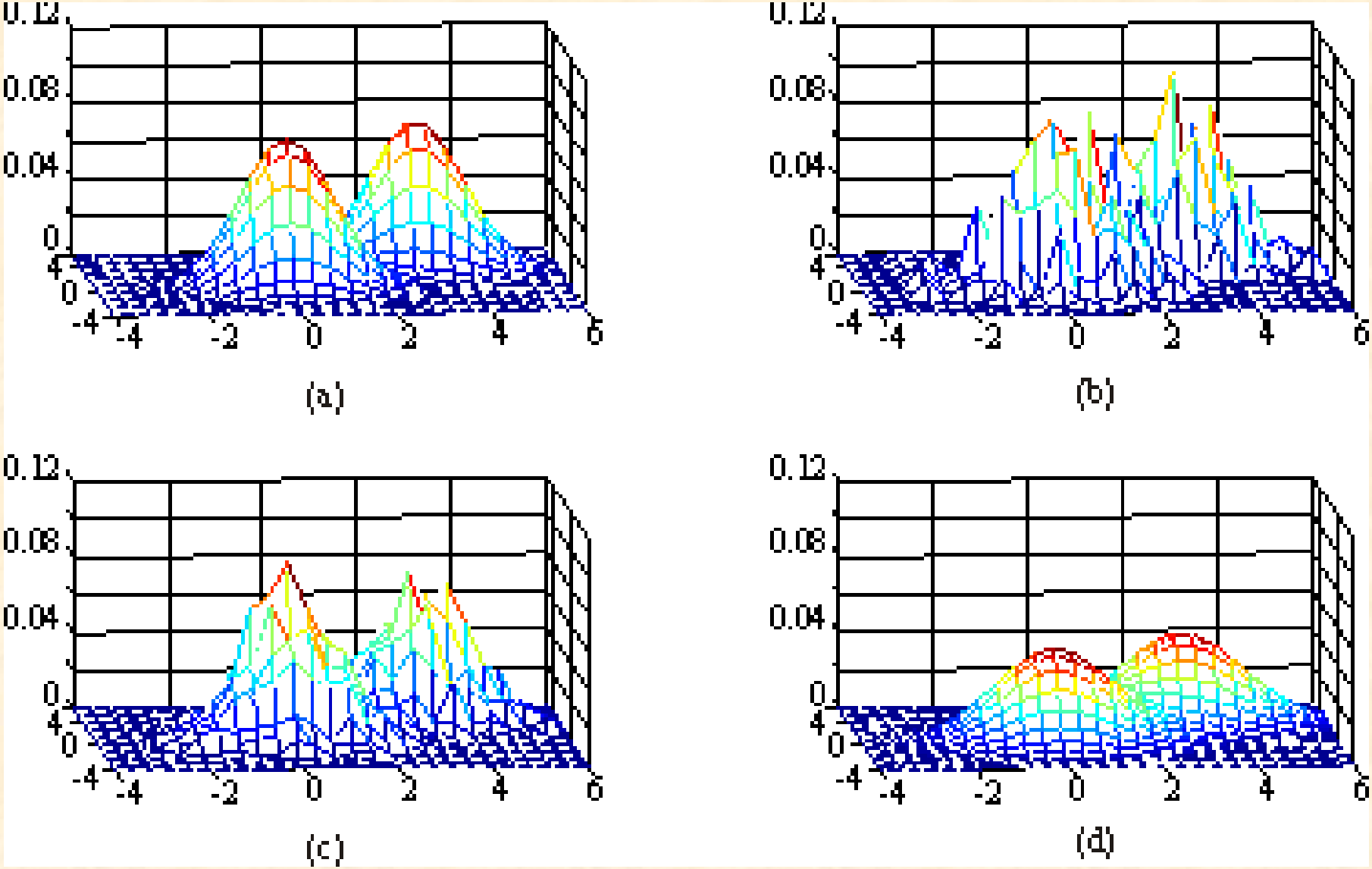
h=0.8, N=1000



h=0.1, N=10000



- Όσο μεγαλύτερο το N, τόσο καλύτερη η ακρίβεια



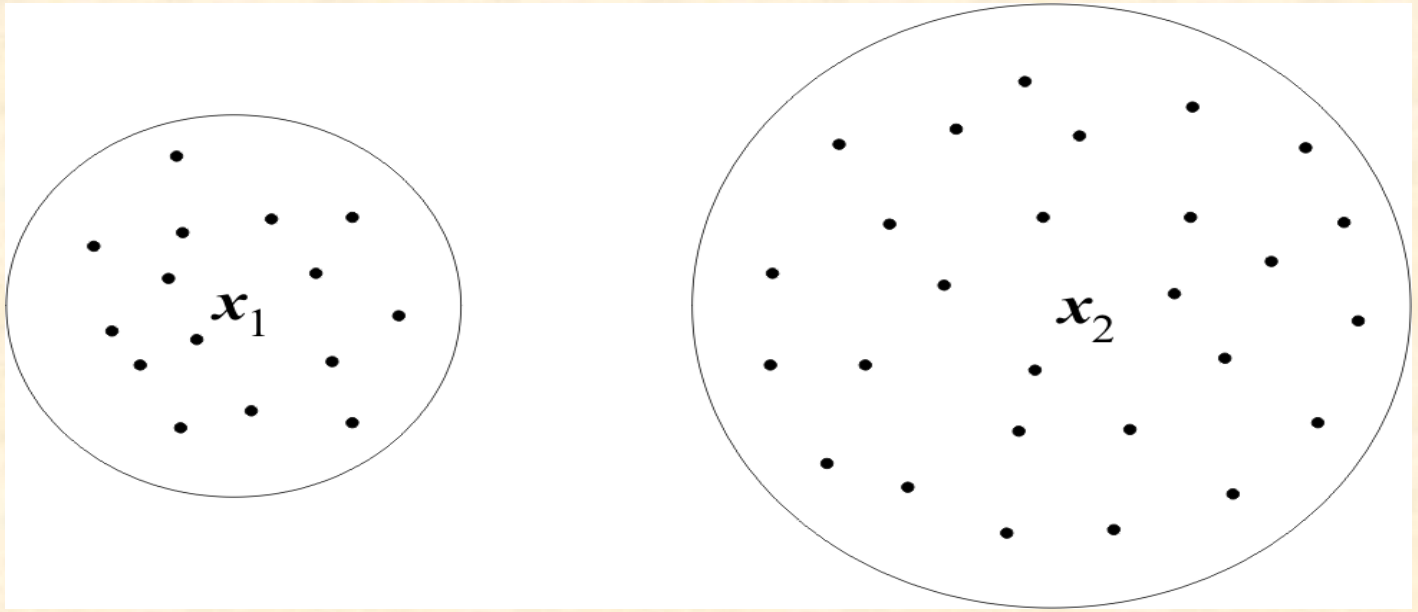
(a) αρχ. κατανομή, (b) h=0.05, N=1000, (c) h=0.05, N=20000, (d) h=0.8, N=20000

- Αν
  - $h \to 0$
  - $N \to \infty$
  - $hN \to \infty$

Ασυμπτωτικά απροκατάληπτος

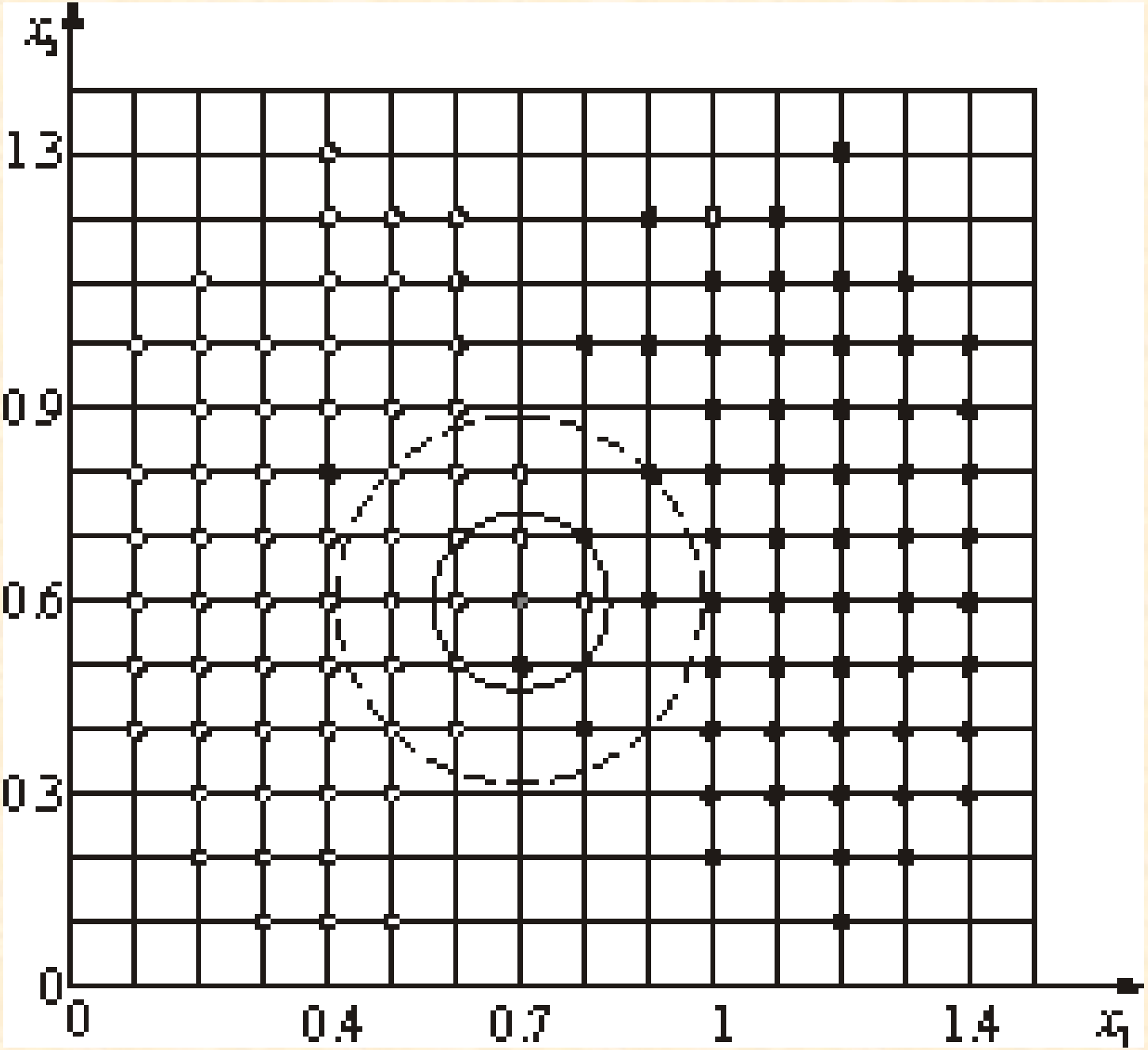
❖ Εκτίμηση πυκνότητας με βάση τους K-εγγύτερους γείτονες (K Nearest Neighbor Density Estimation)

- Στα παράθυρα Parzen:
  - Ο όγκος είναι σταθερός
  - Ο αριθμός των σημείων στον όγκο μεταβάλλεται
- Τώρα:
  - Κρατάμε τον αριθμό των σημείων σταθερό $k_N = k$
  - Επιτρέπουμε στον όγκο να μεταβάλλεται
  - $\hat{p}(\underline{x}) = \dfrac{k}{NV(\underline{x})}$



Κανόνας του Bayes:
($\theta = P(\omega_2)/P(\omega_1)$)

$$\frac{\frac{k}{N_1V_1}}{\frac{k}{N_2V_2}} = \frac{N_2V_2}{N_1V_1}(><)\theta$$


x2
1.3
0.9
0.6
0.3
0
0
0.4
0.7
1
1.4
x1

❖ ΚΑΤΑΡΑ ΤΗΣ ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΌΤΗΤΑΣ (CURSE OF DIMENSIONALITY)

- Σε όλες τις μεθόδους, μέχρι τώρα, είδαμε ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των σημείων, N, τόσο καλύτερη είναι η προκύπτουσα εκτίμηση.

- Αν στο μονοδιάστατο χώρο ένα διάστημα, που περιέχει N σημεία, είναι αρκετό (για καλή εκτίμηση), στον δισδιάστατο χώρο το αντίστοιχο τετράγωνο θα απαιτεί N^2 και στον ℓ-διάστατο χώρο ο ℓ-διάστατος κύβος θα απαιτεί N^ℓ σημεία.

- Η εκθετικά αύξηση του αριθμού των αναγκαίων σημείων είναι γνωστή ως κατάρα της διαστατικότητας (curse of dimensionality). Πρόκειται για σημαντικό πρόβλημα που αντιμετωπίζει κανείς σε χώρους υψηλής διάστασης.

❖ ΑΠΛΟΙΚΟΣ ΤΑΞΙΝΟΜΗΤΗΣ BAYES (NAIVE – BAYES CLASSIFIER)

- Έστω $\underline{x} \in \Re^{\ell}$ και ότι στόχος είναι η εκτίμηση της $p(\underline{x} \mid \omega_i)$ $i = 1, 2, \ldots, M$. Για μία "καλή" εκτίμηση της pdf χρειάζονται, ας πούμε, N^{ℓ} σημεία.

- Έστω ότι $x_1, x_2, \ldots, x_{\ell}$ είναι αμοιβαίως ανεξάρτητα. Τότε:

$$p(\underline{x} \mid \omega_i) = \prod_{j=1}^{\ell} p(x_j \mid \omega_i)$$

- Σ' αυτή την περίπτωση, κάποιος θα χρειαζόταν, περίπου, N σημεία για κάθε pdf.

- Ο απλοϊκός ταξινομητής Bayes δουλεύει καλά ακόμα και σε περιπτώσεις όπου παραβιάζεται η υπόθεση της ανεξαρτησίας

❖ Ο κανόνας του εγγύτερου γείτονα (The Nearest Neighbor Rule)

- **Για δεδομένο** $\underline{x}$
- Από δεδομένο σύνολο N διανυσμάτων εκπαίδευσης, προσδιόρισε τα k πλησιέστερα στο $\underline{x}$

- Από αυτά τα k προσδιόρισε τα k_i που ανήκουν στην κλάση ω_i

$$\text{Καταχώρησε } \underline{x} \rightarrow \omega_i : \quad k_i > k_j \quad \forall i \neq j$$

- Η απλούστερη περίπτωση

$k=1$!!!

- Για μεγάλα N παρουσιάζει καλή συμπεριφορά. Αποδεικνύεται ότι: Αν P_B είναι η βέλτιστη πιθανότητα λάθους κατά Bayes, τότε:

$$P_B \leq P_{NN} \leq P_B\left(2 - \frac{M}{M-1} P_B\right) \leq 2P_B$$

- $P_B \leq P_{kNN} \leq P_B + \sqrt{\frac{2P_{NN}}{k}}$ Για δύο κλάσεις

- $k \to \infty,\ P_{kNN} \to P_B$

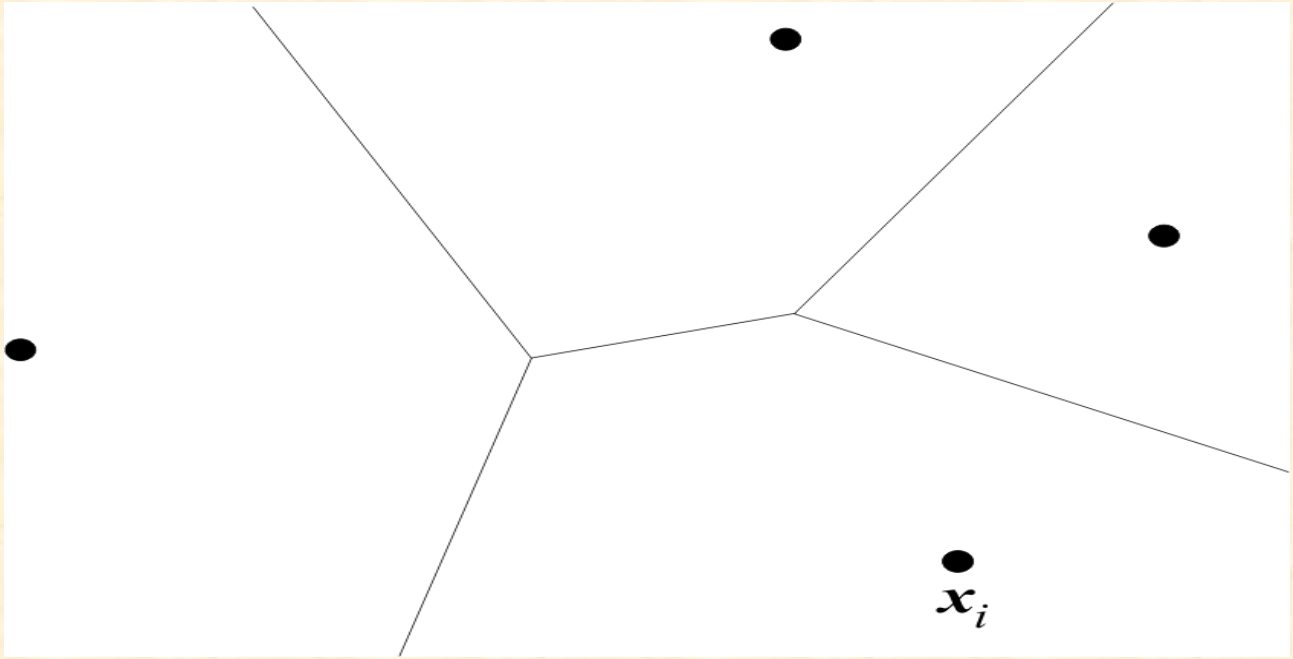
- Για μικρό P_B:

$$P_{NN} \cong 2P_B$$

$$P_{3NN} \cong P_B + 3(P_B)^2$$

Πρόβλημα: Μεγάλο υπολογιστικό κόστος ($O(kN)$ ανά δείγμα)

❖ Ψηφοθέτηση Voronoi (Voronoi tesselation) (1-NN)



$$R_i = \left\{ \underline{x} : d(\underline{x}, \underline{x}_i) < d(\underline{x}, \underline{x}_j)\, i \neq j \right\}$$