Ασκήσεις για το μάθημα «Αναγνώριση Προτύπων»

1. Θεωρείστε ένα πρόβλημα δύο κλάσεων στο μονοδιάστατο χώρο. Υπάρχει περίπτωση η πιθανότητα σφάλματος ταξινόμησης να είναι μεγαλύτερη από ½; Αν ναι δώστε ένα παράδειγμα. Αν όχι δικαιολογήστε (το ερώτημα γενικεύεται και σε χώρους l διαστάσεων).
   Υπόδειξη: Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes, γράψτε την πιθανότητα λάθους ως
   $$P_e = \int_{R_2} P(\omega_1|\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{x} + \int_{R_1} P(\omega_2|\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{x}$$

2. Θεωρείστε ένα πρόβλημα δύο κλάσεων, ω_1 και ω_2. Βρείτε τουλάχιστον μία ικανή συνθήκη κάτω από την οποία ο ταξινομητής Bayes, για το πρόβλημα διαχωρισμού των δύο αυτών κλάσεων, θα αποφασίζει συνέχεια υπέρ της κλάσης ω_1.

3. Δείξτε ότι σε ένα πρόβλημα ταξινόμησης με M κλάσεις, η πιθανότητα σφάλματος ταξινόμησης για τον βέλτιστο ταξινομητή φράσσεται σύμφωνα με την σχέση
   $$P_e \leq \frac{M-1}{M}$$
   Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι, για κάθε $\boldsymbol{x}$, το μέγιστο μεταξύ των $P(\omega_i|\boldsymbol{x}), i = 1, 2, \ldots, M$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το $1/M$. Η ισότητα ισχύει αν όλες οι $P(\omega_i|\boldsymbol{x})$ είναι ίσες. Επίσης χρησιμοποιήστε (αφού πρώτα την αποδείξετε) την έκφραση
   $$P(e) = 1 - \int P(\omega_{\max}|\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},$$
   όπου το ολοκλήρωμα εκτείνεται σε όλο το χώρο των δειγμάτων.

4. Σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα ταξινόμησης δύο κλάσεων, ω_1και ω_2,, οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας είναι οι Gaussian $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ και $\mathcal{N}(1, \sigma^2)$ για τις δύο κλάσεις, αντιστοίχως. Προσδιορίστε τις περιοχές απόφασης R_1 και R_2 που αντιστοιχούν στις κλάσεις ω_1 και ω_2, αντίστοιχα.

5. Επαναλάβετε την άσκηση 3 για την περίπτωση όπου οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας είναι οι Gaussian $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_2^2)$.

6. Θεωρήστε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα δύο (ισοπίθανων) κλάσεων με δείγματα που κατανέμονται σύμφωνα με την Rayleigh κατανομή για κάθε κλάση, δηλαδή,

$$p(x|\omega_i) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma_i^2} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_i^2}\right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Υπολογίστε τις περιοχές απόφασης για κάθε κλάση.

7. Θεωρείστε ένα πρόβλημα δύο (ισοπίθανων) κλάσεων, ω_1 και ω_2, όπου η κλάση ω_1 μοντελοποιείται από την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(0,1)$ ενώ η κλάση ω_2 μοντελοποιείται από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [-½ , ½].
   (α) Προσδιορίστε τις περιοχές απόφασης R_1 και R_2 για τις δύο κλάσεις.
   (β) Μπορείτε να προσδιορίσετε τη πιθανότητα λάθους ταξινόμησης;

8. Θεωρείστε ένα πρόβλημα δύο κλάσεων, ω_1 και ω_2, στο δισδιάστατο χώρο, με $P(\omega_1)= P(\omega_2)$. Προσδιορίστε τις περιοχές απόφασης για τις παραπάνω κλάσεις και χαρακτηρίστε την επιφάνεια απόφασης (δηλ. αναφέρετε αν είναι έλλειψη, παραβολή κλπ) αν $p(\mathbf{x}|\omega_1)= \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_1)$, $p(\mathbf{x}|\omega_2)= \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_2, \Sigma_2)$, με
   (α) $\boldsymbol{\mu}_1 = [0,0]^T$, $\boldsymbol{\mu}_2 = [4,0]^T$ και

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.0 \\ 0.0 & 0.35 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.0 \\ 0.0 & 1.85 \end{bmatrix}$$

   (β) $\boldsymbol{\mu}_1 = [0,0]^T$, $\boldsymbol{\mu}_2 = [3.2,0]^T$ και

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.75 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 \end{bmatrix}$$