

Ψηφιακές Επικοινωνίες

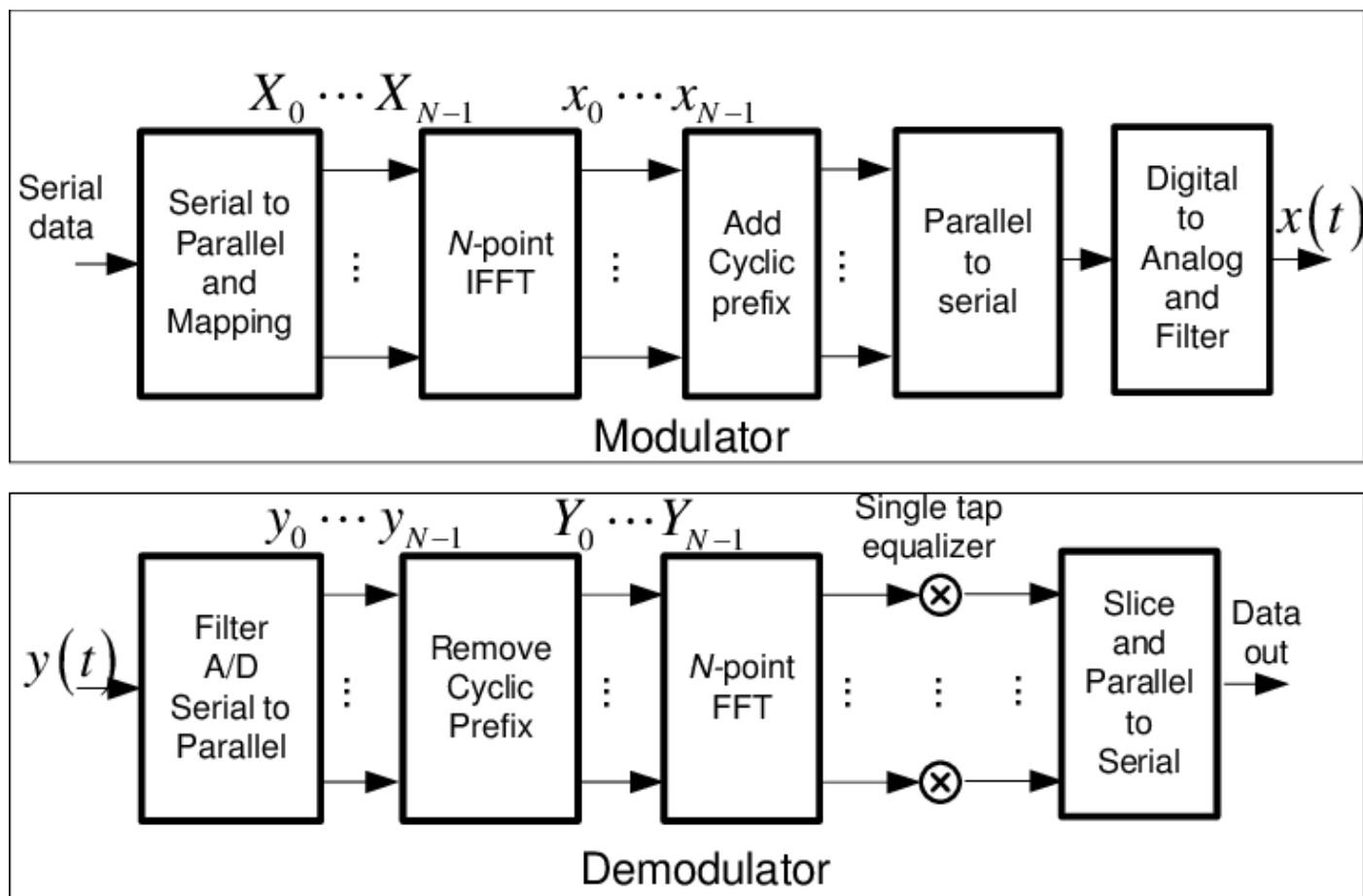
Τα Βασικά Στοιχεία της Ορθογωνικής Πολυπλεξίας Διαίρεσης
Συχνότητας (OFDM)

Περιεχόμενα: Κεφάλαιο 15

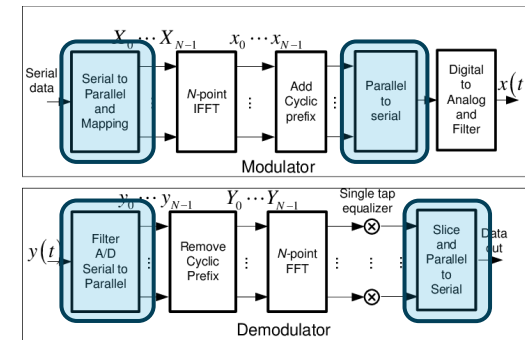
- Εισαγωγή (15.1 – 15.3)
- Γιατί OFDM Από Πλευράς Ανάλυσης Ζεύξης
- Συμβατική Πολυκαναλική FDM vs. Πολυκαναλική OFDM
- OFDM και IEEE 802.11
- OFDM και LTE
- Δομικό Διάγραμμα OFDM (15.6 – 15.8, 15.14, 15.16)
- Σύνθεση OFDM Κυματομορφής (15.9 – 15.13)
- Μειονεκτήματα της OFDM (15.18 – 15.19)
- Ασκήσεις

Δομικό Διάγραμμα OFDM

Δομικό Διάγραμμα OFDM

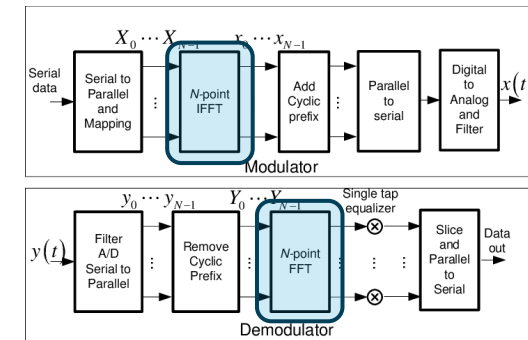


Αντιστοίχιση Σειριακού σε Παράλληλο



- Πομπός
 - Χωρίζουμε το κανάλι σε N υπο-κανάλια, το κάθε υποκανάλι έχει 1 υποφέρον (μπορεί να έχει και περισσότερα)
 - Πραγματοποιούμε τις υπόλοιπες πράξεις στο προς μετάδοση σήμα
 - Πριν τη μετάδοση, κάνουμε ξανά σειριοποίηση της ροής
- Δέκτης
 - Κάνουμε τη σειριακή ροή παράλληλη με παραλληλία N
 - Πραγματοποιούμε τις αντίστροφες πράξεις
 - Κάνουμε σειριοποίηση για να πραγματοποιήσουμε φώραση

(Αντίστροφος) Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier – IDFT



- Ανάλυση Fourier: μεταφορά από ένα πεδίο / σύστημα συντεταγμένων / διανυσματικό χώρο (χρόνου) σε ένα άλλο πεδίο / σύστημα συντεταγμένων / διανυσματικό χώρο (συχνότητας)
- Η ανάλυση και ο μετασχηματισμός Fourier χρησιμοποιούνται σε συνεχείς συναρτήσεις
 - Η ανάλυση δουλεύει για περιοδικές συναρτήσεις
 - Ο μετασχηματισμός δουλεύει και για μη-περιοδικές
- Για διακριτές απεικονίσεις υπάρχει αντίστοιχα ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier (discrete Fourier transform (DFT))
 - Υπενθύμιση: Η OFDM έπεται της διαμόρφωσης και πριν τη διαμόρφωση έχουμε δειγματοληψήσει $\Rightarrow$ διακριτό σήμα

(Αντίστροφος) Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier – IDFT

- Μαθηματικές εκφράσεις

$$\text{DFT} \quad \hat{f}_l = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-j2\pi k \frac{l}{n}}$$

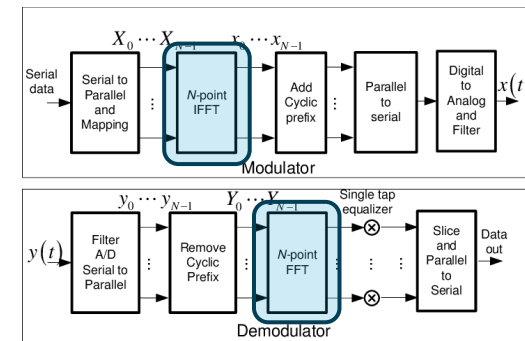
$$\text{IDFT} \quad f_l = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}_k e^{j2\pi k \frac{l}{n}}$$

- Μεταφορά των σημείων f_i από το πεδίο του χρόνου στα σημεία $\hat{f}_i$ στο πεδίο της συχνότητας για $i = 1, 2, \dots, N$
- Αναπαράσταση των σημείων f_i με χρήση συνημιτονοειδών συναρτήσεων με ακέραια πολλαπλάσια μίας θεμελιώδους συχνότητας

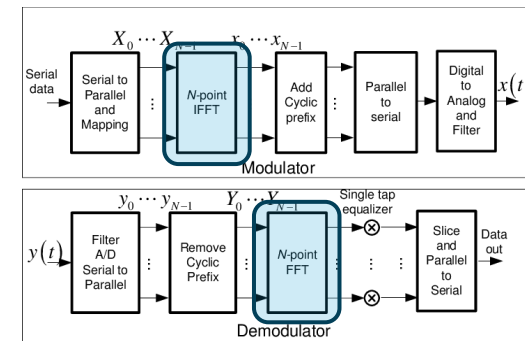
$$\omega_n = e^{-j\frac{2\pi}{n}}$$

- Ο μετασχηματισμός από το πεδίο του χρόνου στην συχνότητα γίνεται με πολλαπλασιασμό πινάκων

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_0 \\ \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \vdots \\ \widehat{f_{N-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \dots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \dots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \dots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}$$

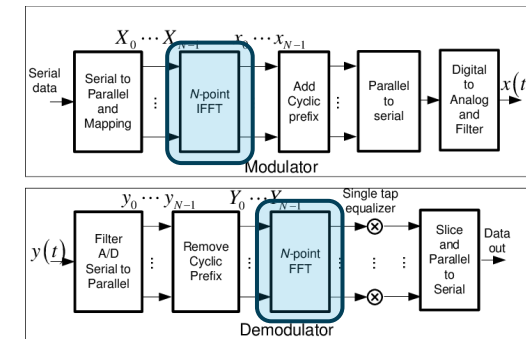


Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier – FFT



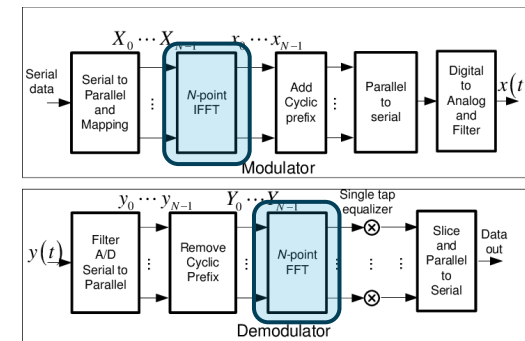
- Είναι αλγόριθμος για τον υπολογισμό του DFT
- Τον επινόησε πρώτος ο Gauss, αλλά δεν του έδωσε μεγάλη σημασία
- Τον επινόησαν εκ νέου 160 χρόνια αργότερα οι Cooley και Tukey και πολλές φορές σήμερα αναφερόμαστε στον FFT με το όνομά τους
- Μεταξύ άλλων, οι Gilbert Strang (MIT) και Steve Brunton (UWawshington) έχουν πει για τον FFT:
“Ο πιο σημαντικός αλγόριθμος του 20^{ου} αιώνα”

Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier – FFT



- Ο FFT είναι ένας υπολογιστικά αποδοτικός **αλγόριθμος** που πραγματοποιεί τον DFT
 - Ο DFT έχει πολυπλοκότητα $O(N^2)$
 - Ο FFT έχει πολυπλοκότητα $O(N \cdot \log N)$
- **Συμμετρία** Εκμεταλλεύεται συμμετρίες του DFT για μείωση του αριθμού των απαραίτητων υπολογισμών
- **Διαίρει και βασίλευε** Χωρίζει επανειλημμένα την ακολουθία των σημείων σε μικρότερα μέρη μέχρι να φτάσει σε ένα βασικό επίπεδο
- **Αναδρομή** Χρησιμοποιεί μια αναδρομική προσέγγιση για να υπολογίσει τον DFT ολόκληρης της ακολουθίας από τους DFT των μικρότερων τμημάτων

Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier – FFT



- Ο πίνακας A του DFT είναι

- Συμμετρικός, $A = A^T$
- Ορθοκανονικός Vandermonde, $a_{i1} = 1, a_{1j} = 1, a_{ij} = \alpha_{i,j-1}^2, \text{ για } i, j \geq 2, \text{ ή } a_{ij} = \alpha_{i-1,j}^2, \text{ για } i, j \geq 2 \text{ και } a_{22} = \omega_n$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \dots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \dots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \dots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{bmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$$

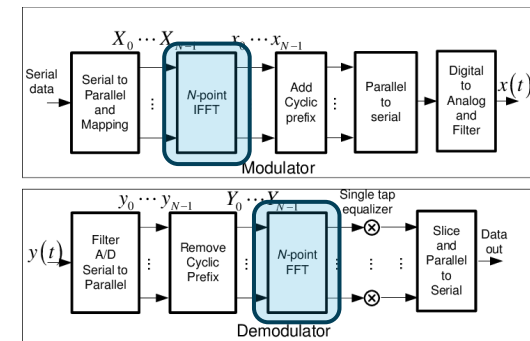
- Αν το n είναι κάποια δύναμη του 2, τότε μπορώ να υπολογίσω τα $\hat{f}_i$, χωρίζοντας τα f_i σε άρτια και περιττά, αναδιατάσσοντάς τα (π.χ., πρώτα τα άρτια και μετά τα περιττά), και χρησιμοποιώντας δύο πίνακες $M_{n \times n}(\mathbb{C})$:

- Έναν πίνακα της μορφής $\begin{bmatrix} I \in M_{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}(\mathbb{C}) & -D \in M_{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}(\mathbb{C}) \\ I \in M_{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}(\mathbb{C}) & -D \in M_{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}(\mathbb{C}) \end{bmatrix}$

- Έναν πίνακα της μορφής $\begin{bmatrix} A \in M_{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}(\mathbb{C}) & 0 \\ 0 & A \in M_{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}(\mathbb{C}) \end{bmatrix}$

- Ακολουθώ αυτή τη διαδικασία, μέχρι να φτάσω σε πίνακες $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$
- Καταλήγω σε πολύ φτηνές υπολογιστικές πράξεις τάξης $O(N)$
- Έχω να κάνω και την ανασύνθεση αυτής της διαίρεσης σε άρτια και περιττά f_i , που είναι πράξη τάξης $O(\log N)$
- Αν το n δεν είναι κάποια δύναμη του 2, χρησιμοποιώ padding

Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier – FFT



Πρώτο βήμα διαίρεσης του FFT

$$\begin{bmatrix} \widehat{f_0} \\ \widehat{f_2} \\ \vdots \\ \widehat{f_{N-2}} \\ \widehat{f_1} \\ \widehat{f_3} \\ \vdots \\ \widehat{f_{N-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \in M_{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}(\mathbb{C}) & -D \in M_{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}(\mathbb{C}) \\ I \in M_{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}(\mathbb{C}) & -D \in M_{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}(\mathbb{C}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \in M_{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}(\mathbb{C}) & 0 \\ 0 & A \in M_{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}(\mathbb{C}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_1 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}$$

Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier – FFT

```

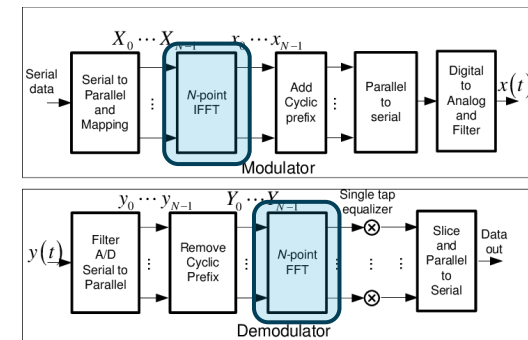
procedure FFT (A, n, w)

    # Preconditions:
    #   A is a Vector of length n;
    #   n is a power of 2;
    #   w is a primitive n-th root of unity.
    #
    # The Vector A represents the polynomial
    #   a(z) = A[1] + A[2]*z + ... + A[n]*z^(n-1) .
    #
    # The value returned is a Vector of the values
    #   [ a(1), a(w), a(w^2), ... , a(w^(n-1)) ]
    # computed via a recursive FFT algorithm.

    if n = 1 then
        return A
    else
        Aeven <-- Vector( [A[1], A[3], ..., A[n-1]] )
        Aodd  <-- Vector( [A[2], A[4], ..., A[n]] )

        Veven <-- FFT( Aeven, n/2, w^2 )
        Vodd  <-- FFT( Aodd, n/2, w^2 )

        V <-- Vector(n) # Define a Vector of length n
        for i from 1 to n/2 do
            V[i] <-- Veven[i] + w^(i-1)*Vodd[i]
            V[n/2 + i] <-- Veven[i] - w^(i-1)*Vodd[i]
        end do
        return V
    end if
end procedure
    
```

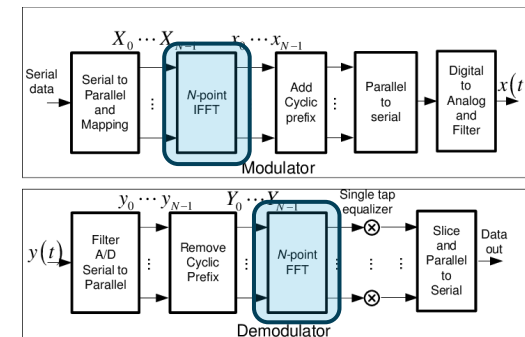


Γιατί IFFT στον Πομπό;

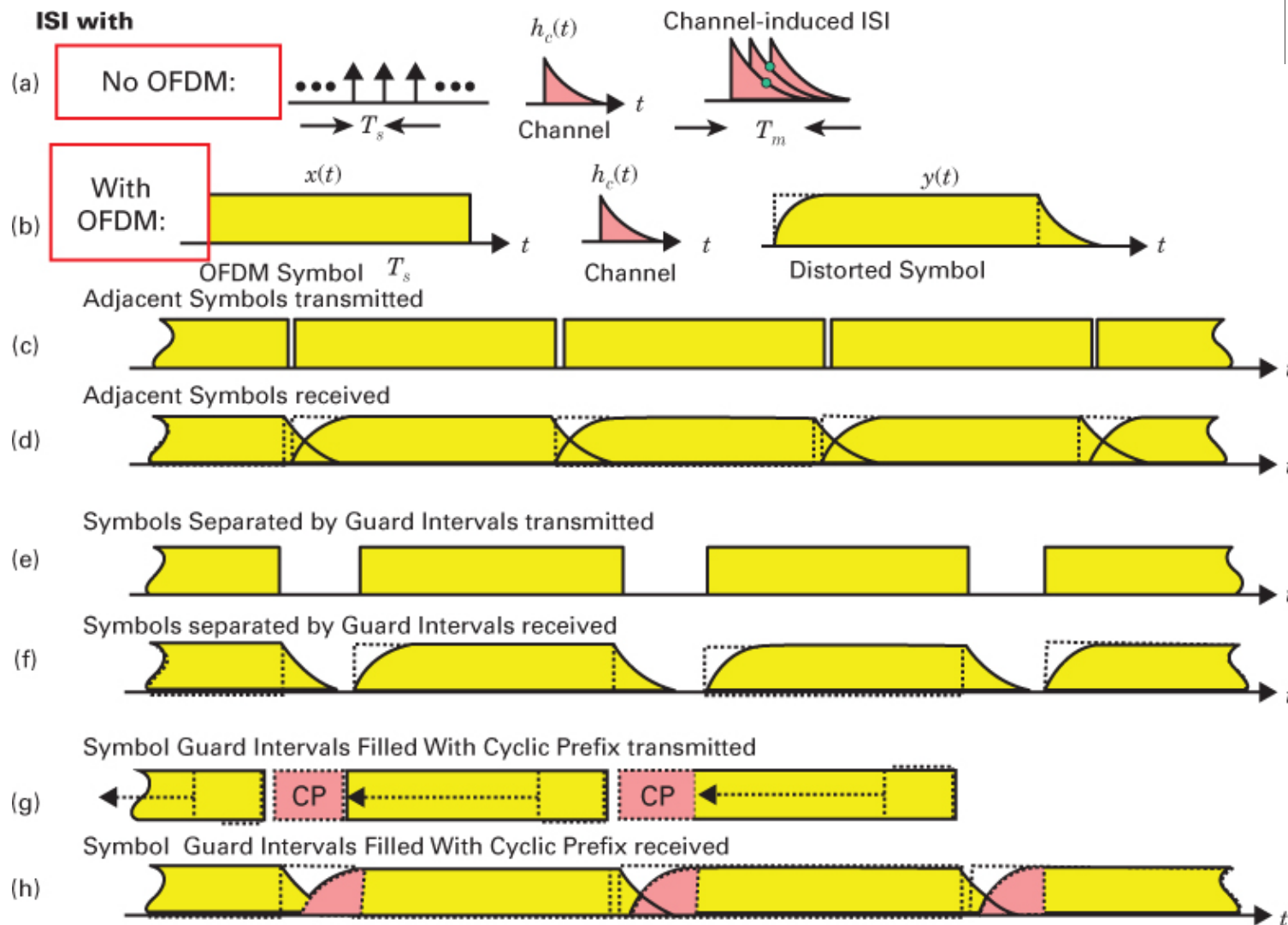
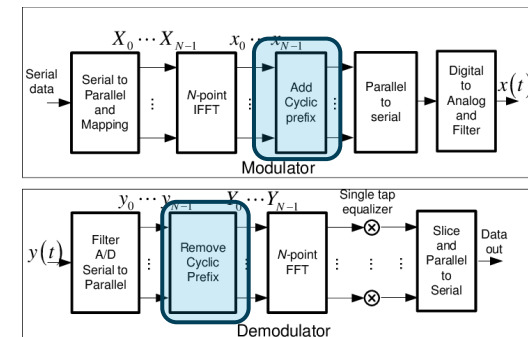
- Δεν θα ήταν λογικό να κάνουμε FFT στον πομπό και IFFT στο δέκτη;
- Υπενθύμιση: Το σήμα προς αποστολή είναι

$$y(t) = \sum_{k=1}^N s_k(t) = F_0 \underbrace{\sum_{k=1}^N X_k e^{+j2\pi k F_0 t}}_{\text{IDFT}}$$

Λόγω του θετικού προσήμου, αυτός είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός. Ο DFT έχει αρνητικό εκθέτη (και δεν πολλαπλασιάζεται με F_0).



Κυκλικό Πρόθεμα



1. Χρήση OFDM, αλλά πρόβλημα με επικαλύψεις στο δέκτη

2. Διόρθωση 1: Χρήση διαστημάτων φύλαξης

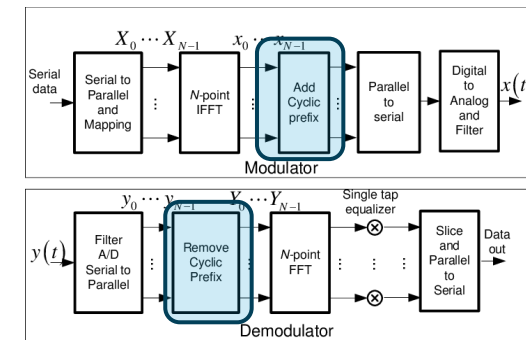
3. Διόρθωση 2: Χρήση κυκλικού προθέματος

Κυκλικό Πρόθεμα - Ιδέα

- Αντιγραφή του τελικού μέρους της κυματομορφής στο αρχικό μέρος
- Η γραμμική συνέλιξη μετατρέπεται σε κυκλική σύνελιξη

$$\begin{array}{ll} \text{Γραμμική} & x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \\ \\ \text{Κυκλική} & x(n) \odot h(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h((n-m) \bmod N) \end{array}$$

- Η κυκλική συνέλιξη είναι πιο αποδοτική υπολογιστικά από τη γραμμική και χρησιμοποιείται σε ταχείς μετασχηματισμούς, π.χ., Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier Transform (FFT))
- Το σήμα παραμένει ορθογωνικό, ο δέκτης λαμβάνει σήμα με σταθερή περιβάλλουσα (constant envelope) με ακέραιο αριθμό επαναλήψεων
- Απλούστερη ισοστάθμιση, με απόρριψη του Κυκλικού Προθέματος (Cyclic Prefix (CP))



Ορθογωνικότητα – Φορμαλισμός

- Μετάδοση με χρήση N υποφερόντων που απέχουν F_0
 - l -οστό σύμβολο: X_l
 - l -οστό υποφέρον: $e^{j2\pi l F_0 t}$
- l -οστή συνιστώσα μεταδιδόμενου σήματος: $s_l(t) = X_l e^{j2\pi l F_0 t}$
- Μεταδιδόμενο σήμα: $y(t) = \sum_{k=1}^N s_k(t) = \sum_{k=1}^N X_k e^{j2\pi k F_0 t}$
- Για να πάρω το l -οστό σύμβολο στο δέκτη:

$$\begin{aligned} F_0 \int_0^{1/F_0} e^{-j2\pi l F_0 t} y(t) dt &= F_0 \int_0^{1/F_0} e^{-j2\pi l F_0 t} \sum_{k=1}^N X_k e^{j2\pi k F_0 t} dt \\ &= \sum_{k=1}^N X_k F_0 \int_0^{1/F_0} e^{j2\pi(k-l)F_0 t} dt \end{aligned}$$

Αλλά, ισχύει:

$$F_0 \int_0^{1/F_0} e^{j2\pi(k-l)F_0 t} dt = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} = \delta(k-l) \quad \text{Ορθογωνικότητα}$$

Τελικά:

$$\sum_{k=1}^N X_k F_0 \int_0^{1/F_0} e^{j2\pi(k-l)F_0 t} dt = \sum_{k=1}^N X_k \delta(k-l) = X_l$$

Ποσοτικοποίηση του Οφέλους της OFDM

- Ρυθμός δεδομένων: $R = 1Mbps \Rightarrow T_b = 1\mu sec$
- Ρυθμός συμβόλων: $R_s = 2/3 Msymbol/s \Rightarrow T_s = 3/2 \mu sec$
- RMS: $\sigma_\tau = 3\mu sec$
- Υλοποίηση OFDM με IDFT 64 σημείων

FDM

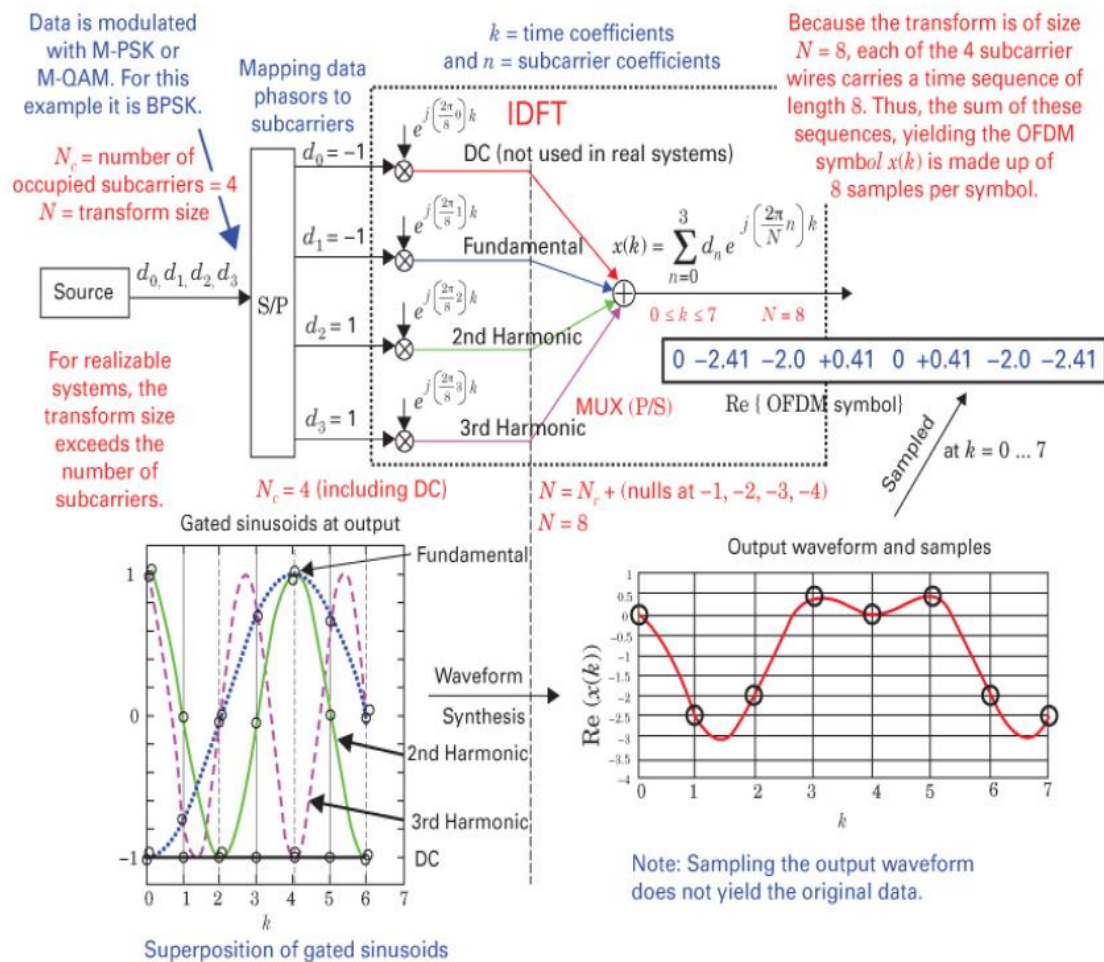
- $\sigma_\tau = 3\mu sec \Rightarrow \sigma_\tau / T_s = 2$
- Μέγιστη καθυστέρηση (εξάπλωση πολλαπλών διαδρομών):
 $T_m = 5 \cdot \sigma_\tau \Rightarrow T_m = 10 \cdot T_s$

OFDM

- $T_{OFDM} = 64 \cdot T_s = 96\mu sec$
- $\sigma_\tau = 3\mu sec \Rightarrow \sigma_\tau / T_{OFDM} = 3.125\%$

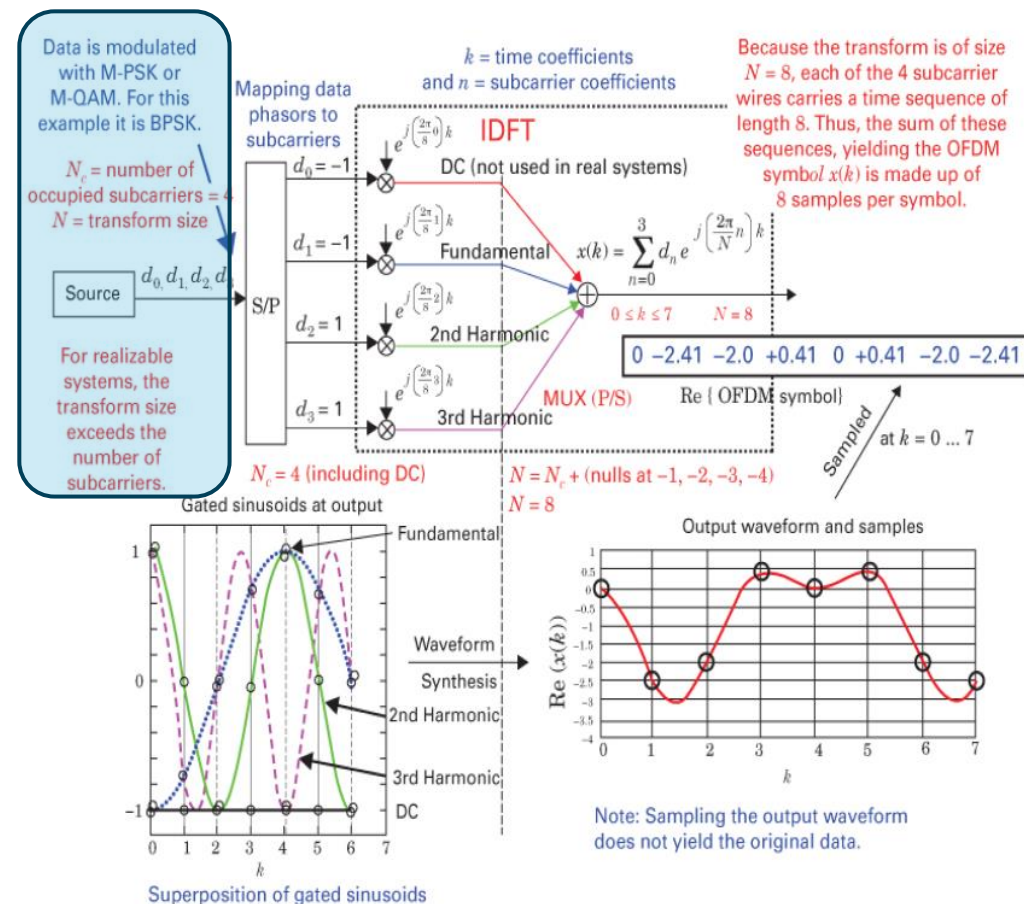
Σύνθεση OFDM Κυματομορφής

Παράδειγμα



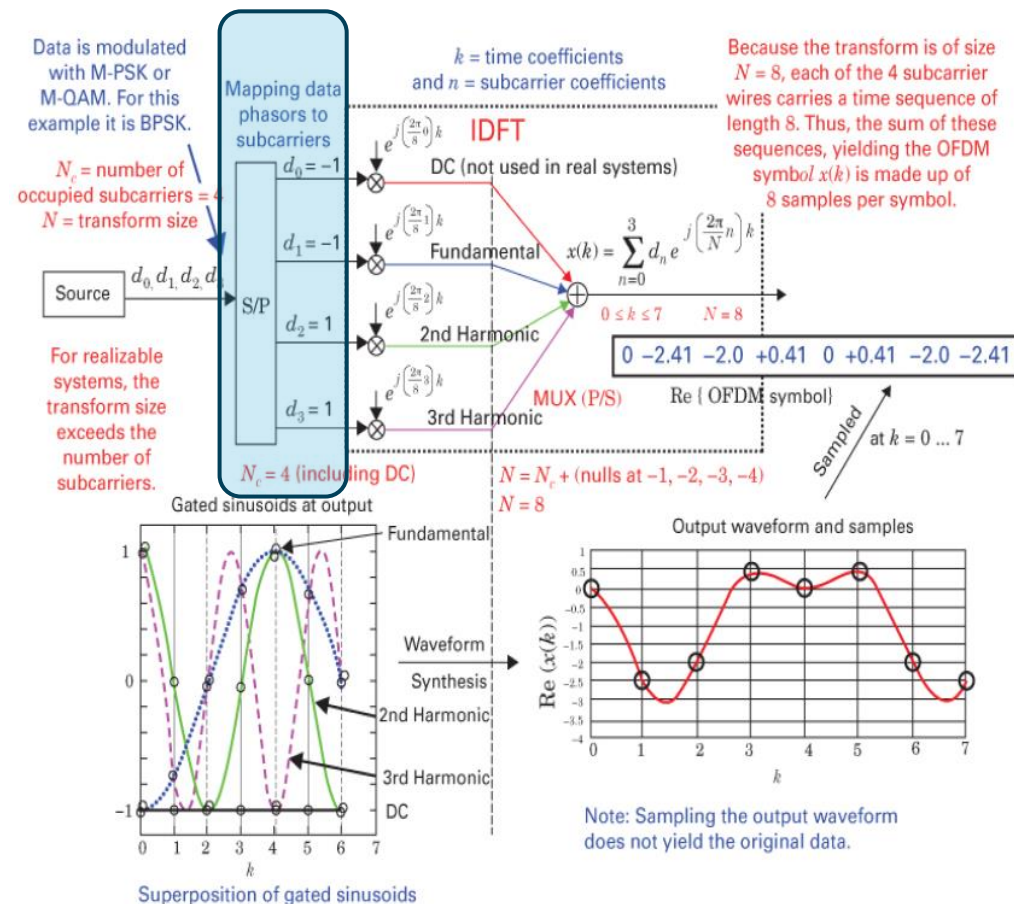
Παράδειγμα – Βήμα-προς-βήμα

1. Διαμόρφωση με μία από τις συνήθεις τεχνικές. Στην πράξη, χρησιμοποιείται QAM.



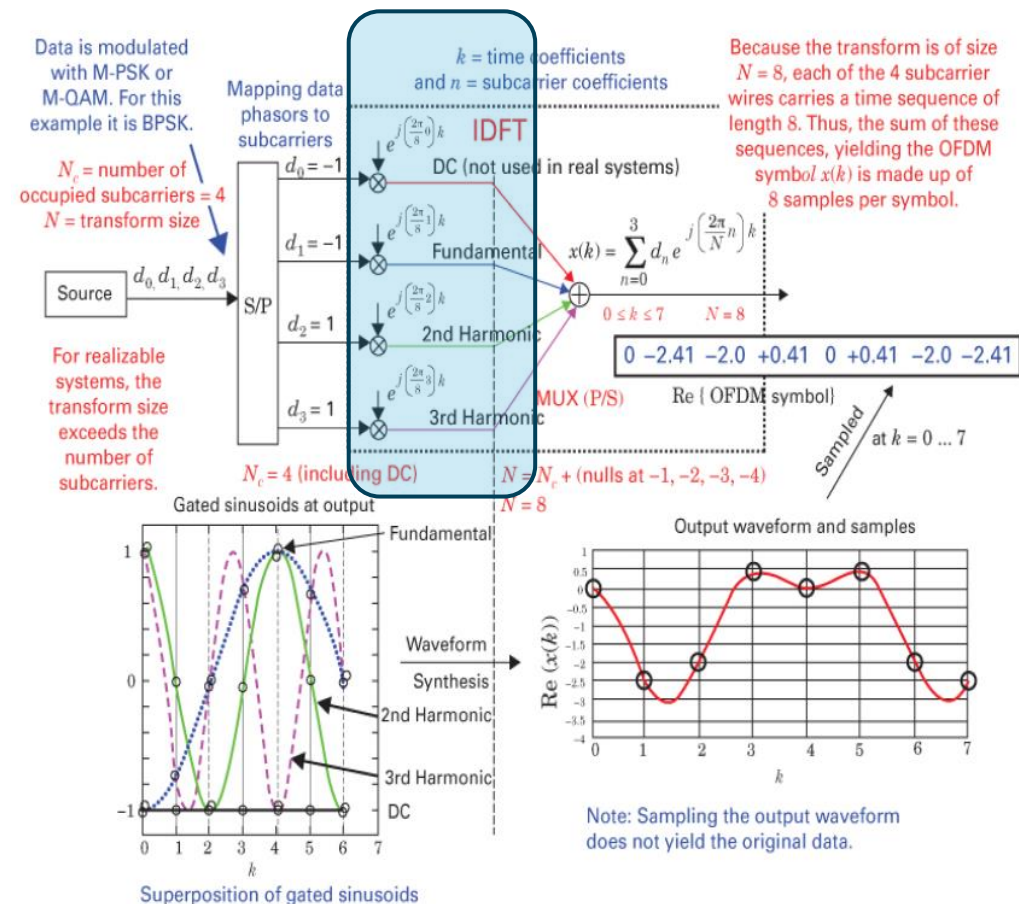
Παράδειγμα – Βήμα-προς-βήμα

2. Μετατροπή της σειριακής ακολουθίας σε παραλληλία N .



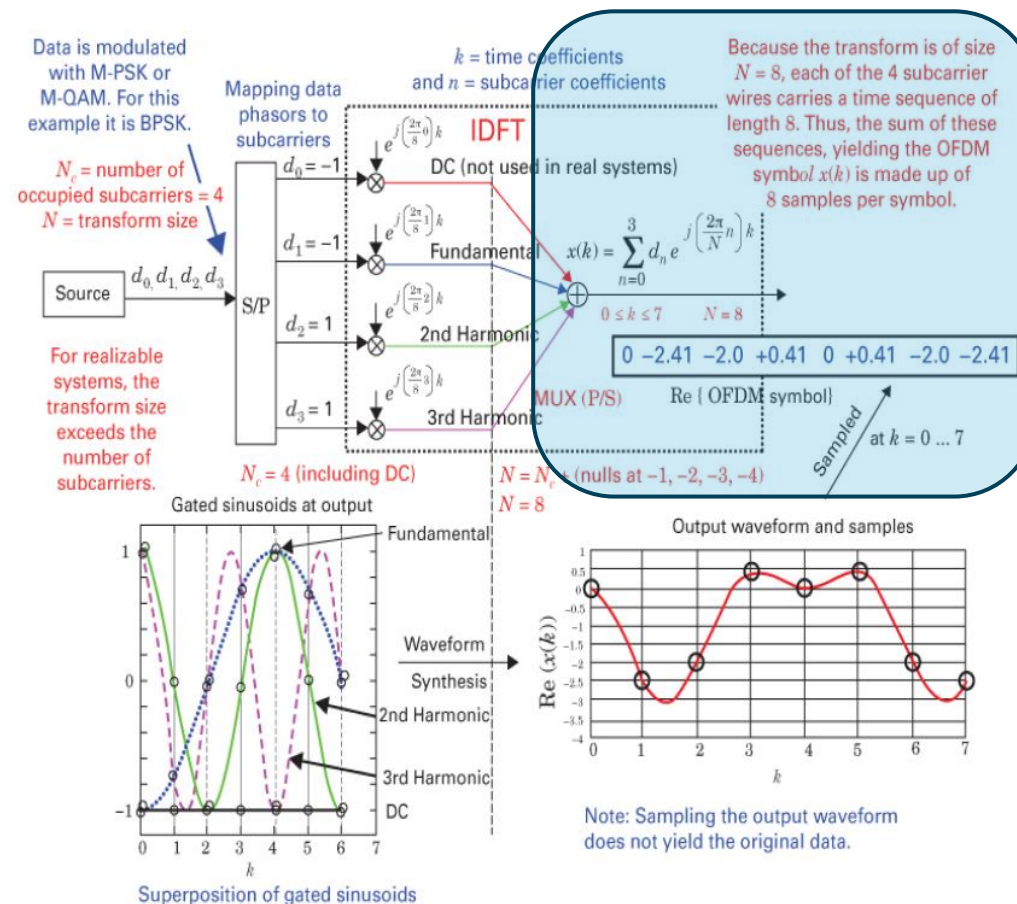
Παράδειγμα – Βήμα-προς-βήμα

3. Εφαρμογή DFT, μέσω του αλγορίθμου FFT. Στην πράξη, στον πομπό χρησιμοποιείται IFFT και στο δέκτη FFT. Επειδή έχουμε παραλληλία N , πρόκειται για IFFT N -σημείων. Κάθε έξοδος του IFFT είναι μία κυματομορφή που διαμορφώνει ένα υπο-φέρων.



Παράδειγμα – Βήμα-προς-βήμα

4. Με υπέρθεση όλων των υπο-φερόντων λαμβάνουμε δείγματα της OFDM κυματομορφής. Στο στάδιο αυτό, έχουμε σειριοποίηση της προς διάδοσης ακολουθίας. Πριν τη σειριοποίηση, προστίθεται και το κυκλικό πρόθεμα.



Μειονεκτήματα της OFDM

Μειονεκτήματα της OFDM

- Δια-φεροντική παρεμβολή (Inter-carrier interference (ICI))
 - Απόκλιση συχνότητας μεταξύ πομπού και δέκτη
 - Φαινόμενο Doppler μεταξύ πομπού και δέκτη
- Υψηλός λόγος μέγιστης ισχύος προς μέσης ισχύος (Peak to average power ratio (PAPR))

ICI – Φαινόμενο Doppler

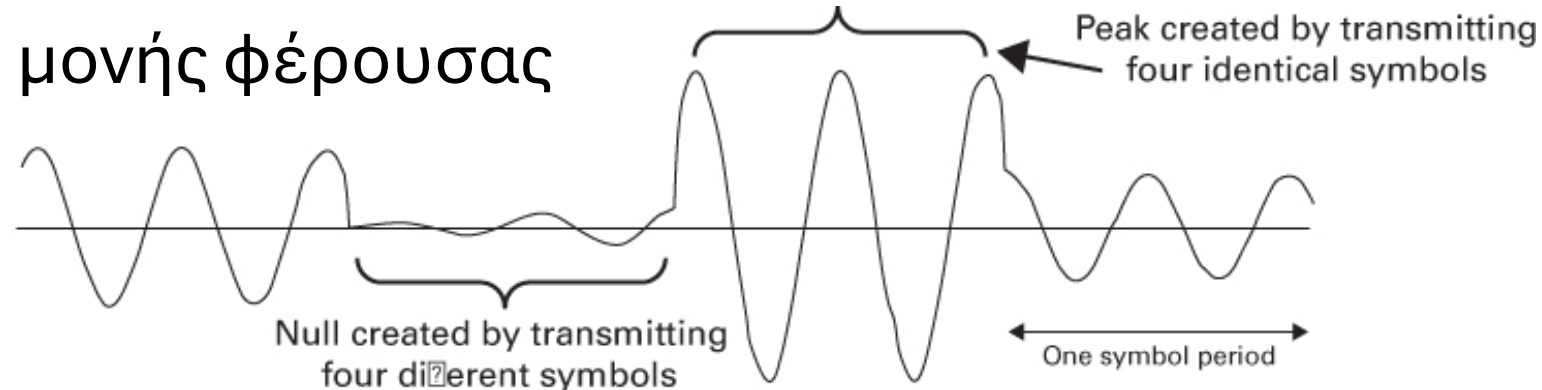
- Παράδειγμα
 - Μέγιστη ταχύτητα $V_X = 160\text{km/h}$
Μέγιστη ταχύτητα τρένων = 300km/h
 - Για μετάδοση στα 5GHz: εξάπλωση Doppler 750MHz και 1400MHz αντίστοιχα
- Τέτοιες αποκλίσεις μπορεί να τις διαχειριστεί ο δέκτης
- Μεγαλύτερες ταχύτητες επιφέρουν αποσυσχέτιση του προσαρμοσμένου φίλτρου, με συνέπεια την ατελή ορθογωνικότητα των σημάτων στο δέκτη
- Χαμηλότεροι ρυθμοί μετάδοσης για τα οχήματα στο LTE

Πρόβλημα OFDM: PAPR

- Σημαντικό πρόβλημα OFDM: ο μεγάλος λόγος κορυφής – προς – μέση τιμή ισχύος (**Peak-to-Average Power Ratio, PAPR**) στο μεταδιδόμενο σήμα
- Τι σημαίνει αυτό;
 - Μεταδιδόμενο σήμα: K παράλληλα υποσήματα
 - Κάθε υποσήμα έχει μια δυναμική περιοχή τιμών
 - Αν τύχει πολλά υποσήματα ταυτόχρονα να έχουν μεγάλες τιμές και οι υποφέρουσές τους να είναι συμφασικές
 - Η στιγμιαία τιμή του συνολικού μεταδιδόμενου σήματος μπορεί να γίνει πολύ μεγάλη
 - Τότε, ο ενισχυτής του πομπού λειτουργεί στην περιοχή κόρου, όπου εμφανίζει μη γραμμική συμπεριφορά
- Για να το αντιμετωπίσουμε αυτό, πρέπει να **μειώσουμε την ισχύ εκπομπής**, γεγονός που επηρεάζει το λαμβανόμενο SNR και την πιθανότητα σφάλματος στο δέκτη. Υπάρχουν πάντως και καλύτεροι τρόποι (ωστόσο γενικά παραμένει ανοιχτό πρόβλημα)

PAPR

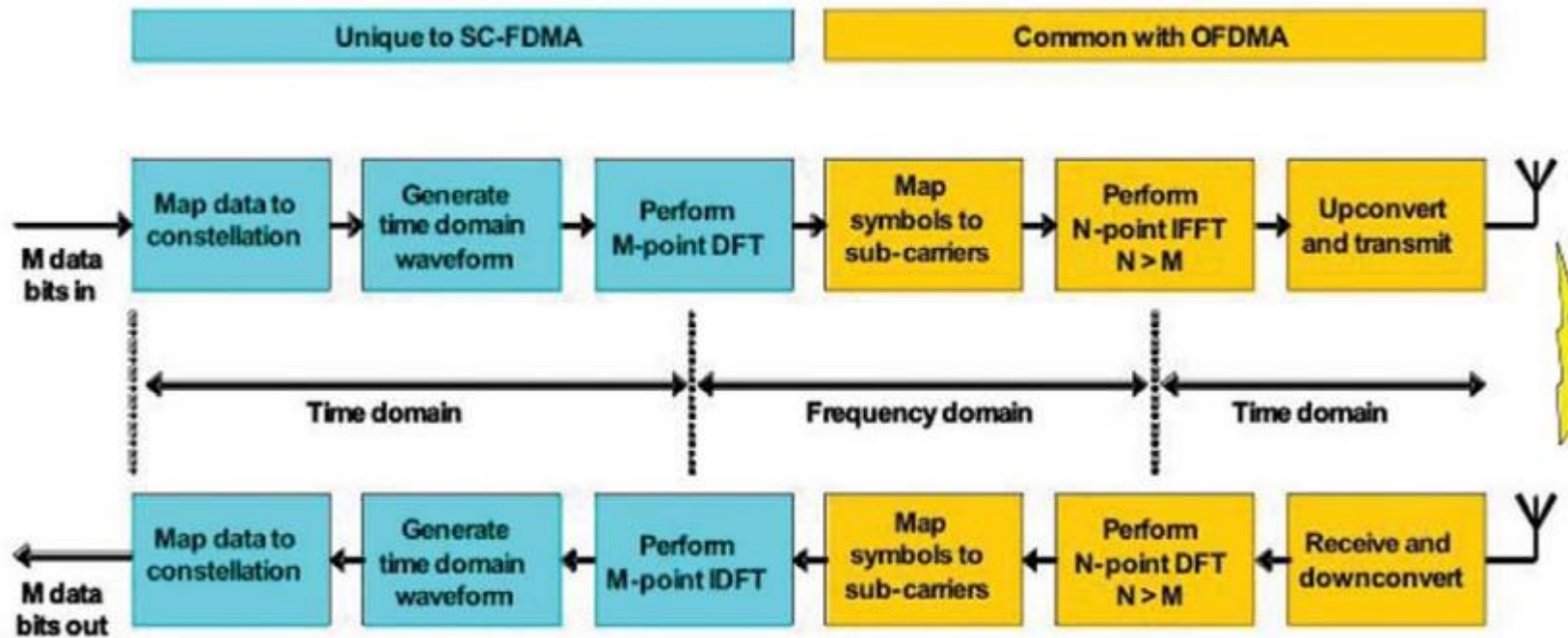
- Έντονες διακυμάνσεις της περιβάλλουσας
 - Στέλνονται παράλληλα N σύμβολα
 - Στο δέκτη μπορεί να έχουμε
 - Κορυφές που δημιουργούνται από N ημιτονοειδή όλα ίδια
 - Μηδενισμούς που δημιουργούνται από N ημιτονοειδή με άθροισμα 0 (μπορεί όλα διαφορετικά, ή να είναι $N/2$ ίδια και $N/2$ ακριβώς αντίθετα, κτλ.)
 - Ενδιάμεσα τιμές για τα μέγιστα πλάτη που δημιουργούνται από N ημιτονοειδή με άθροισμα μεταξύ του 0 και των κορυφών
- Αντιμετώπιση με OFDM μονής φέρουσας (single carrier OFDM (SC-OFDM))



SC-OFDM

- OFDM
 - Πλεονέκτημα: Στέλνουμε διαφορετικά σύμβολα σε διαφορετικά υποκανάλια, εύκολη ισοστάθμιση
 - Μειονέκτημα: Υψηλό PAPR
- Πλεονέκτημα μονής φέρουσας: Μικρό PAPR
- Συνδυασμός των δύο πλεονεκτημάτων
- Υλοποίηση με DFT πριν τη χρήση του IFFT στον πομπό και IDFT μετά τη χρήση του FFT στο δέκτη

Δομικό Διάγραμμα SC-OFDM



Χρήση SC-OFDM

- Η SC-OFDM χρησιμοποιείται στα κυψελωτά συστήματα (3GPP TR 25.814)
- Πρακτικά η SC-OFDM χρησιμοποιείται στο ζεύξη ανόδου (uplink)
- Υψηλό PAPR συνεπάγεται υψηλή κατανάλωση ενέργειας και μεγάλη πολυπλοκότητα στον πομπό
- Στη καθοδική ζεύξη, πομπός είναι ο σταθμός βάσης (eNodeB στο LTE, gNodeB στο 5G)
 - Δεν έχει περιορισμούς στο ενεργειακό φορτίο
 - Έχει υψηλές υπολογιστικές δυνατότητες
- Στην ανοδική ζεύξη, πομπός είναι η κινητή συσκευή (UE)
 - Περιορισμοί στο ενεργειακό φορτίο
 - Χαμηλές υπολογιστικές δυνατότητες

OFDM: Γενική αξιολόγηση

- **Βασικά πλεονεκτήματα:**
 - Καλύτερη αξιοποίηση του φάσματος
 - Διάχυση του προβλήματος της επιλεκτικής και γρήγορης απόσβεσης.
Έτσι αποφεύγονται burst errors.
- **Μειονεκτήματα:**
 - Ευαισθησία σε carrier frequency offset
 - Δεν διασφαλίζεται η σταθερή περιβάλλουσα και συνεπώς η τεχνική είναι ευαίσθητη σε μη γραμμικές παραμορφώσεις του διαύλου
 - Απαραίτητη η ύπαρξη κωδικοποίησης καναλιού (COFDM)

Συμπεράσματα

- OFDM
 - Κατάτμηση σήματος υψηλού ρυθμού δεδομένων σε πολλά σήματα χαμηλού ρυθμού δεδομένων
 - Ανθεκτικότητα σε SPOF
 - Αποδοτικότερη αξιοποίηση του φάσματος
 - Συνδυασμός διαμόρφωσης και πολυπλεξίας
- Υλοποίηση: βασικές πράξεις
 - Σειριακό-σε-παράλληλο
 - DFT με χρήση FFT
 - Κυκλικό πρόθεμα
- Χρήση σε σύγχρονα ασύρματα πρότυπα
 - WLAN: IEEE 802.11
 - Cellular: LTE, 5G
- Κύριο μειονέκτημα: PAPR
 - Σε δέκτη με υψηλές υπολογιστικές δυνατότητες και μη αυστηρές ενεργειακές απαιτήσεις: ok
 - Σε δέκτη με χαμηλές υπολογιστικές δυνατότητες και αυστηρές ενεργειακές απαιτήσεις: SC-OFDM

