

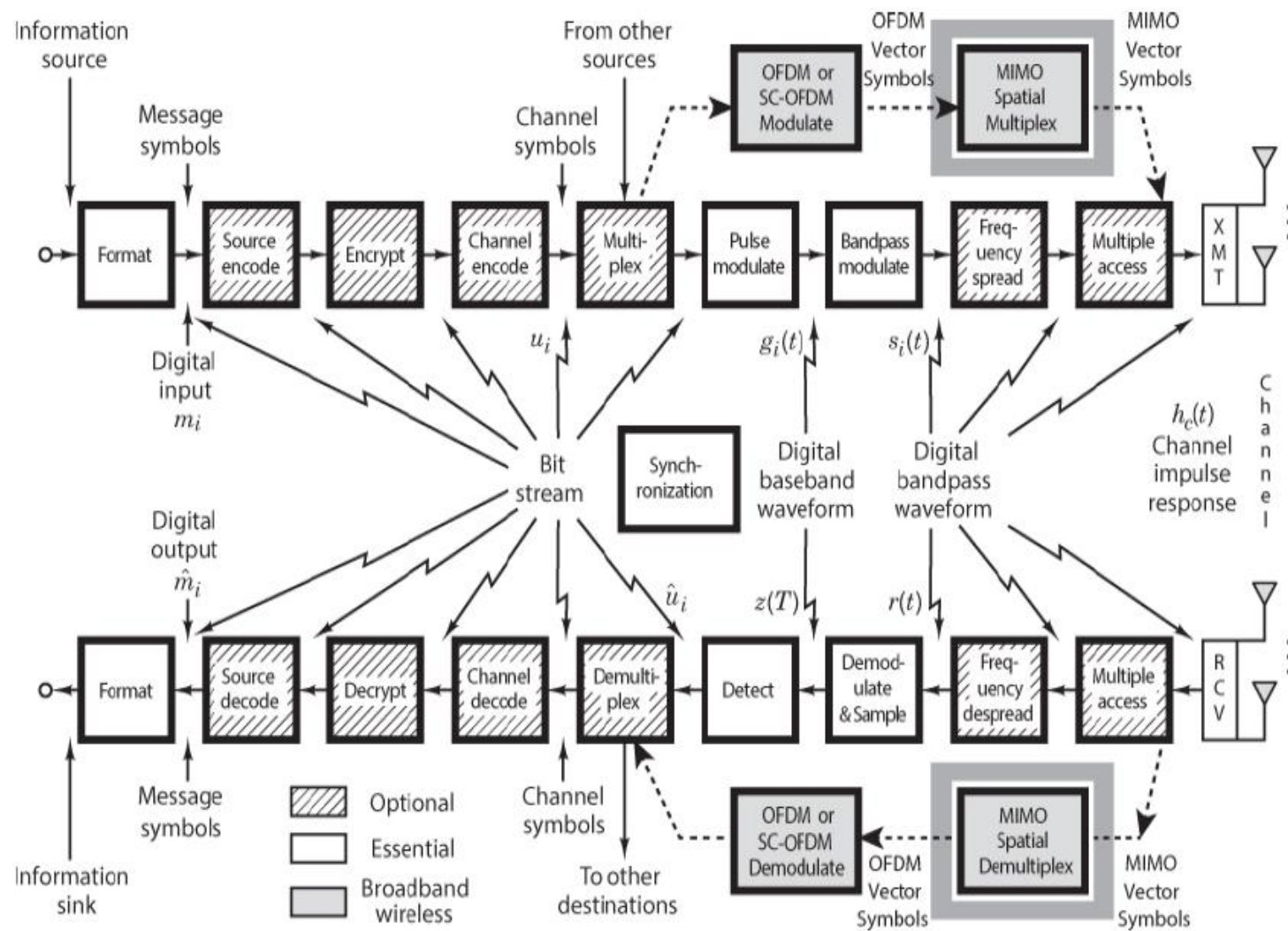
Ψηφιακές Επικοινωνίες

Η Μαγεία των MIMO (Multiple Input / Multiple Output)

Περιεχόμενα: Κεφάλαιο 16

- Τι είναι MIMO;
- Τα Διάφορα Οφέλη των Πολλαπλών Κεραιών
- Χωρική Πολυπλεξία
- Απόδοση ως προς τη Χωρητικότητα
- Πληροφορίες Κατάστασης Καναλιού CSI στον Πομπό
- Κωδικοποίηση Χώρου-Χρόνου
- Συμβιβασμοί Συστημάτων MIMO
- MIMO με Πολλαπλούς Χρήστες (MU-MIMO)
- MIMO και IEEE 802.11
- MIMO και LTE

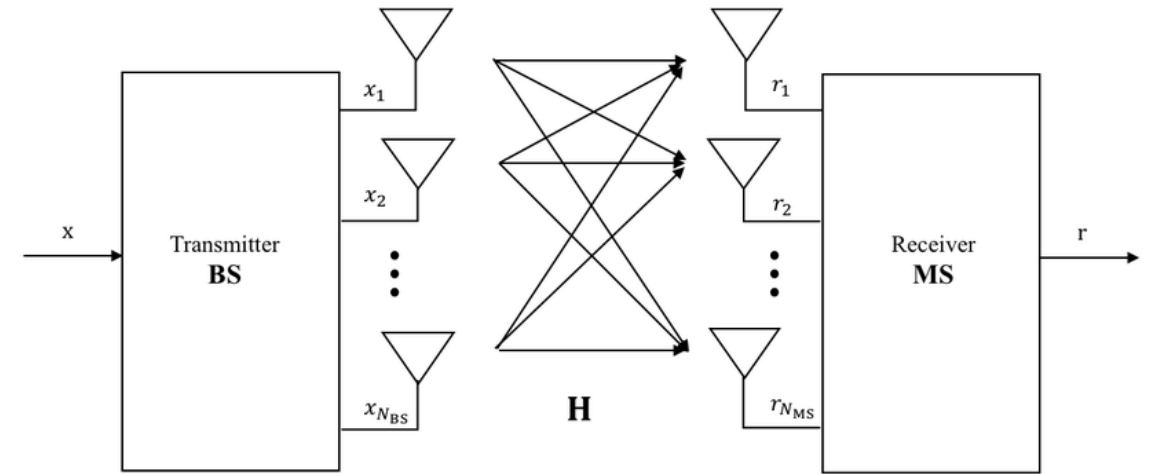
Δομικό Διάγραμμα: Κεφάλαιο 16



Τι είναι MIMO;

Ονοματολογία

- Μίας εισόδου, μίας εξόδου
Single input, single output **SISO**
- Μίας εισόδου, πολλαπλών εξόδων
Single input, multiple output **SIMO**
- Πολλαπλών εισόδων, μίας εξόδου
Multiple input, single output **MISO**
- Πολλαπλών εισόδων, πολλαπλών εξόδων
Multiple input, multiple output **MIMO**



Ref: A.Nakhaei et al., "Efficient Cellular Base Stations Sleep Mode Control Using Image Matching", 2019

Παράδειγμα: SISO

- SISO: 1X1 MIMO ($M = 1, N = 1$)



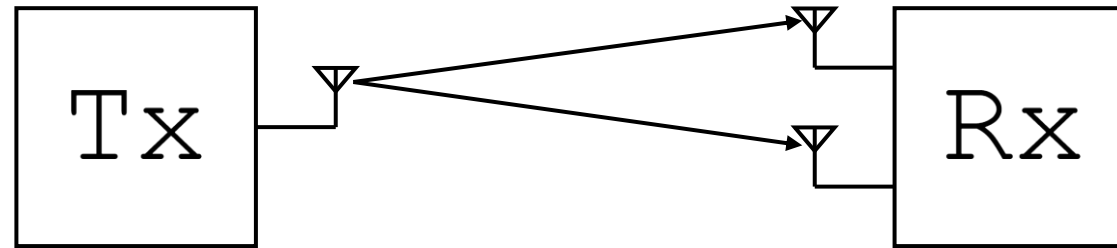
- Μοντέλο

$$r = Hs + n$$

- Πίνακας Καναλιού: $H \in M_{1 \times 1}(\mathbb{C})$

Παράδειγμα: SIMO

- SIMO: 1X2 MIMO ($M = 1, N = 2$)



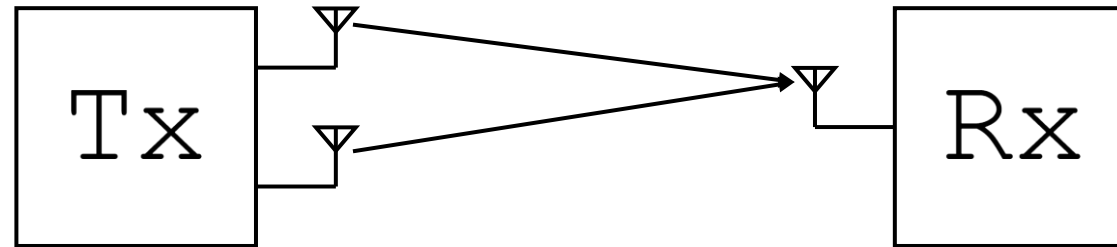
- Μοντέλο

$$\underline{r} = Hs + \underline{n}$$

- Πίνακας Καναλιού: $H \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$

Παράδειγμα: MISO

- MISO: 2X1 MIMO ($M = 2, N = 1$)



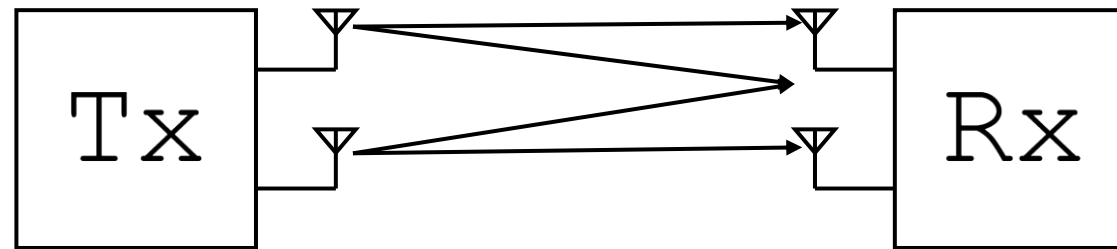
- Μοντέλο

$$r = H\underline{s} + n$$

- Πίνακας Καναλιού: $H \in M_{1 \times m}(\mathbb{C})$

Παράδειγμα: MIMO

- MIMO: 2X2 MIMO (M = 2, N = 2)



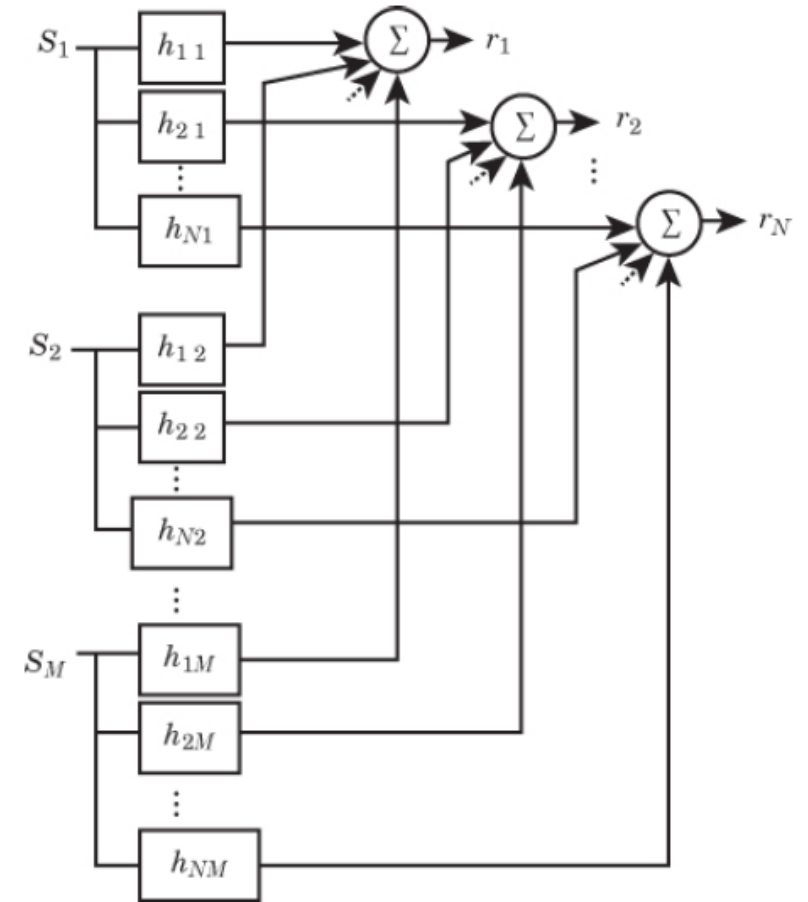
- Μοντέλο

$$\underline{r} = H\underline{s} + \underline{n}$$

- Πίνακας Καναλιού: $H \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$

Από Point-to-Point σε Multipoint-to-Multipoint

- Ιδέα: αντί να δούμε την πολυδιόδευση ως πρόβλημα, να την δούμε ως χαρακτηριστικό
 - Αν έχουμε πομπό με 1 κεραία και δέκτη με 1 κεραία: P2P ζεύξη, πρόβλημα
 - Αν έχουμε πομπό με M κεραίες και δέκτη με N κεραίες: πολλαπλές παράλληλες ζεύξεις, χαρακτηριστικό
- Αναλύουμε το κανάλι MIMO σε πολλαπλά παράλληλα κανάλια
 - Χωρο-χρονική επεξεργασία σήματος
- Στόχος: κάποιο από τα σήματα που θα φτάσει στο δέκτη θα είναι «καλό»
 - Μικρή εξασθένιση



Μοντέλο Καναλιού

- Υπενθύμιση (Σύστημα SISO): $r(t) = s(t) + n(t)$
 - Όμως το κανάλι έχει και μία κρουστική απόκριση:
$$r(t) = s(t) * h(t) + n(t)$$
 - Στο πεδίο της συχνότητας, η συνέλιξη γίνεται γινόμενο
- Σύστημα MIMO $M \times N$ (ντετερμινιστικό)

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1M} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} & \cdots & h_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_M \end{bmatrix}$$

- $r_i = h_{i1}s_1 + h_{i2}s_2 + \cdots + h_{iM}s_M + n_1 + n_2 \dots + n_M = \sum_{j=1}^M h_{ij}s_j + \sum_{j=1}^M n_j$
- Για στοχαστικό κανάλι, απαιτείται συνιστώσα χρόνου, $h_{ij}(t)$
 - Συνήθεις κατανομές για τα $h_{ij}(t)$: Rice, Rayleigh

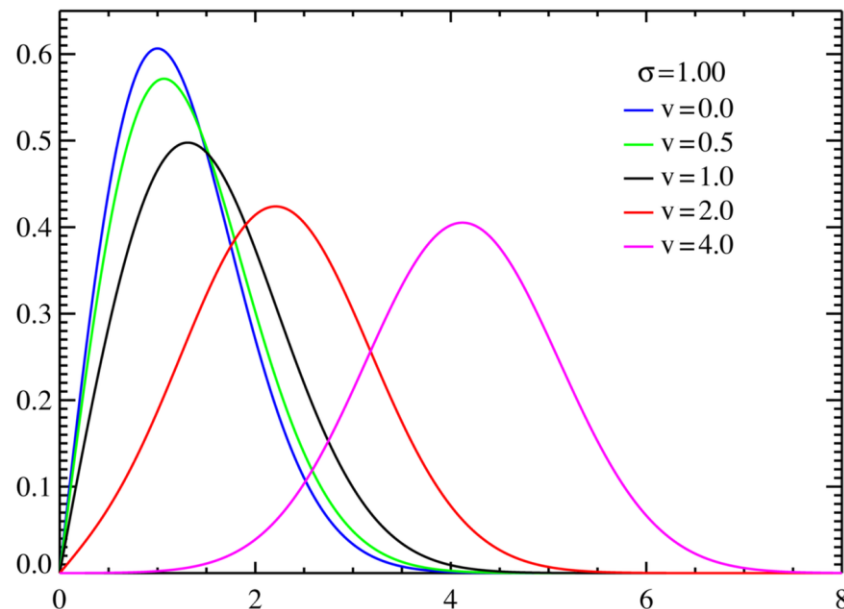
Κατανομές Rice, Rayleigh

- Κατανομή Rice

- Συνιστώσα Line of Sight (LOS)

- $$f(x|v, \sigma) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2 + v^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{xv}{\sigma^2}\right)$$

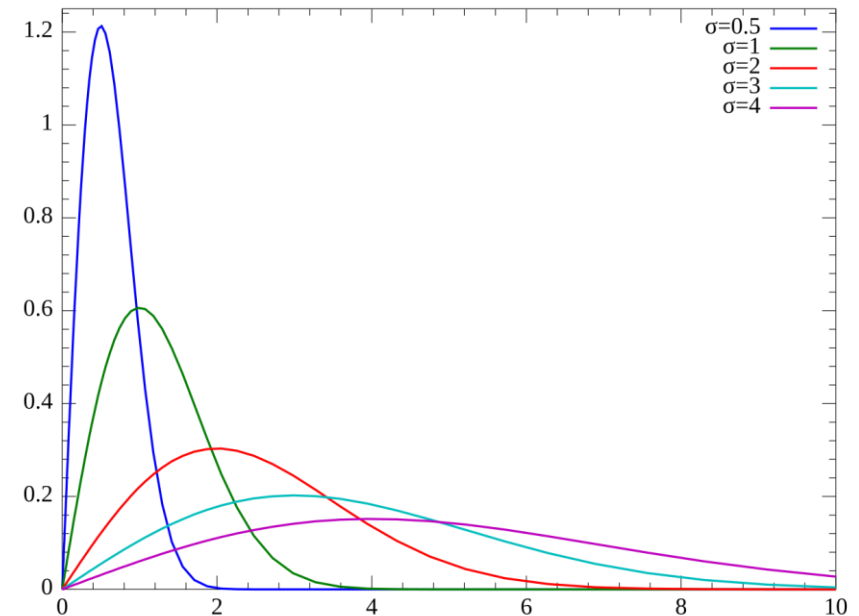
όπου I_0 η συνάρτηση Bessel



- Κατανομή Rayleigh

- Συνιστώσες Non Line of Sight (NLOS)

- $$f(x; \sigma) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$



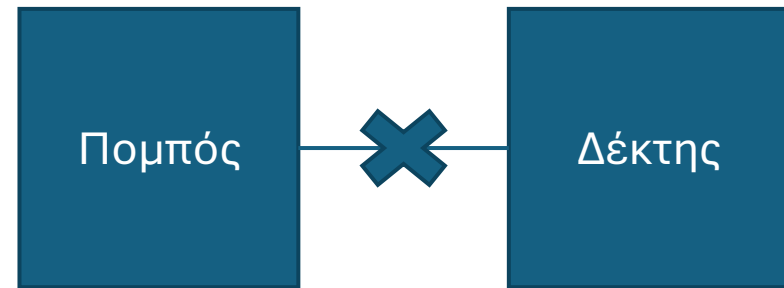
Τα Διάφορα Οφέλη των Πολλαπλών Κεραιών

Είδη Κέρδους MIMO

- Κέρδος συστοιχίας – Array gain ή Διαμόρφωση δέσμης – Beamforming
 - Εστίαση εκπεμπόμενης ή λαμβανόμενης H/M δέσμης
 - Κέρδος συστοιχίας εκπομπής – Transmit array gain
 - Κέρδος συστοιχίας λήψης – Receive array gain
- Κέρδος διαφοροποίησης – Diversity gain
 - Συνδυασμός ίδιων σημάτων από πολλαπλά, ανεξάρτητα κανάλια διαλείψεων
 - L-κανάλια = L-diversity order
 - Χωρική διαφοροποίηση – Spatial Diversity
- Κέρδος κωδικοποίησης – Coding gain
 - Κωδικοποίηση χώρου-χρόνου – space-time (κώδικες trellis)

Διαφοροποίηση: Ιδέα

- Η ιδέα της διαφοροποίησης είναι κεντρική στα ασύρματα συστήματα επικοινωνιών
- Έστω ότι υπάρχει μία μοναδική ζεύξη μεταξύ των δύο άκρων της επικοινωνίας
- Τι θα γίνει όταν αυτή η ζεύξη διακοπεί;
 - Σκίαση
 - Γεγονότα deep fading
 - Προβλήματα στην κεραία ενός άκρου, κ.α.
- Διακοπή της επικοινωνίας



Διαφοροποίηση: Ιδέα

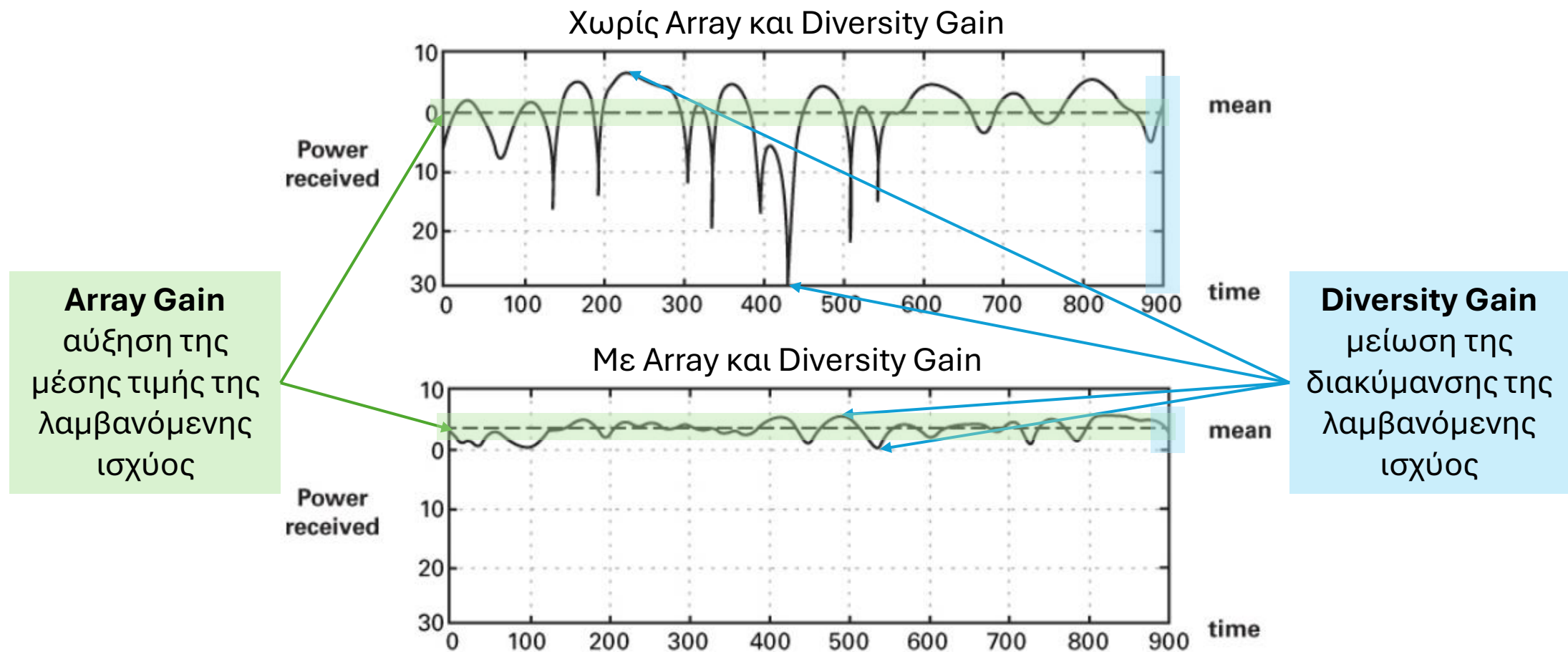
- Η ιδέα είναι να εισάγουμε επιπρόσθετες ζεύξεις μεταξύ των δύο άκρων
 - Πολλαπλές κεραίες στον πομπό, στον δέκτη, ή και στους δύο
 - Αποστολή ίδιων δεδομένων σε διαφορετική συχνότητα, χρόνο, κ.α.
- Αν μία από τις ζεύξεις διακοπεί, τότε δε θα μπορώ να εκμεταλλευτώ την ενισχυτική συμβολή της συγκεκριμένης ζεύξης
- Η επικοινωνία μεταξύ των δύο άκρων θα επιδεινωθεί, αλλά δε θα διακοπεί
- Αν η διαφοροποίηση είναι υψηλής τάξης, ο χρήστης μπορεί να μην αντιληφθεί επιδείνωση



Array Gain και Diversity Gain

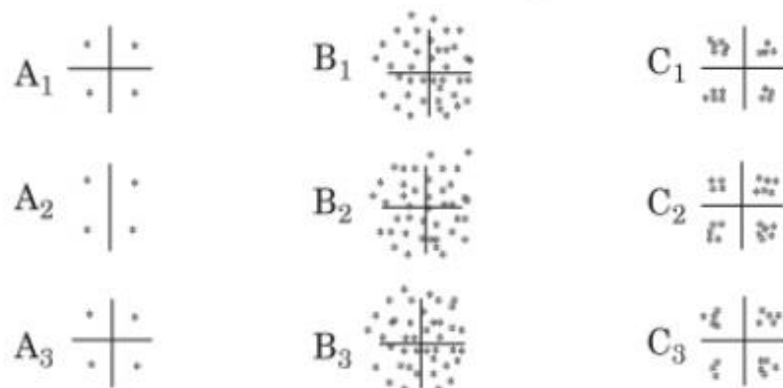
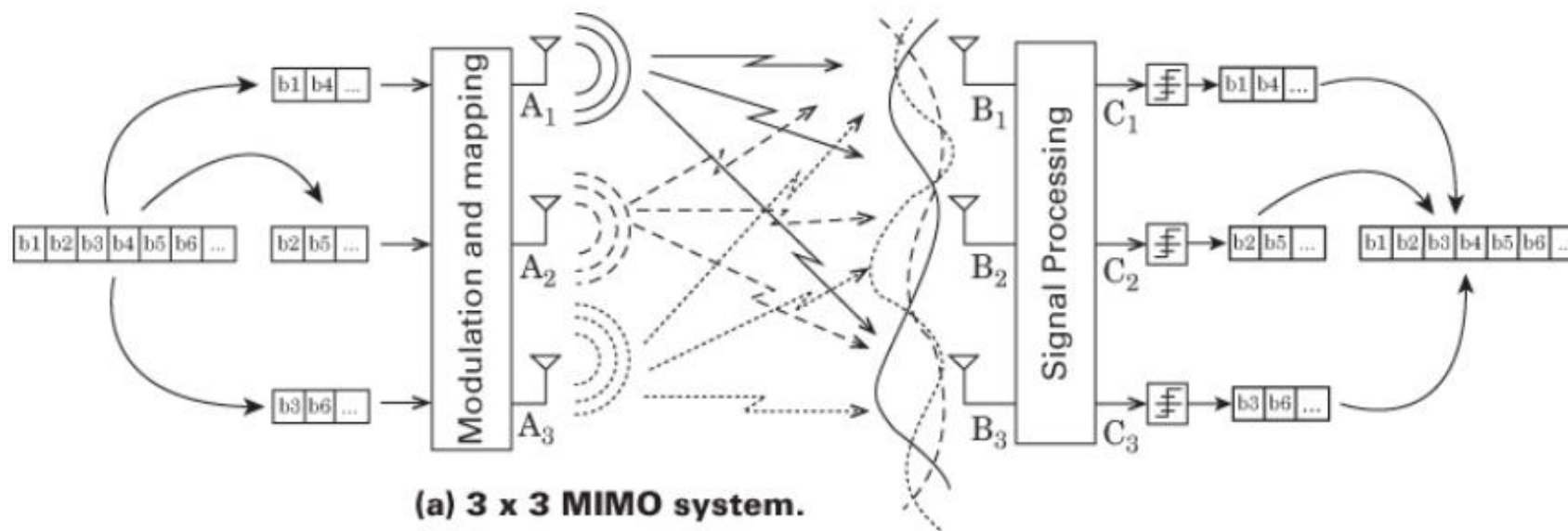
- Array Gain: Κέρδος από τη συνδυασμένη ενίσχυση του σήματος μέσω πολλαπλών κεραιών
 - Ισχύει ακόμα και σε απουσία fading – διαφέρει από το diversity gain
- Diversity Gain: Όφελος από πολλαπλές ανεξάρτητες διαδρομές μετάδοσης του ίδιου σήματος

Οφέλη Array Gain και Diversity Gain



Χωρική Πολυπλεξία

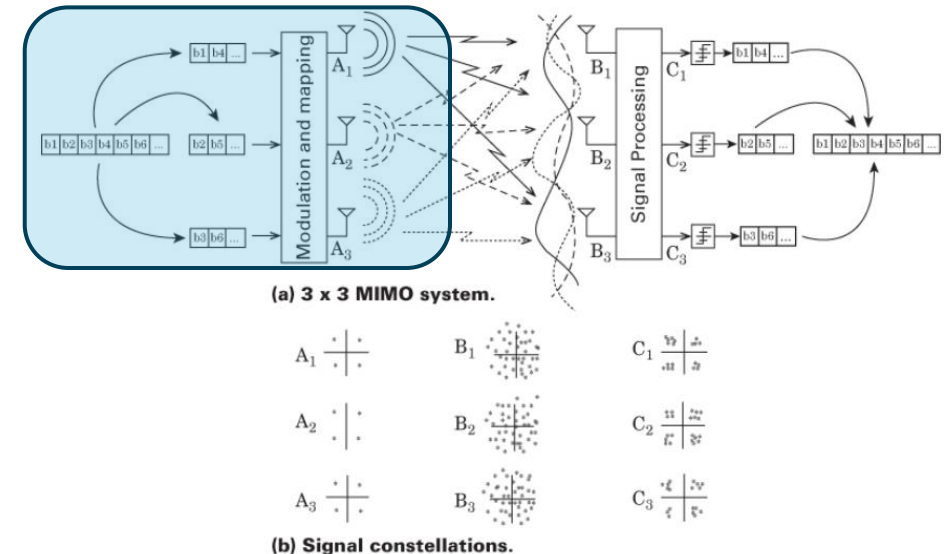
Ιδέα



(b) Signal constellations.

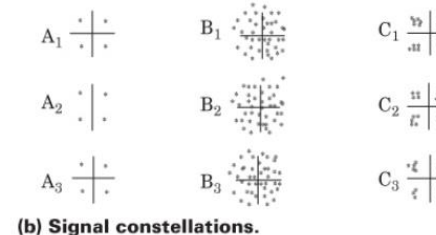
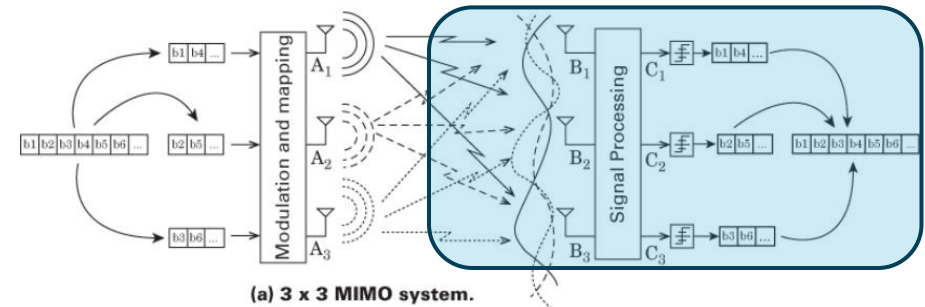
Βήμα-προς-βήμα

- Κεραίες εκπομπής, $M = 3$
- Κεραίες λήψης, $N = 3$
 - Κάθε κεραία λήψης λαμβάνει σήμα από κάθε κεραία εκπομπής
- Ροή bit προς μετάδοση $b_1, b_2, b_3, b_4, \dots$
 - Σειριακή
- Σειριακό σε παράλληλο
 - Η m -οστή κεραία εκπομπής θα μεταδώσει τα bit $i \bmod M = m$, όπου $i = 1, 2, 3, 4, \dots$ τα bit της ροής προς μετάδοση
- Σχηματίζονται $M = 3$ σύμβολα QPSK, A_1, A_2, A_3



Βήμα-προς-βήμα

- Η n -οστή κεραία του δέκτη λαμβάνει B_n , όπου $n = 1, 2, 3$
 - Υπενθύμιση: ο δέκτης δε θα λάβει ακριβώς A_1, A_2, A_3 , καθώς το κανάλι επιφέρει αλλοιώσεις στο διαδιδόμενο σήμα
- Ο δέκτης συγκρίνει τους A_m πρότυπους αστερισμούς με τους B_n αστερισμούς των λαμβανόμενων σημάτων
- Ο κάθε B_n αστερισμός περιέχει υποψήφια σημεία που έχουν ληφθεί ορθά
- Με πρόσθετη επεξεργασία σήματος, διαχωρίζονται τα υποψήφια λαμβανόμενα σήματα
- Σχηματίζεται μία εκτίμηση Προσαρμοσμένου Φίλτρου για κάθε σύμβολο
- Με γνώση του πίνακα κέρδους του καναλιού, οι ροές bit εκτιμώνται με λύση ενός συστήματος $M \times N$

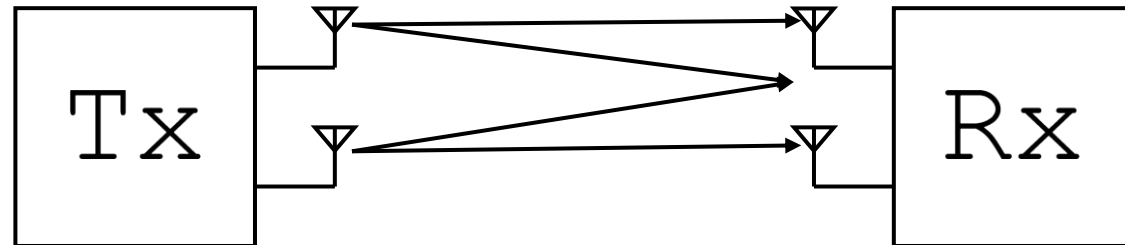


CSI στο Δέκτη

- CSI: Channel State Information
 - Πρακτικά, ο πίνακας καναλιού, H

- Παράδειγμα: 2X2 MIMO

- Γνωστά στο δέκτη
 - Λαμβανόμενο σήμα
 - CSI
 - (Αγνοούμε θόρυβο)
- Ζητούμενο: εκτίμηση του εκπεμπόμενου σήματος
- Με χρήση του MIMO μοντέλου, λύνω ως προς το εκπεμπόμενο σήμα (Προσοχή, ο πίνακας H πρέπει να αντιστρέφεται)



$$\underline{r} = H\underline{s} + \underline{n} \Rightarrow H^{-1}\underline{r} = \underbrace{H^{-1}H}_I \underline{s} \Rightarrow H^{-1}\underline{r} = \underline{\hat{s}}$$

Απόδοση ως προς τη
Χωρητικότητα

Ντετερμινιστικό Κανάλι - SISO

- Θεώρημα Χωρητικότητας Shannon (για SISO)

$$C = W \log_2(1 + SNR)$$

- Αν $P_S \gg P_N$:

$$\frac{C}{W} = \log_2 SNR$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Στο βιβλίο, χρησιμοποιείται ο συμβιβασμός} \\ \text{χωρητικότητα} == \text{αποδοτικότητα εύρους ζώνης,} \\ \frac{C}{W} = C \text{ και } \frac{R}{W} = R \end{array} \right)$$

Ντετερμινιστικό Κανάλι - MIMO

- Με κατάλληλους μετασχηματισμούς, λαμβάνουμε την έκφραση του Θεωρήματος Shannon για κανάλι MIMO

$$C = mW \log_2 \left(1 + SNR \frac{N}{M} \right)$$

$$\text{όπου } m = \min(N, M)$$

Χωρητικότητα MIMO

$$C = \log_2 \left[\det \left[\underbrace{\mathbf{I}_N}_{N \times N \text{ Identity Matrix}} + \text{SNR} \underbrace{\left(\frac{1}{M} \right) \mathbf{H} \mathbf{H}^H}_{\text{As } M \rightarrow \infty \text{ the channel becomes Gaussian, and this normalized matrix } \rightarrow \mathbf{I}_N} \right] \right]$$

In this example, there are more transmit antennas M than receive antennas N .

$N \times N$
Identity
Matrix

As $M \rightarrow \infty$ the channel becomes Gaussian, and this normalized matrix $\rightarrow \mathbf{I}_N$

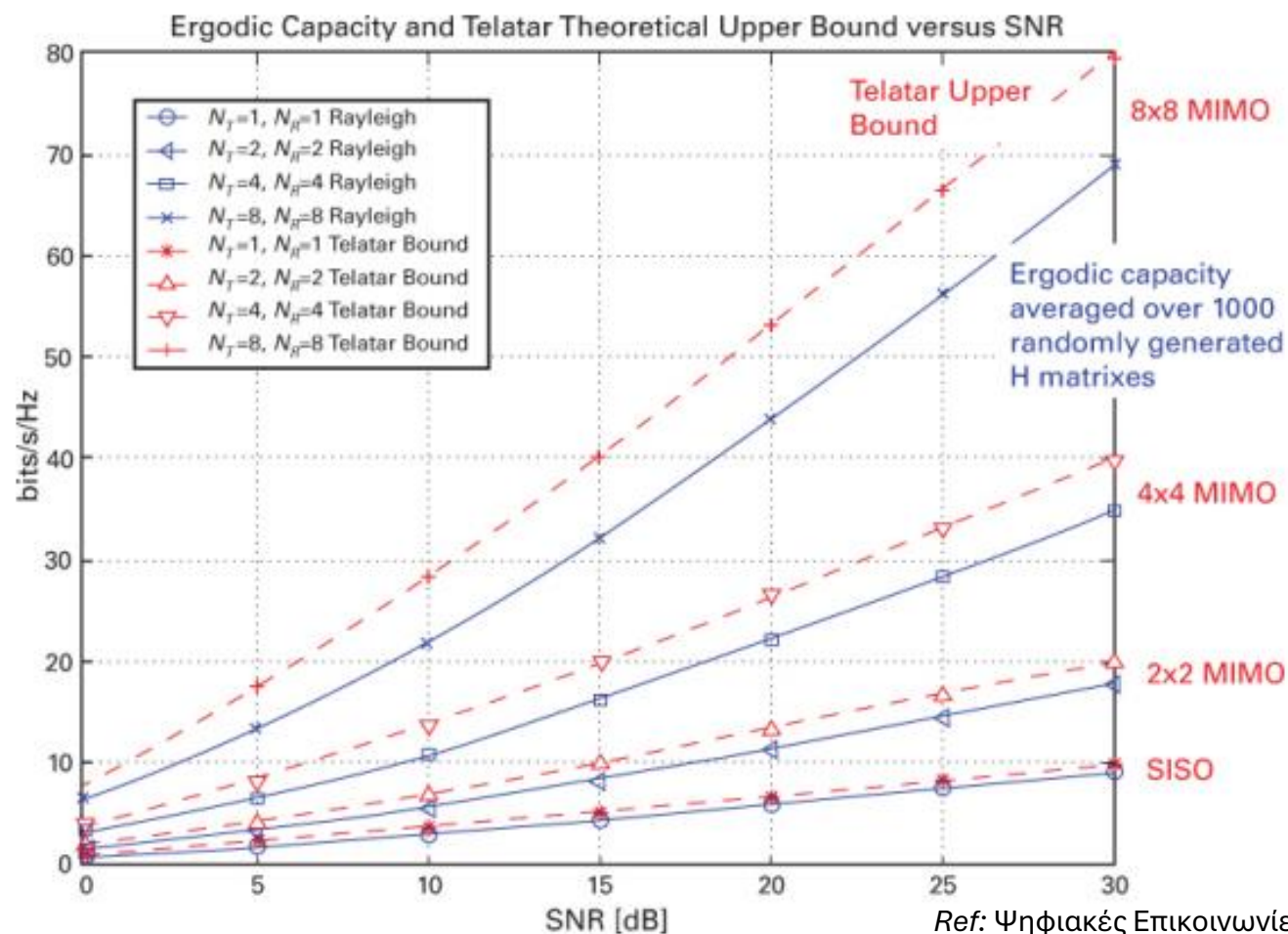
For fixed N and large M , by the law of large numbers $(1/M) \mathbf{H} \mathbf{H}^H \rightarrow \mathbf{I}_N$, and the determinant looks like the product of the diagonal terms (the off-diagonal terms $\rightarrow 0$). Thus, the form is $(1 + \text{SNR})^N$

The logarithmic operation allows the exponent N to become the log multiplier. Thus, for large M , capacity is bounded by

$$C \text{ (bits/s/Hz)} \leq N \log_2 (1 + \text{SNR})$$

Τυχαίο Κανάλι - Εργοδική Χωρητικότητα

$$C_{\text{ergodic}} = \mathbf{E} \left\{ \log_2 \left[\det \left(\mathbf{I}_n + \frac{\text{SNR}}{M} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right) \right] \right\} = \mathbf{E} \{ m \log_2 (1 + \text{SNR}) \}$$



Τυχαίο Κανάλι – Χωρητικότητα Διακοπής

- Αργές διαλείψεις
- Διακοπές για μεγάλα χρονικά διαστήματα
- Χωρητικότητα διακοπής είναι η ελάχιστη χωρητικότητα για ένα δεδομένο επίπεδο αξιοπιστίας
- $p\%$ ρυθμός πληροφορίας που είναι εγγυημένος για $(100 - p)\%$ πραγματοποιήσεις (realizations) του καναλιού
 - $P(C \leq C_{out}) = p\%$
- Συνήθης τιμή για το $p = 5\%$
 - Άρα η χωρητικότητα θα είναι μεγαλύτερη από το C_{out} στο 95% των πραγματοποιήσεων
- Χρήσιμο μέτρο για εκτίμηση ρυθμαπόδοσης

Βελτίωση Χωρητικότητας MIMO - Παράδειγμα

- SISO, SNR = 30dB
- 10x10 MIMO, 10 ανεξάρτητες διαδρομές, SNR τέτοιο ώστε ίδια μέση ισχύς MIMO και SISO
- SISO
 - SNR = 30dB σε κλίμακα decibel $\Rightarrow 10^3$ σε γραμμική κλίμακα
 - $C_{SISO} = \log_2(1 + SNR_{SISO}) = \log_2(1 + 1000) \approx 10 \frac{\text{bits}}{\text{s/Hz}}$
- MIMO
 - Θέλουμε ίδια μέση ισχύ σε MIMO και SISO άρα έχουμε $SNR = \frac{10^3}{10 \text{ ανεξάρτητες διαδρομες}} = 10^2$
 - $C_{MIMO} = m \log_2 \left(1 + SNR_{MIMO} \frac{N}{M} \right) = 10 \log_2(1 + 100) \approx 66 \frac{\text{bits}}{\text{s/Hz}}$
- Σύγκριση
 - $\frac{C_{MIMO}}{C_{SISO}} = 6.5$ φορές μεγαλύτερη χωρητικότητα

Πληροφορίες Κατάστασης Καναλιού στον Πομπό

Γραμμική Άλγεβρα 101

Ορισμός: Έστω $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$. Ο πίνακας $A^* = (\bar{A})^T$ λέγεται αναστροφосуζυγής του A .

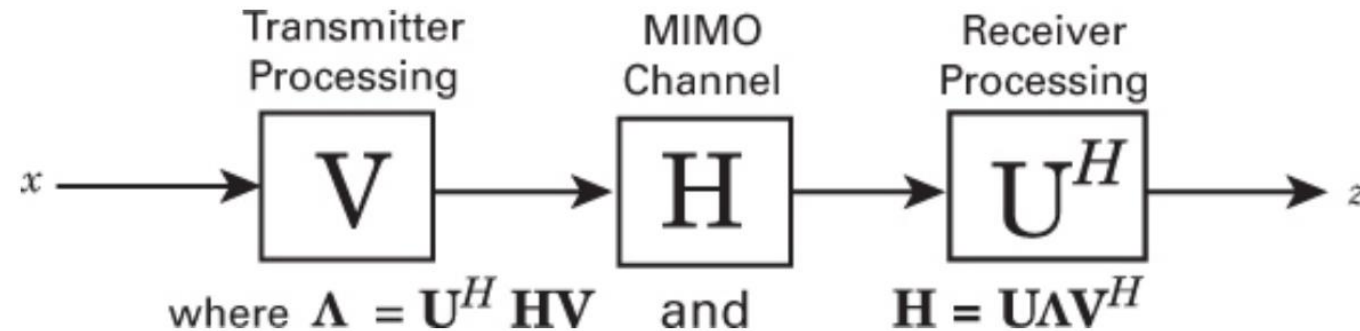
Ορισμός: Ένας πίνακας $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ λέγεται μοναδιαίος αν $A^{-1} = A^*$, δηλαδή $AA^* = A^*A = I_n$.

Ορισμός: Ένας πίνακας $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ λέγεται Ερμιτιανός αν $A = A^*$. Συμβολίζεται με A^H ή $A^\dagger$.

Ορισμός: Έστω διανυσματικός χώρος V με εσωτερικό γινόμενο. Ένα σύνολο στοιχείων v_i του V λέγεται ορθογώνιο, αν τα v_i είναι κάθετα μεταξύ τους. Αν επιπλέον κάθε στοιχείο έχει μέτρο 1, το σύνολο λέγεται ορθοκανονικό.

SVD για CSI σε Πομπό MIMO

- Ιδέα: Αν ο Πομπός ξέρει την κατάσταση του καναλιού (δηλαδή των πίνακα H που έχει τις συνιστώσες κάθε μονοπατιού), μπορεί να καταναείμει βέλτιστα την ισχύ στις διαδρομές
- Πώς θα πάρει τη συνιστώσα για το κάθε κανάλι;
 - Singular Value Decomposition (SVD)
- Αποσύνθεση ενός πίνακα σε τρεις
 - Ο U είναι ορθοκανονικός
 - Ο Λ είναι διαγώνιος με στοιχεία μη-αρνητικά, διατεταγμένα, δηλ. $\sigma_{i,j} \geq \sigma_{i+1,j+1} \geq \dots \geq \sigma_{M,M} \geq 0$, όπου M η διάσταση του Λ
 - (στη βιβλιογραφία συχνά Σ)
 - Ο V είναι ορθοκανονικός



Βήμα-προς-βήμα

- Θέλω

$$H = U\Sigma V^H$$

- Πρέπει να λύσω δύο εξισώσεις

$$\begin{aligned} H^H H &= V \Sigma^H \Sigma V^H \\ HV &= U \Sigma \end{aligned}$$

- $H^H H = V \Sigma^H \Sigma V^H$

- Προκύπτει αν πολλαπλασιάσω και τα δύο μέλη της $H = U\Sigma V^H$ με H^H από αριστερά
- Δίνει τους πίνακες V και Σ

- $HV = U\Sigma$

- Προκύπτει αν πολλαπλασιάσω και τα δύο μέλη της $H = U\Sigma V^H$ με V από δεξιά
- Δίνει τον πίνακα U

- Στο MATLAB υπάρχει αντίστοιχη συνάρτηση

Βήμα-προς-βήμα

Το μοντέλο σε MIMO είναι $\underline{r} = H\underline{s} + \underline{n}$. Δέκτης:

$$\underline{r} = H\underline{s} + \underline{n} \Rightarrow$$

$$\underline{r} = U\Sigma V^H \underline{s} + \underline{n} \Rightarrow$$

$$U^H \underline{r} = U^H (U\Sigma V^H \underline{s} + \underline{n}) \Rightarrow$$

$$\underbrace{U^H \underline{r}}_{\hat{r}} = \Sigma V^H \underline{s} + \underbrace{U^H \underline{n}}_{\hat{n}} \Rightarrow$$

$$\hat{r} = \Sigma V^H \underline{s} + \hat{n}$$

Βήμα-προς-βήμα

Το μοντέλο σε MIMO είναι $\underline{r} = H\underline{s} + \underline{n}$. Πομπός:
Precoding: $\underline{s} = V\hat{s}$

$$\hat{r} = \Sigma V^H \underline{s} + \hat{n} \Rightarrow$$

$$\hat{r} = \Sigma V^H V \hat{s} + \hat{n} \Rightarrow$$

$$\hat{r} = \Sigma \hat{s} + \hat{n}$$

Βήμα-προς-βήμα

- Συνεπώς, έχω M παράλληλα κανάλια, με

$$\hat{r}_i = \underbrace{\sigma_i \hat{s}_i}_{\text{Σήμα}} + \underbrace{\hat{n}_i}_{\text{Θόρυβος}}, i = 1, 2, \dots, M$$

- Η ισχύς της κάθε συνιστώσας i είναι $P_i = E(|\hat{s}_i|^2)$

$$SNR_i = \frac{\sigma_i^2 P_i}{\sigma^2}$$

Όπου σ^2 διασπορά θορύβου Rayleigh

- Χωρητικότητα Shannon

$$C_i = \log_2(1 + SNR_i) = \log_2 \left(1 + \frac{\sigma_i^2 P_i}{\sigma^2} \right)$$

- Συνολική χωρητικότητα

$$C = \sum_{i=1}^M C_i$$

Βήμα-προς-βήμα

- Στόχος: μεγιστοποίηση της συνολικής χωρητικότητας

$$\max C$$

- Το άθροισμα των ισχύων P_i δεν μπορεί να ξεπεράσει τη συνολική ισχύ του πομπού

$$\max C \text{ με περιορισμό } \sum_{i=1}^M P_i \leq P$$

- Αυτό αποτελεί πρόβλημα βελτιστοποίησης που λύνεται με πολλαπλασιαστές Lagrange

- Προκύπτει αντικειμενική συνάρτηση

$$\sum_{i=1}^M \log_2 \left(1 + \frac{\sigma_i^2 P_i}{\sigma^2} \right) + \boxed{\lambda} \left(P - \sum_{i=1}^M P_i \right)$$

Πολλαπλασιαστής Lagrange

Βήμα-προς-βήμα

- Με παραγωγή ως προς P_i προκύπτει

$$\sum_{i=1}^M P_i = \sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2} \right) = P$$

- Βρίσκουμε το λ (τα υπόλοιπα είναι γνωστά)
- Βρίσκουμε τις συνιστώσες ισχύος

$$P_i = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2} \right)^+$$

ή σε κλίμακα decibel

$$P_i(dB) = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2} \right)$$

Παράδειγμα

MIMO 3X3, Συνολική ισχύς πομπού $P = 20dBm$, ισχύς θορύβου $\sigma^2 = 10dBm$, πίνακας συνιστωσών καναλιού

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Κάνω SVD

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \quad V^H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

- Μοντέλο

- $\underline{r} = H\underline{s} + \underline{n} \Rightarrow \underline{r} = U\Sigma V^H \underline{s} + \underline{n} \Rightarrow \underbrace{U^H \underline{r}}_{\hat{r}} = \Sigma V^H \underline{s} + \underbrace{U^H \underline{n}}_{\hat{n}}$

- Πομπός

- $\underline{s} = V\hat{s}$

- Δέκτης

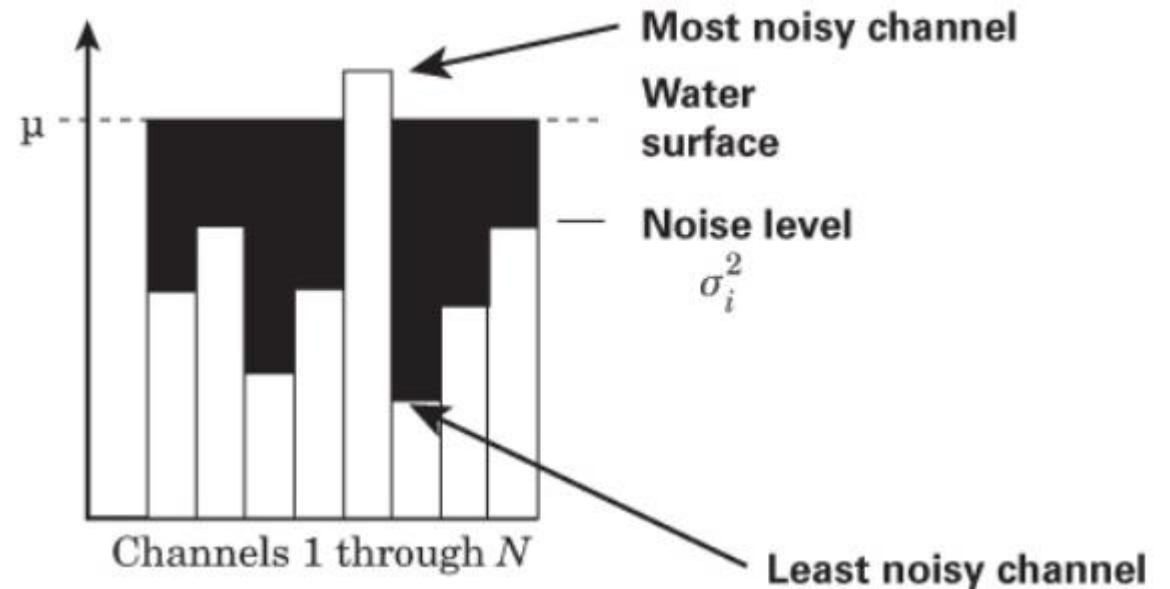
- $\hat{r} = \Sigma V^H \underline{s} + \hat{n} \Rightarrow \hat{r} = \Sigma \hat{s} + \hat{n} \Rightarrow \begin{cases} \hat{r}_1 = 4\hat{s}_1 + \hat{n}_1 \\ \hat{r}_2 = \sqrt{5}\hat{s}_2 + \hat{n}_2 \\ \hat{r}_3 = \sqrt{5}\hat{s}_3 + \hat{n}_3 \end{cases}$

Παράδειγμα

- Εύρεση επιμέρους P_i
 - $P_i = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2} \right)^+$, $\sum_{i=1}^M P_i = P$
 - Μετατροπή ισχύων
 - Συνολική ισχύς πομπού: $P = 20dBm \Rightarrow P = 100mW$
 - Ισχύς θορύβου: $\sigma^2 = 10dBm \Rightarrow \sigma^2 = 10mW$
 - Εύρεση λ
 - $P_1 + P_2 + P_3 = P \Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\sigma^2}{\sigma_1^2} \right) + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\sigma^2}{\sigma_2^2} \right) + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\sigma^2}{\sigma_3^2} \right) = P \Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{10^2}{4^2} \right) + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{10^2}{\sqrt{5}^2} \right) + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{10^2}{\sqrt{5}^2} \right) = 100 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 34.8750$
 - $P_1 = \left(34.8750 - \frac{10}{4^2} \right)^+ = 34.25mW$, $P_2 = P_3 = \left(34.8750 - \frac{10}{\sqrt{5}^2} \right)^+ = 32.8750mW$
- Επαληθεύω ότι $\sum_i P_i = P$ και ότι $P_i \geq P_{i+1}$
- Αυτός ο αλγόριθμος κατανομής ισχύος στις συνιστώσες ονομάζεται «Πλήρωσης Νερού» (Water filling)

Αλγόριθμος «Πλήρωσης Νερού»

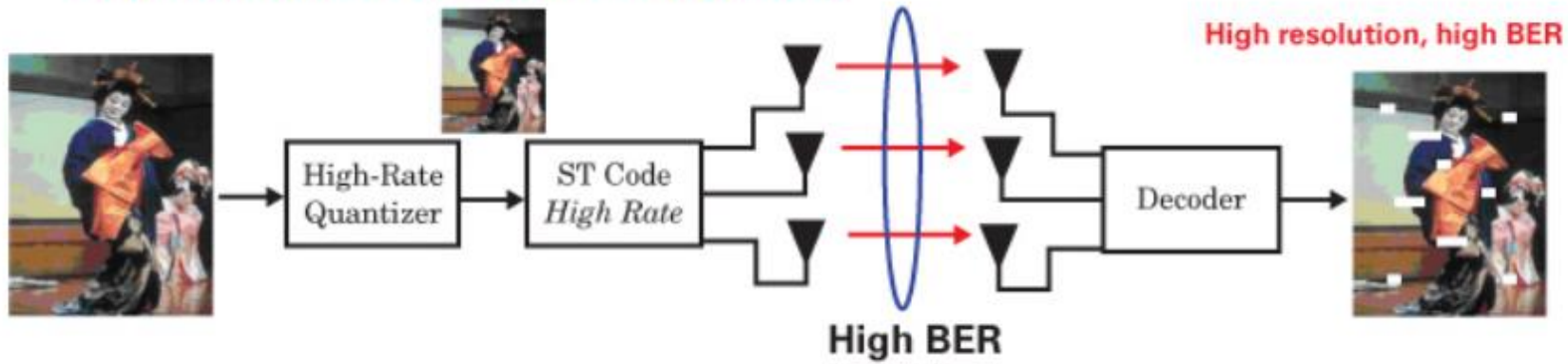
- Το κάθε κανάλι («δοχείο») εισάγει κάποιο θόρυβο
- Καθορίζεται μία «επιφάνεια νερού»
- Γεμίζω το κάθε «δοχείο» με νερό μέχρι να φτάσει την επιφάνεια (δηλαδή δίνω ισχύ στο κανάλι)
- Κάποια «δοχεία» είναι πάνω από την «επιφάνεια νερού»
 - Δεν τα γεμίζω καθόλου (δεν τους δίνω ισχύ)
 - Εξ' ου και το θετικό μέρος που παίρνουμε στα P_i
- Τελικά, κάθε κανάλι παίρνει ισχύ αντιστρόφως ανάλογα με το πόσο θορυβώδες είναι
- Επίπεδο θορύβου καθορίζεται από το πιο θορυβώδες κανάλι που λαμβάνει ισχύ
- Αλγόριθμος “Πλήρωσης Νερού” (“Water-filling”)
 - Αλγόριθμος κατανομής ισχύος
 - Μεγιστοποίηση της χωρητικότητας Shannon σε N παράλληλα κανάλια
 - Μέσω πολλαπλασιαστών Lagrange



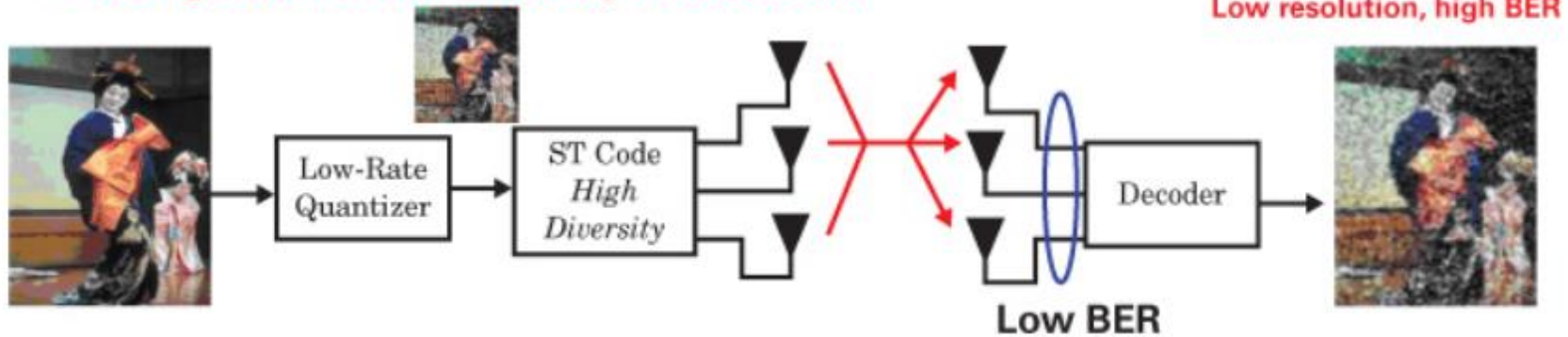
Συμβιβασμοί Συστημάτων MIMO

Γρήγορος ή Εύρωστος;

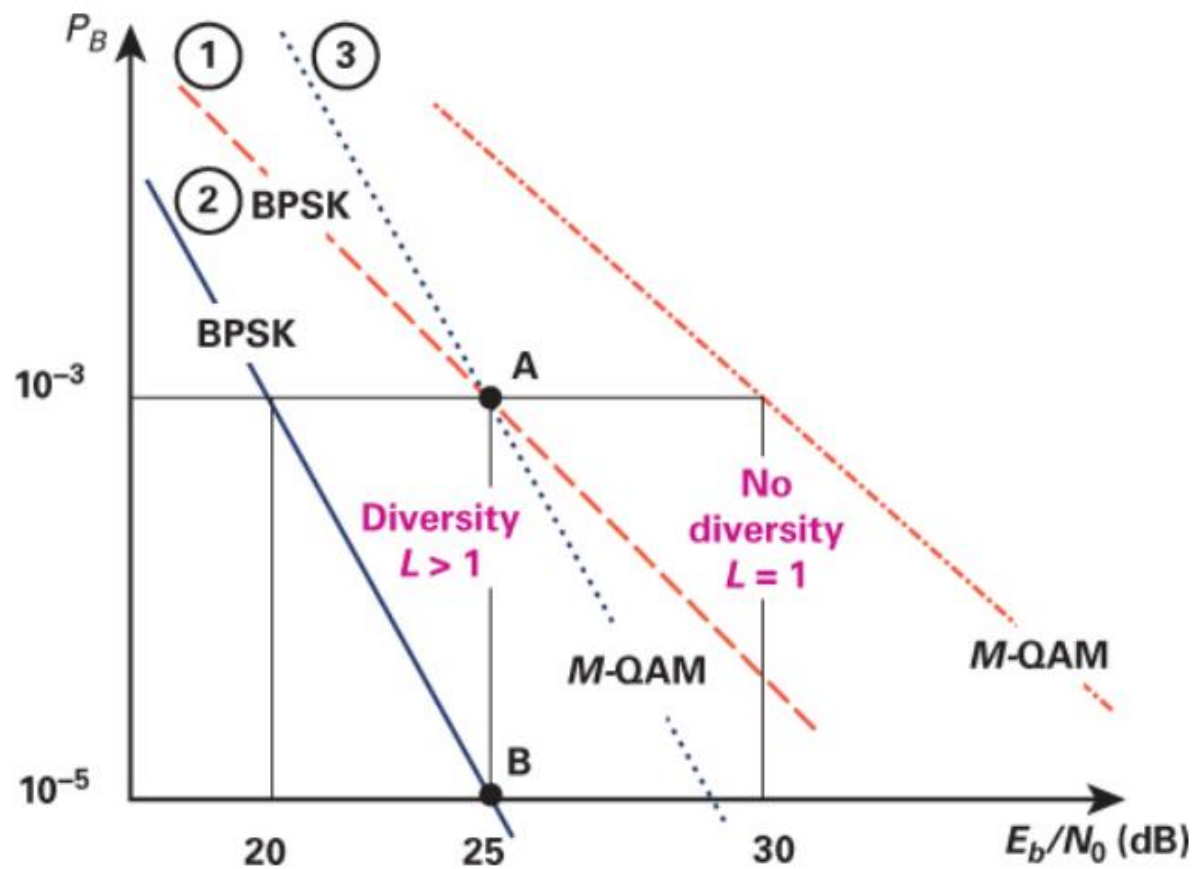
- Using antennas for spatial multiplexing



- Using antennas for diversity (robustness)

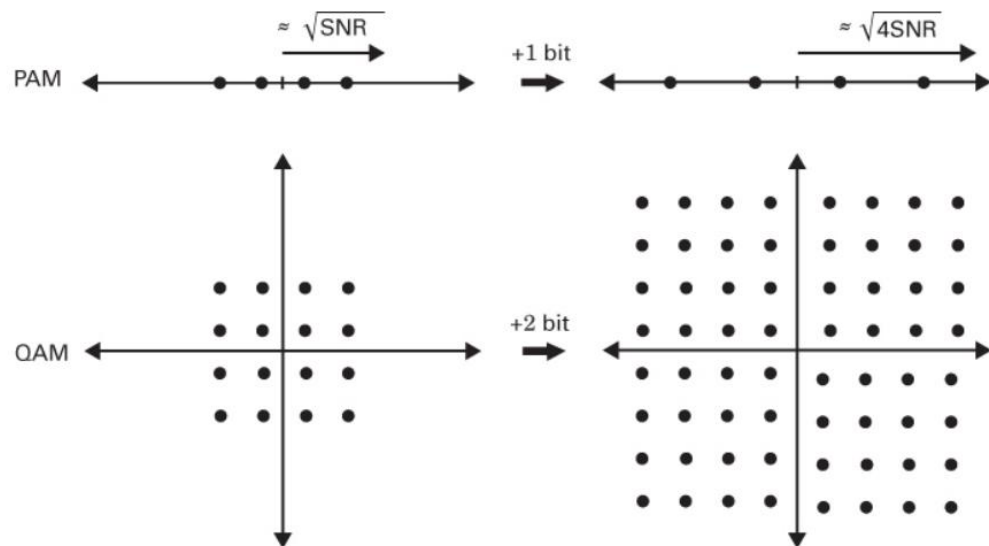


Trade-off Χωρητικότητας – Ευρωστίας

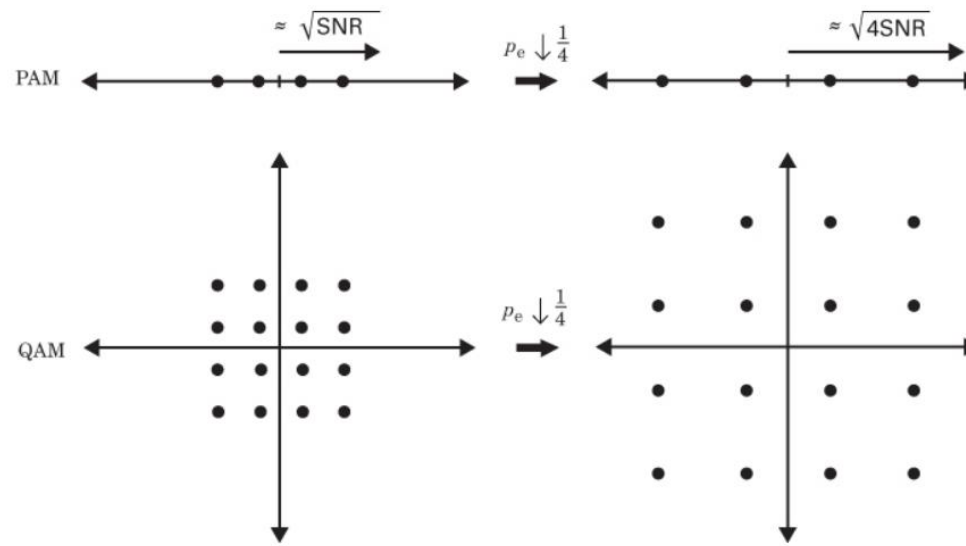


Αστερισμοί για Trade-off Χωρητικότητας – Ευρωστίας

Επίτευξη καλύτερης χωρητικότητας



Επίτευξη καλύτερης ευρωστίας



Συμβιβασμός Κερδών Πολυπλεξίας - Διαφοροποίησης

- Κέρδος πολυπλεξίας, r

$$R = r \log_2(1 + SNR) \Rightarrow$$

$$r = \lim_{SNR \rightarrow \infty} \left(\frac{R}{\log_2 SNR} \right)$$

όπου R η απόδοση του εύρους ζώνης

- Κέρδος διαφοροποίησης, d

$$P_e = SNR^{-d}$$

όπου P_e η πιθανότητα σφάλματος

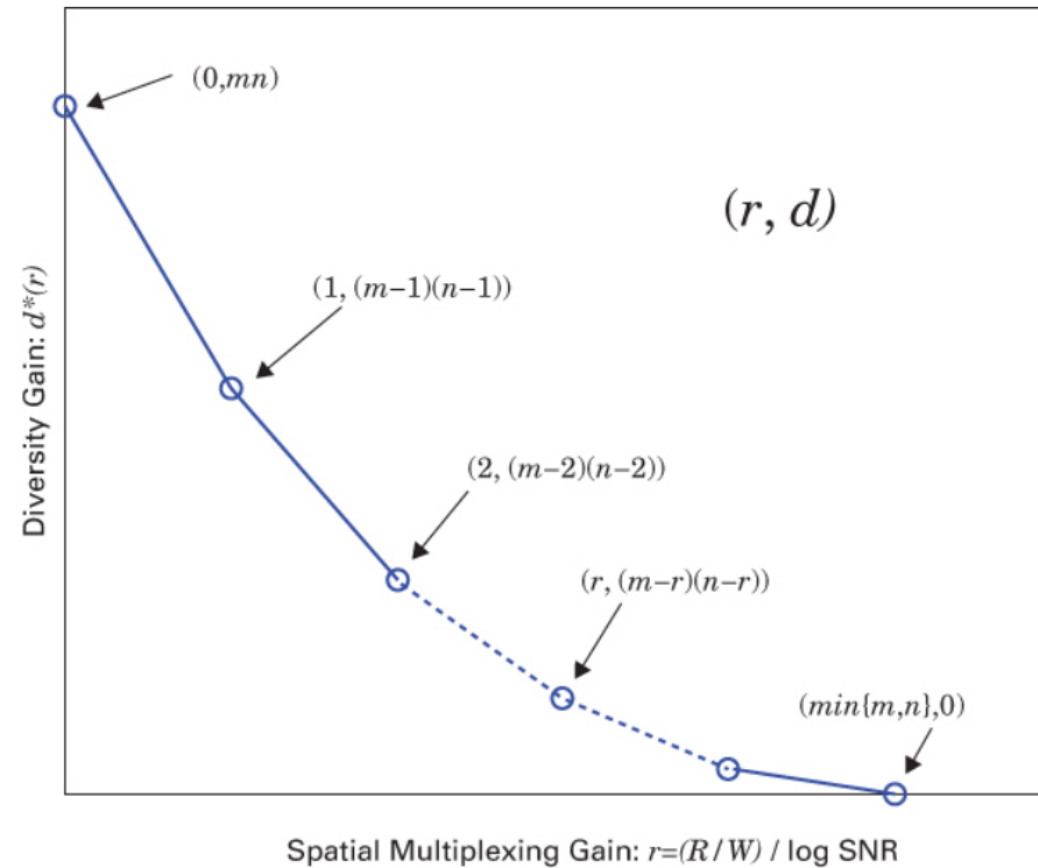
- Βέλτιστο κέρδος διαφοροποίησης, d^*

$$d^*(r) = (m - r)(n - r)$$

όπου m και n το πλήθος κεραιών σε πομπό και δέκτη, αντίστοιχα

Επίπεδο Πολυπλεξίας-Διαφοροποίησης (r, d)

Επίπεδο Tse - Viswanath



Εύρος Ζώνης ή Ισχύς;

- Η χωρητικότητα ή η ευρωστία επιτυγχάνονται μέσω αύξησης του εύρους ζώνης ή της ισχύος εκπομπής
- Υπενθύμιση: Θεώρημα Shannon
$$C = W \log_2(1 + SNR)$$
- Αύξηση του εύρους ζώνης $\Rightarrow$ γραμμική αύξηση χωρητικότητας
- Αύξηση του SNR $\Rightarrow$ λογαριθμική αύξηση χωρητικότητας
 - Μέσω αύξησης της ισχύος εκπομπής
- Αν έχω την επιλογή, το εύρος ζώνης επιτυγχάνει μεγαλύτερη αύξηση της χωρητικότητας