

Πολυώνυμα Chebyshev

Τα πολυώνυμα Chebyshev χρησιμοποιούνται σε πολλά προβλήματα της Αριθμητικής Ανάλυσης και γενικότερα των Μαθηματικών

Για $0 \leq n \in \mathbb{Z}$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x), \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (1)$$

Η (1) μπορεί να μην φαίνεται ότι είναι πολυώνυμο αλλά θα δείξουμε ότι είναι πολυώνυμο βαθμού n . Για να απλοποιήσουμε την (1) δέχουμε

$$\theta = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (2)$$

$$\text{Τότε } (1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} T_n(x) = \cos(n\theta) \quad (2')$$

Παράδειγμα:

$$\text{Αν } n=0, \text{ τότε } T_0(x) = \cos(0 \cdot \theta) \Leftrightarrow T_0(x) = 1$$

$$\text{Αν } n=1, \text{ τότε } T_1(x) = \cos \theta \stackrel{(2)}{\Rightarrow} T_1(x) = x$$

$$\text{Αν } n=2, \text{ τότε } T_2(x) = \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} T_2(x) = 2x^2 - 1$$

Από την τριγωνομετρία γνωρίζουμε ότι

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta) \quad (3)$$

Οπότε, αν $n \geq 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= \cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta + \theta) \\ &\stackrel{(3)}{=} \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} T_{n-1}(x) &= \cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta - \theta) \\ &\stackrel{(3)}{=} \cos(n\theta)\cos\theta + \sin(n\theta)\sin\theta \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{Από } (4) + (5) \Rightarrow T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2\cos(n\theta)\cos\theta \stackrel{(2)(2')}{=} 2xT_n(x)$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \quad (6)$$

Παράδειγμα:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

$$\text{Για } n=1 : T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x \cdot x - 1 = 2x^2 - 1$$

$$\text{Για } n=2 : T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$$

$$\text{Για } n=3 : T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 6x^2 + 1$$

Ημιεπαναληπτικές Μέθοδοι

Για τη λύση του γραμμικού συστήματος $Ax=b$ (7)

ας θεωρήσουμε την ακολουθία των διανυσμάτων που προκύπτουν από την βασική επαναληπτική μέθοδο

$$u^{(n+1)} = Gu^{(n)} + k, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Είναι γνωστό από τη θεωρία του αθροίσματος των ακολουθιών ότι συχνά είναι δυνατόν να αναπτυχθεί μια νέα ακολουθία διανυσμάτων $v^{(0)}, v^{(1)}, \dots$ τέτοια ώστε η νέα ακολουθία να συγκλίνει στην περίπτωση που δεν συγκλίνει η αρχική ή η νέα ακολουθία να συγκλίνει ταχύτερα. Η νέα ακολουθία μπορεί να οριστεί σαν ένας γραμμικός συνδυασμός ως αρχικής ακολουθίας. Έτσι ορίζουμε την ακολουθία

$$v^{(n)} = \sum_{k=0}^n \alpha_k(n) u^{(k)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

την οποία θα καλούμε ημι-επαναληπτική (Semi-Iterative (SI)) μέθοδο εχέου με την (8).

Είναι ημι-επαναληπτική γιατί

- πρώτα εκτελούμε την επανάληψη με την (8)
- και στη συνέχεια συνδυάζουμε αλγεβρικά αυτές τις επαναλήψεις χρησιμοποιώντας την (9).

Μπορούμε πχ να θέσουμε $\alpha_k(n) = 1/(n+1)$, οπότε τα διανύσματα $v^{(n)}$ είναι η μέση τιμή των $u^{(n)}$, πράγμα που αντιστοιχεί αριθμώς στο άθροισμα του Cesaro (C, 1)

$$\begin{cases} v^{(0)} = u^{(0)} \\ v^{(1)} = \frac{1}{2} (u^{(0)} + u^{(1)}) \\ v^{(2)} = \frac{1}{3} (u^{(0)} + u^{(1)} + u^{(2)}) \\ \vdots \end{cases}$$

- Ο αυτειφρευνός βωονός μας είναι να προδιορίδουρε τους σταδερούς βουτελεετές $a_k(n)$ τως (9) έτσι ώστε η ταχύτητα σύγκλισης τως νέας επαναληπτικής μεθόδου να είναι μεγαλύτερη από εκείνη τως (8). Αρχικά αν υποθεεί ότι το αρχικό διάνυσμα $u^{(0)}$ τως (8) συμπίπτει με την αληθή λύση u του βωυτήματος τότε θα έχουμε

$$u^{(n)} = u, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Σττω περίπτωση αυτή απαιτούρε και

$$v^{(n)} = u, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

οπότε από ττω (9) λαμβανούρε

$$\sum_{k=0}^n a_k(n) = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

• Προκειμένου να αναλύδουρε την ταχύτητα σύγκλισης μιας ημι-επαναληπτικής μεθόδου ορίδουρε τα διανύσματα

$$e^{(n)} = u^{(n)} - u \quad \text{και} \quad \eta^{(n)} = v^{(n)} - u.$$

Από ττω (9) και (11) έχουμε

$$\eta^{(n)} = \sum_{k=0}^n a_k(n) u^{(k)} - \sum_{k=0}^n a_k(n) u = \sum_{k=0}^n a_k(n) (u^{(k)} - u) = \sum_{k=0}^n a_k(n) e^{(k)} \quad (12)$$

Επειδή όμως $e^{(k)} = G^k e^{(0)} \quad (13)$

η (12) $\stackrel{(13)}{\Rightarrow} \eta^{(n)} = \left(\sum_{k=0}^n a_k(n) G^k \right) e^{(0)} \quad (14)$

- 58 -

Ορίζοντας το πολυώνυμο $P_n(x)$ από τη σχέση

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(n) x^k, \quad n=0,1,2,\dots$$

η (14) γράφεται σαν

$$\eta^{(n)} = P_n(G) \varepsilon^{(0)} = P_n(G) \eta^{(0)} \quad (15)$$

όπου $P_n(G)$ είναι ένα πολυώνυμο του πίνακα G , όπου

$$\begin{cases} P_n(G) = a_0(n)I + a_1(n)G + \dots + a_n(n)G^n \\ P_n(1) = 1 \end{cases} \quad (16)$$

Επίσης από την (15) έχουμε ότι

$$\|\eta^{(n)}\|_2 = \|P_n(G) \varepsilon^{(0)}\|_2 \leq \|P_n(G)\|_2 \|\varepsilon^{(0)}\|_2 \quad (17)$$

Από την (17) παρατηρούμε ότι ελαττώνοντας την $\|P_n(G)\|$, ελαττώνεται η $\|\eta^{(n)}\|$, δηλαδή τα εφάλματα της ημι-επαναληπτικής μεθόδου, οπότε οδηγούμαστε στο πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της ωδότητας $\|P_n(G)\|$.

Στο σημείο αυτό υποθέτουμε ότι ο πίνακας G έχει πραγματικές διακριτές λ_i τέτοιες ώστε

$$a \leq \lambda_i \leq b < 1 \quad \rightarrow \text{(με } S \text{ συμβολίζουμε τη φασματική ακτίνα)}$$

πομένως

$$\|P_n(G)\|_2 = S(P_n(G)) = \max_{\lambda_i} |P_n(\lambda_i)| \leq \max_{a \leq \lambda \leq b} |P_n(\lambda)|$$

Είναι φανερό λοιπόν ότι έχουμε το ακόλουθο πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\min_{P_n(1)=1} \left\{ \max_{a \leq \lambda \leq b < 1} |P_n(\lambda)| \right\} \quad (18)$$

που $P_n(\lambda)$ είναι ένα πραγματικό πολυώνυμο. Η λύση του παραπάνω προβλήματος είναι γνωστή και δίνεται με τη χρήση των πολυωνύμων Chebyshev.

Για να προχωρήσουμε στη λύση του παραπάνω προβλήματος απεικονίζουμε το διάστημα $a \leq \lambda \leq b$ στο διάστημα $-1 \leq \gamma \leq 1$ διαμέσου του μετασχηματισμού

$$\gamma := \gamma(\lambda) = \frac{2\lambda - (b+a)}{b-a} \Leftrightarrow \lambda := \lambda(\gamma) = \frac{(b-a)\gamma + (b+a)}{2} \quad (19)$$

Ορίζοντας το πολυώνυμο $Q_n(\gamma)$ από τη σχέση

$$Q_n(\gamma) = P_n\left(\frac{(b-a)\gamma + (b+a)}{2}\right) = P_n(\lambda)$$

Έχουμε ότι

$$P_n(\lambda) = Q_n\left(\frac{2\lambda - (b+a)}{b-a}\right) = Q_n(\gamma)$$

άρα

$$\max_{a \leq \lambda \leq b} |P_n(\lambda)| = \max_{-1 \leq \gamma \leq 1} |Q_n(\gamma)|$$

με $P_n(1) = Q_n(z) = 1$, $z = \gamma(1) = \frac{2 - (a+b)}{b-a} > 1$ αφού $2 - (a+b) > 0$, $b-a > 0$ (αφού έχουμε ότι $a < \lambda_i < b \Rightarrow b-a > 0$ και αφού $a < b < 1$ θα έχουμε $a+b < 2$, οπότε $2 - (a+b) > 0$)

και $[2 - (a+b)] - (b-a) = 2 - 2b = 2(1-b) > 0$ (αφού $b < 1$).

Το πρόβλημά μας τώρα είναι να βρούμε το πολυώνυμο $Q_n(\gamma)$ η-οστού βαθμού ή μικρότερου τέτοιου ώστε $Q_n(z) = 1$ και η

ποσότητα $\max_{-1 \leq \gamma \leq 1} |Q_n(\gamma)|$ να γίνεται ελάχιστη

Η λύση στο παραπάνω πρόβλημα δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα: Έστω n ένας σταθερός μη αρνητικός αμέριστος και z οποιοσδήποτε σταθερός πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $z > 1$.

Αν θέσουμε

$$P_n(x) = T_n(x) / T_n(z) \quad (20)$$

όπου $T_n(x)$ είναι το πολυώνυμο Chebyshev n -οστού βαθμού που δίνεται από την

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) = \frac{1}{2} \left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^{-n} \right] \quad (21)$$

$$= \cosh(n \cosh^{-1} x)$$

τότε

$$P_n(z) = 1 \quad (\text{αφού από την (20) έχουμε } P_n(z) = \frac{T_n(z)}{T_n(z)} = 1)$$

και

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P_n(x)| = 1 / T_n(z) \quad (\text{Θέτοντας } x=1 \text{ στην (21) αφού } \max_{-1 \leq x \leq 1} |P_n(x)| = \frac{\max_{-1 \leq x \leq 1} T_n(x)}{T_n(z)} = \frac{1}{T_n(z)})$$

Πηλίκου, αν $Q(x)$ είναι οποιοδήποτε πολυώνυμο βαθμού n ή μικρότερου τέτοιο ώστε $Q(z) = 1$ και

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |Q(x)| \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |P_n(x)|$$

τότε

$$Q(x) \equiv P_n(x).$$

Αποδεικνύεται με τη βοήθεια της αναδρομικής σχέσης των πολυωνύμων Chebyshev που δίνεται από την (6) ^{και από την (21)} σε η γενική της υφιεπαναληπτικής μεθόδου είναι η εξής:

$$V^{(n+1)} = \rho_{n+1} \left[\bar{\rho} (G v^{(n)} + k) + (1 - \bar{\rho}) v^{(n)} \right] + (1 - \rho_{n+1}) v^{(n-1)} \quad (22)$$

όπου

$$\bar{\rho} = \frac{2}{2 - (a + b)}$$

$$\rho_1 = 1, \quad \rho_2 = \left(1 - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^{-1}$$

$$\rho_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{4} \sigma^2 \rho_n \right)^{-1}, \quad n \geq 2$$

$$\sigma = \frac{b - a}{2 - (b + a)}$$

Σχόλια:

- Το επαναληπτικό σχήμα (22) λαμβάνεται ως συνδυασμός 2 φασών επιταχυνούς της (8). Αρχικά, θεωρούμε την JOR ειδοχή που εφαρμόζουμε στην (8), η οποία ορίζεται από

$$v^{(n+1)} = \bar{\rho} (G v^{(n)} + k) + (1 - \bar{\rho}) v^{(n)} \quad (22')$$
 και ως συνέχεια για περαιτέρω επιτάχυνση εφαρμόζουμε Chebyshev SI (22'), δηλ να πάρουμε την (22).
- Αφού $a \leq \lambda_i \leq b < 1$, δεν είναι βεβαιο ότι το επαναληπτικό σχήμα που δίνεται από την (8) θα συγκλίνει.

Από την (22) φαίνεται ότι δεν είναι απαραίτητη η γνώση του $u^{(n)}$ για τον προσδιορισμό του $v^{(n)}$.

Η εφαρμογή της ημι-επαναληπτικής διαδικασίας (22), μπορεί συχνά (όχι πάντα) να δώσει αύξηση στην ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου κατά μία τάξη μεγέθους.

Αλγόριθμος

-98-

0. Διαβάσε ϵ , $\maxiter$

$$1. \sigma = \frac{b-a}{2-(b+a)}, \quad \bar{\rho} = \frac{2}{2-(a+b)}$$

2. $v^{(0)}$ = κάποια αρχική προσέγγιση

$$3. v^{(1)} = \bar{\rho} (G v^{(0)} + k) + (1 - \bar{\rho}) v^{(0)}$$

$$4. \rho_2 = \left(1 - \frac{1}{2} \sigma^2\right)^{-1}, \quad \rho_1 = 1$$

$$5. n = 1$$

$$6. v^{(2)} = \rho_2 \left(\bar{\rho} (G v^{(1)} + k) + (1 - \bar{\rho}) v^{(1)} \right) + (1 - \rho_2) v^{(0)}$$

7. Επανάλαβε

$$n = n + 1$$

$$\rho_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{4} \sigma^2\right)^{-1}$$

$$v^{(n+1)} = \rho_{n+1} \left(\bar{\rho} (G v^{(n)} + k) + (1 - \bar{\rho}) v^{(n)} \right) + (1 - \rho_{n+1}) v^{(n-1)}$$

όσο ισχύει ($n < \maxiter$) και $\|v^{(n+1)} - v^{(n)}\| \geq \epsilon$

8. Αν $n < \maxiter$ τερμάσε τη λύση $v^{(n+1)}$

διαφορετικά

τερμάσε όχι ευτυχώς μετά από $\maxiter$ επαναλήψεις.

Σε ότι αφορά τη σύγκλιση της υπεραναλυτικής μεθόδου αποδεικνύεται ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \rho_\infty = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \sigma^2}} \quad (19')$$

η οποία είναι η ίδια έκφραση που βρίσκουμε για τη βέλτιστη παράμετρο της SOR μεθόδου.
Η φασματική ανάλυση της υπεραναλυτικής μεθόδου είναι

$$S(P_n(G)) = \max_{\alpha \in \lambda \in \beta} \rho_n(\alpha) = 1/T_n(z)$$

όπου λόγω της (21) είναι ότι

$$T_n(z) = \frac{1 + \tau^n}{2\tau^{n/2}}$$

$$\text{όπου } \tau = \frac{1 - \sqrt{1 - \sigma^2}}{1 + \sqrt{1 - \sigma^2}} \quad (19)$$

$$\text{Άρα } S(P_n(G)) = \frac{2\tau^{n/2}}{1 + \tau^n}. \quad (20)$$

Συνεπώς η μέση ταχύτητα σύγκλισης της υπεραναλυτικής μεθόδου είναι η:

$$\begin{aligned} R_n(P_n(G)) &= -\frac{1}{n} \log S(P_n(G)) = -\frac{1}{n} \log \frac{2\tau^{n/2}}{1 + \tau^n} = -\frac{1}{n} \log \left(\tau^{n/2} \cdot \frac{2}{1 + \tau^n} \right) = \\ &= -\frac{1}{n} \log \tau^{n/2} - \frac{1}{n} \log \left(\frac{2}{1 + \tau^n} \right) = -\frac{1}{n} \frac{n}{2} \log \tau - \frac{1}{n} \log \frac{2}{1 + \tau^n} = \\ &= -\frac{1}{2} \log \tau - \frac{1}{n} \log \left(\frac{2}{1 + \tau^n} \right) \quad (21) \end{aligned}$$

και η ασυμπτωτική ταχύτητα σύγκλισης είναι η

$$R_\infty(P_n(G)) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(G) = -\frac{1}{2} \log \tau. \quad (22)$$