

Doolittle LU Decomposition

$$A = LU$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Croat LU Decomposition

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Διαφορές

Doolittle	Croat
1. Θέτει $l_{ii} = 1$.	1. Θέτει $u_{ii} = 1$.
2. Υπολογίζει πρώτα τα στοιχεία u_{ij} του U για κάθε γραμμή i και $j \geq i$.	2. Υπολογίζει τα στοιχεία l_{ij} της γραμμής του L για κάθε γραμμή ξεκινώντας από την 1η, δηλ. για κάθε γραμμή i και $j \leq i$.
3. Υπολογίζει τα στοιχεία l_{ij} για κάθε γραμμή i και $j < i$.	3. Υπολογίζει τα στοιχεία u_{ij} του U για κάθε γραμμή i και $j > i$.

Dolittle Methodos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix}$$

Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Από τη Γραμμή 1: $u_{11}=2, u_{12}=4, u_{13}=-6$

Από τη στήλη 1: $l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{1}{2}, l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{1}{2}$

Από τη Γραμμή 2: $u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 3$

$u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = 6$

Από τη Στήλη 2: $l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} = \frac{1}{3}$

Από τη Γραμμή 3: $u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 3$

$$A = LU$$

οπότε.

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}^A = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}}^L \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}^U$$

$$Ax = b \Leftrightarrow L \underbrace{Ux}_y = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

Λύση του $Ly = b$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

Με προς τα εμπρός αντικατάσταση έχουμε:

$$y_1 = -4$$

$$\frac{1}{2}y_1 + y_2 = 10 \Rightarrow y_2 = \frac{10 - \frac{1}{2}(-4)}{1} \Rightarrow y_2 = 12$$

$$\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + y_3 = 5 \Rightarrow y_3 = \frac{5 - \frac{1}{2}(-4) - \frac{1}{3} \cdot 12}{1} \Rightarrow y_3 = 3$$

$$\text{Άρα } (y_1 \ y_2 \ y_3)^T = (-4 \ 12 \ 3)^T$$

Λύση του $Ux = y$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$

Με προς τα πίσω αντικατάσταση έχουμε:

$$x_3 = 1, \quad x_2 = \frac{12 - 6 \cdot 1}{3} = 2, \quad x_1 = \frac{-4 + 6 \cdot 1 - 4 \cdot 2}{2} = -3$$

Άρα, λύση του συστήματος:

$$(x_1 \ x_2 \ x_3)^T = (-3 \ 2 \ 1)^T$$

CROUT Methodos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} l_{11} & l_{11} u_{12} & l_{11} u_{13} \\ l_{21} & l_{21} u_{12} + l_{22} & l_{21} u_{13} + l_{22} u_{23} \\ l_{31} & l_{31} u_{12} + l_{32} & l_{31} u_{13} + l_{32} u_{23} + l_{33} \end{pmatrix}$$

Εδώ το σύστημα $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Από τη γραμμή 1 : $l_{11} = 2, l_{21} = 1, l_{31} = 1$.

Από τη γραμμή 1 : $u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = 2, u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = -3$

Από τη γραμμή 2 : $l_{22} = a_{22} - l_{21} u_{12} = 3, l_{32} = a_{32} - l_{31} u_{12} = 1$

Από τη γραμμή 2 : $u_{23} = \frac{a_{23} - l_{21} u_{13}}{l_{22}} = 2$

Από τη γραμμή 3 : $l_{33} = a_{33} - l_{31} u_{13} + l_{32} u_{23} = 3$.

- 5 -

$A = LU$

οπότε

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Λύση του $Ly=b$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

Με προς τα εμπρός αντικατάσταση

$$y_1 = -2, \quad y_2 = \frac{10 - 1(-2)}{3} = 4, \quad y_3 = \frac{5 - 1(-2) - 1(4)}{3} = 1$$

Άρα $(y_1 \ y_2 \ y_3)^T = (-2 \ 4 \ 1)^T$

Λύση του $Ux=y$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Με προς τα πίσω αντικατάσταση

$$x_3 = 1, \quad x_2 = \frac{4 - 2 \cdot 1}{1} = 2, \quad x_1 = \frac{-2 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2}{1} = -3$$

Άρα, λύση του συστήματος

$$(x_1 \ x_2 \ x_3)^T = (-3 \ 2 \ 1)^T$$
