

Κεφάλαιο 2

Άμεσοι μέθοδοι για την επίλυση γραμμικών συστημάτων

2.1 Πίνακες

Πίνακας $A = (a_{ij})$ διάστασης $m \times n$ λέγεται μια ορθογώνια διάταξη (διευθέτηση) $m \times n$ στοιχείων σε m γραμμές και n στήλες.

- Ειδικές μορφές Πινάκων

- ▷ Αραιός: λέγεται ένας πίνακας όταν ένα σημαντικό ποσοστό των στοιχείων του (συνήθως $> 80\%$) είναι μηδενικά.
- ▷ Πυκνός: είναι ένας πίνακας που δεν είναι αραιός.

- Διαγώνιοι πίνακες

- Διαγώνιος : $a_{ij} = 0$ για $i \neq j$

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & 0 \\ & & d_3 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & d_n \end{bmatrix}$$

- Μοναδιαίος : $a_{ii} = 1$ για $i = j$ και $a_{ij} = 0$ για $i \neq j$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- Τριγωνικοί πίνακες

- Κάτω τριγωνικός : $l_{ij} = 0$ για $i < j$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

– Άνω τριγωνικός : $u_{ij} = 0$ για $i > j$

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

• Πίνακες δέσμης ή ταινιωτοί

Πίνακας δέσμης λέγεται ένας $n \times n$ πίνακας όταν $a_{ij} = 0$ για κάθε i, j με $i - j > p$ ή $j - i > q$, όπου $1 \leq p, q \leq n - 1$. Η ποσότητα $w = p + q + 1$ λέγεται πλάτος (ή εύρος) της δέσμης.

– Τριδιαγώνιος λέγεται ένας πίνακας αν $p = q = 1$, οπότε είναι της μορφής

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ή πιο απλά

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & d_2 & c_2 & & \\ & a_3 & d_3 & c_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & a_{n-1} & d_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & d_n \end{bmatrix}$$

– Πενταδιαγώνιος λέγεται ένας πίνακας αν $p = q = 2$, οπότε είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} d_1 & e_1 & f_1 & & & & \\ b_2 & d_2 & e_2 & f_2 & & & \\ a_3 & b_3 & d_3 & e_3 & f_3 & & 0 \\ & a_4 & b_4 & d_4 & e_4 & f_4 & \\ & & a_5 & b_5 & d_5 & e_5 & f_5 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & a_{n-2} & b_{n-2} & d_{n-2} & e_{n-2} & f_{n-2} \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & d_{n-1} & e_{n-1} \\ & & & & & a_n & b_n & d_n \end{bmatrix}$$

– Άλλες ειδικές μορφές

* ειδική μορφή πενταδιαγώνιου

$$\begin{bmatrix} d_1 & e_1 & f_1 & & & & \\ 0 & d_2 & e_2 & f_2 & & & \\ a_3 & 0 & d_3 & e_3 & f_3 & & 0 \\ & a_4 & 0 & d_4 & e_4 & f_4 & \\ & & a_5 & 0 & d_5 & e_5 & f_5 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & a_{n-2} & 0 & d_{n-2} & e_{n-2} & f_{n-2} \\ & & & & a_{n-1} & 0 & d_{n-1} & e_{n-1} \\ & & & & & a_n & 0 & d_n \end{bmatrix}$$

* μορφή W

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & & & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & 0 & & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{\ell 1} & a_{\ell 2} & a_{\ell 3} & \cdots & a_{\ell \ell} & \cdots & a_{\ell,n-2} & a_{\ell,n-1} & a_{\ell,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & & & & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & & 0 & & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & & & & & & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

* μορφή Z

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & \\ & & a_{33} & \cdots & a_{3,n-2} & & \\ & & & \ddots & \vdots & & 0 \\ & & & & a_{n-2,3} & \cdots & a_{n-2,n-2} \\ & & & & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

• Βασικοί ορισμοί Πινάκων

- Ορισμός 1: Έστω A ένας $n \times n$ πραγματικός πίνακας. Αν υπάρχει ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας B , τέτοιος ώστε να ισχύει $AB = BA = I_n$, τότε ο A λέγεται **αντιστρέψιμος** ή **μη ιδιάζων** πίνακας και ο B είναι αντίστροφος του A . Συμβολ. $B = A^{-1}$.
- Ορισμός 2: Ένας $n \times n$ πραγματικός πίνακας A λέγεται **συμμετρικός** όταν ισχύει $A^T = A$.
- Ορισμός 3: Ένας $n \times n$ πραγματικός πίνακας A λέγεται **ορθογώνιος** όταν ισχύει $A^T \cdot A = I_n$. Τότε είναι $A^{-1} = A^T$.
- Ορισμός 4: Ένας $n \times n$ μιγαδικός πίνακας A λέγεται **μοναδιακός** (Unitary) όταν ισχύει $A^H A = A A^H = I$, όπου $A^H = \bar{A}^T$ είναι ο συζυγής ανάστροφος του A .
- Ορισμός 5: Ένας $n \times n$ μιγαδικός πίνακας A λέγεται **Hermitian** όταν ισχύει $A^H = A$.
- Ορισμός 6: Ένας $n \times n$ μιγαδικός πίνακας A λέγεται **κανονικός** (normal) όταν ισχύει $A^H \cdot A = A \cdot A^H$.

- Ορισμός 7: Ένας $n \times n$ μιγαδικός πίνακας A λέγεται θετικά ορισμένος (positive definite) όταν ισχύει $x^H A x > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

- Αριθμητική Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

$$Ax = b$$

όπου ο $n \times n$ πίνακας A είναι μη ιδιάζων (ή αντιστρέψιμος) και x, b διανύσματα διάστασης $n \times 1$.

- Άμεσοι (ή απευθείας) μέθοδοι
- Επαναληπτικές μέθοδοι

- Άμεσοι μέθοδοι

Με απαλοιφή

1. Gauss(GE)

2. Gauss-Jordan(GJ)

3. Huard(HU)

Με παραγοντοποίηση

1. LU

2. WZ

Μεταθετικοί Πίνακες

Για την εφαρμογή της οδήγησης χρειάζεται η δυνατότητα εναλλαγής των γραμμών και των στηλών ενός πίνακα. Αυτό επιτυγχάνεται με τους λεγόμενους μεταθετικούς πίνακες που προκύπτουν με ανακατανομή των στηλών του ταυτοτικού. Για παράδειγμα

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός παριστάνεται με το αμέριστο διάνυσμα $p^T = (4 \ 1 \ 3 \ 2)$ που δηλώνει τις θέσεις όπου υπάρχουν μονάδες στον P .

Η επίδραση του P σε έναν πίνακα A επιφέρει το ακόλουθο αποτέλεσμα

$P A \rightarrow$ αλλαγή γραμμών του A

$A P \rightarrow$ αλλαγή στηλών του A

Συγκεκριμένα, αν $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, η εξ αριστερών επίδραση του

στον A μεταθέτει την $1^{\text{η}}$ και την $4^{\text{η}}$ γραμμή του A , ενώ η εκ δεξιών επίδραση του στον A μεταθέτει την $1^{\text{η}}$ και την $4^{\text{η}}$ στήλη του A .

Παρατηρήσεις:

- Ο πίνακας P είναι ορθογώνιος $\Rightarrow P^{-1} = P^T$
- Όταν απαιτείται η εναλλαγή μόνο 2 γραμμών, ο πίνακας P είναι επιπρόσθετα και συμμετρικός
- Το γινόμενο δύο μεταθετικών πινάκων είναι μεταθετικός πίνακας και άρα ορθογώνιος
- Σε μια αλλαγή γραμμών δεν περιέχεται βρόχος εγχώρησης
- Αν x διάνυσμα το οποίο θέλουμε να επιμελήσουμε από το Px , αυτό υλοποιείται με την κατά βυθιταχμένη αντιστάθμιση $x(k) = x(P(k))$, $k=1, 2, \dots, n$

Μεταθετικοί Πίνακες

Ορισμός: Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας και π μία μετάθεση των στοιχείων του συνόλου $W = \{1, 2, \dots, n\}$ που δίνεται ως εξής

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \end{pmatrix}$$

τότε ορίζεται ο μεταθετικός πίνακας

$$P_\pi = \begin{bmatrix} e_{\pi_1} \\ e_{\pi_2} \\ \vdots \\ e_{\pi_n} \end{bmatrix}$$

όπου e_j συμβολίζει το n -διάστατο βασικό διάνυσμα-γραμμή (του οποίου όλες οι συντεταγμένες είναι 0, εκτός από την j που είναι 1).

Παράδειγμα

Έστω $n = 3$ και η μετάθεση π του $W = \{1, 2, 3\}$ που δίνεται ως εξής

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi_1 = 3 & \pi_2 = 1 & \pi_3 = 2 \end{pmatrix}$$

τότε σχηματίζεται ο μεταθετικός πίνακας P_π ως ακολούθως:

$$P_\pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

τότε έχουμε

$$P_\pi \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

και

$$A \cdot P_\pi = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση: Αν ένας πίνακας A πολλαπλασιάζεται από αριστερά με ένα μεταθετικό πίνακα P_π τότε αντιμεταθέτει τις γραμμές του, ενώ αν πολλαπλασιάζεται από δεξιά αντιμεταθέτει τις στήλες του.