ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΨΗΦΙΑΚΕΣ & ΑΝΑΛΟΓΙΚΕΣ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ

Τα παραδείγματα που περιέχονται στο file αυτό έχουν επιλεγεί για τους μεταπτυχιακούς φοιτητές του ΡΗ που παρακολουθούν το μάθημα Ψηφιακές και Αναλογικές Επικοινωνίες. Έχει καταβληθεί κάθε προσπάθεια να μην υπάρξουν αβλεψίες στην επίλυση των παραδειγμάτων, αλλά είμαστε σίγουροι ότι κάποια μικρολάθη έχουν ξεφύγει. Παρακαλούμε τους αναγνώστες για όποιο σημείο αμφιβάλουν να επικοινωνούν με τον διδάσκοντα, στο μάθημα ή με e_mail (sagri@di.uoa.gr). Με τον τρόπο αυτό θα συμβάλουν στην τελειοποίηση των ασκήσεων αυτών.

Παράδειγμα 1 (Προβ 6.6)

Μία πηγή πληροφορίας μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια διαδικασία περιορισμένου εύρους-ζώνης 6000 Hz. Η διαδικασία αυτή δειγματοληπτείται με ρυθμό μεγαλύτερο από του Nyquist ώστε να δημιουργηθεί ζώνη προστασίας 2000 Hz. Παρατηρείται ότι οι τιμές των δειγμάτων που προκύπτουν ανήκουν στο σύνολο $\mathscr{A}=\{-4, -3, -1, 2, 4, 7\}$ με αντίστοιχες πιθανότητες $\{0.2, 0.1, 0.15, 0.05, 0.3, 0.2\}$. Πόση είναι η εντροπία της πηγής διακριτού χρόνου σε bits/έξοδο (δείγμα); Ποια είναι η εντροπία σε bits/sec;

Λύση

Η εντροπία της πηγής είναι

$$H(X) = -\sum_{i=1} p_i \log_2 p_i = 2.4087 \quad \text{bits/symbol}$$

Ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι

$$f_s = 2000 + 2 \cdot 6000 = 14000 \quad \text{Hz}$$

Η Εντροπία της πηγής σε bits/sec είναι:

$$H(X) = 2.4087 \times 14000 \ \text{(bits/symbol)} \times \text{(symbols/sec)} = 33721.8 \ \text{bits/second}$$

Παράδειγμα 2 (Προβ 6.22)

Μία πηγή έχει αλφάβητο $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ με αντίστοιχες πιθανότητες $\{0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4\}$.

1. Βρείτε την εντροπία της πηγής.

2. Πόσο είναι το ελάχιστο μέσο μήκος κωδικής λέξης που απαιτείται για να αναπαρασταθεί η πηγή αυτή με δυνατότητα ανακατασκευής χωρίς σφάλμα;

3. Σχεδιάστε έναν κώδικα Huffman για την πηγή και συγκρίνετε το μέσο μήκος της κωδικής του λέξης με την εντροπία της πηγής.

4. Σχεδιάστε έναν κώδικα Huffman για τη δεύτερη επέκταση της πηγής (λάβετε δύο γράμματα κάθε φορά). Ποιο είναι το μέσο μήκος λέξης του κώδικα; Ποιος είναι ο απαιτούμενος μέσος αριθμός bits/γράμμα εξόδου της πηγής;

5. Ποιο είναι το αποτελεσματικότερο σχήμα κωδικοποίησης; Η κωδικοποίηση Huffman της αρχικής πηγής ή η κωδικοποίηση Huffman για τη δεύτερη επέκταση της πηγής;

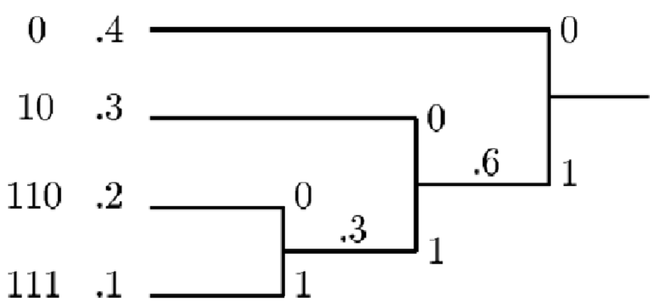
Λύση

1.2. Υπολογισμός Εντροπίας Πηγής - Ελάχιστου Ρυθμού του Κώδικα:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{4} p(a_i)\log_2 p(a_i) = 1.8464 \quad \text{bits/output}$$

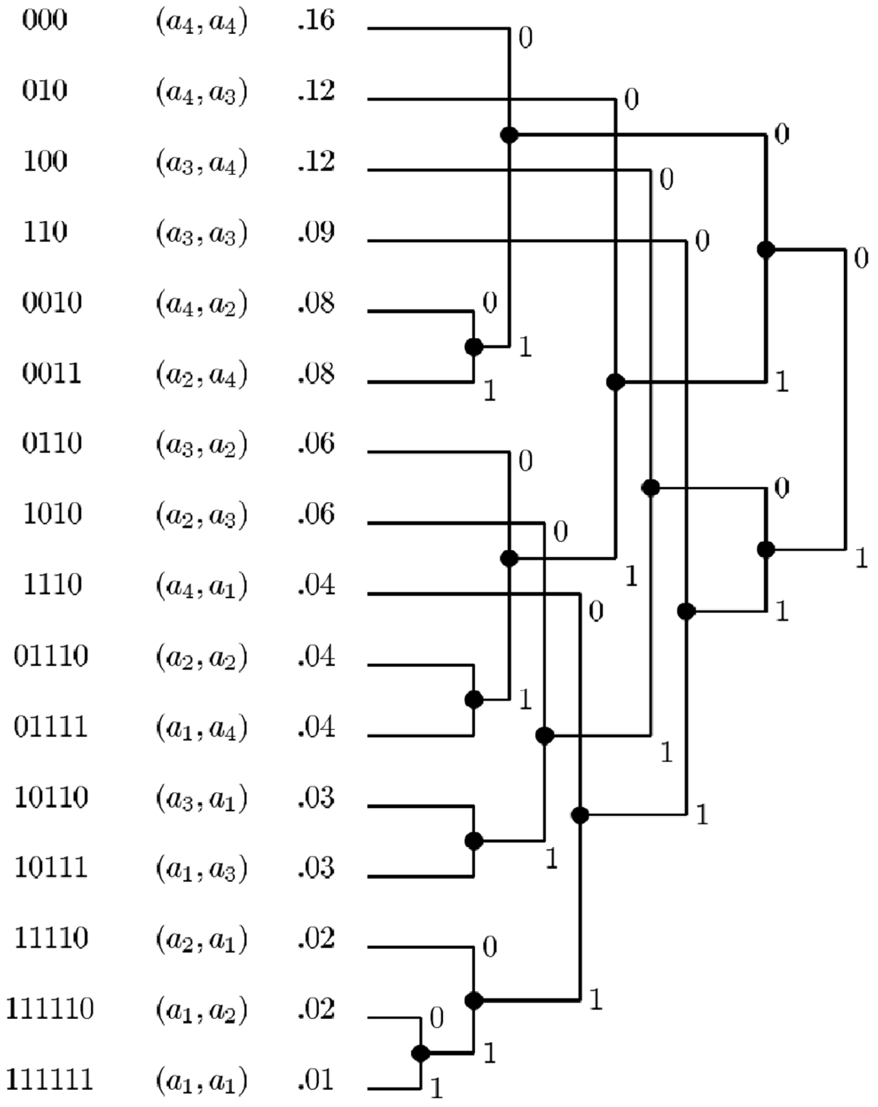
3. Αλγόριθμος Huffman - Ρυθμός Κωδικοποιητή

$$\bar{R}(X) = 3\times(.2+.1) + 2\times .3 + .4 = 1.9$$



4. $2^η$ Επέκταση Πηγής:

$$\mathcal{A}^2 = \{(a_1,a_1),(a_1,a_2),\ldots(a_4,a_4)\}$$ P(α$_i$, α$_j$)=P(α$_i$)P(α$_j$)



$$\bar{R}_2(X) = 3 \times .49 + 4 \times .32 + 5 \times .16 + 6 \times .03 = 3.7300$$

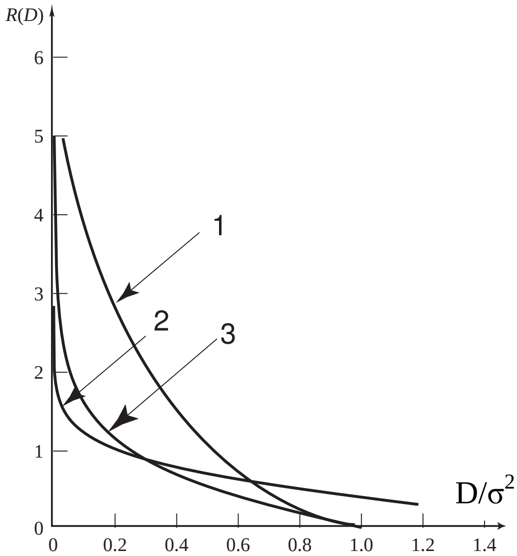
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

$$R(D) = \begin{cases} \frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{D} & 0 \le D \le \sigma^2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad 2 = \log\frac{1}{D} \Longrightarrow D = 2^{-2} = 0.25$$

Για D=0.01

$$R = \frac{1}{2}\log\frac{1}{0.01} = \frac{1}{2}\log 100 = 3.322 \text{ bits/sample}$$

Παράδειγμα 2A

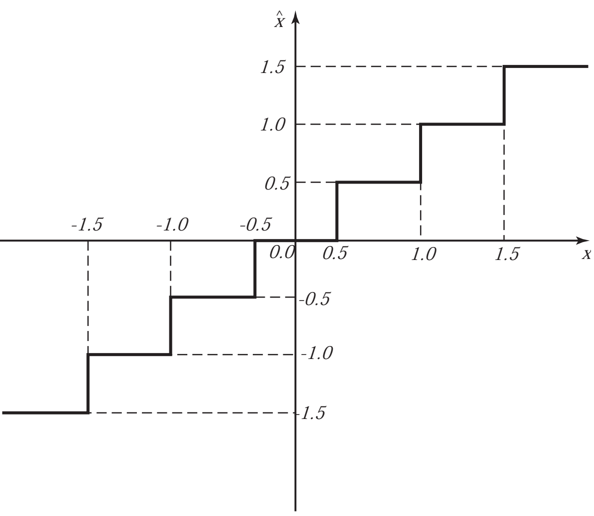


Οι τρεις καμπύλες του πιο πάνω διαγράμματος αντιστοιχούν στην λειτουργία ενός κβαντιστή που λειτουργεί με τις επιδόσεις του Shannon (A), ενός κβαντιστή που λειτουργεί σε ένα πραγματικό σύστημα (B) και υπάρχει και μια καμπύλη άσχετη με το πρόβλημα της κβάντισης (C). Αντιστοιχίστε τα A, B, C με τα 1,2,3 και εξηγείστε πώς καταλήξατε στην απάντησή σας.

Λύση

Η καμπύλη 2 είναι άσχετη με το πρόβλημα της κβάντισης (C) αφού απαιτεί ρυθμό κωδικοποίησης μεγαλύτερο από 0 bits/sec για $D/\sigma^2>1$.
Η καμπύλη 3 πρέπει να αντιστοιχεί στον Κβαντιστή Shannon (A) αφού για την ίδια παραμόρφωση απαιτεί μικρότερο ρυθμό κωδικοποίησης από την 1.
Τέλος η 1 αντιστοιχεί στην B.

Παραδειγμα 2β'



2.a) Αν χρησιμοποιήσετε τον κβαντιστή του πιο κάτω σχήματος να δώσετε την κβαντισμένη ακολουθία $\{\hat{x}_n\}$ και την ακολουθία των σφαλμάτων κβάντισης $\{\delta_n\}$ για την ακολουθία δειγμάτων $\{x_n\}$=-1.2, -0.7,-1.6, 0.9,1.9,0.4.

2.b) Υπολογίστε την παραμόρφωση κβάντισης D για ένα σήμα με ομοιόμορφο PDF στο διάστημα [-2,2] που θα χρησιμοποιήσει για κβάντιση τον κβαντιστή του διπλανού Σχήματος.

Απάντηση

a)

$\{x_n\}$	-1.2	-0.7	-1.6	0.9	1.9	0.4	
$\{\hat{x}_n\}$	-1.0	-0.5	-1.5	0.5	1.5	0.0	
$\{\delta_n\}$	-0.2	-0.2	-0.1	0.4	0.4	0.4	

b)

$D=\sum_{i=1}^{N}\int_{a_{i-1}}^{a_i}\left(x-\hat{x}_i\right)^2 f_X\left(x\right)dx$ όπου $f_X\left(x\right)=\begin{cases}1/4 & -2\le x\le 2\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$ και τα α_ι για i=1,2,…,N-1 και $\hat{x}_i$ για i=1,2,…,N-1 προσδιορίζονται από το διάγραμμα του κβαντιστή και α_o=-∞ και α_N=+∞ . Έτσι με αντικατάσταση προκύπτει:

$$D=\frac{1}{4}\left[\int_{-2.0}^{-1.5}\left(x+1.5\right)^2 dx+\int_{-1.5}^{-1.0}\left(x+1.0\right)^2 dx+\int_{-1.0}^{-0.5}\left(x+0.5\right)^2 dx+\int_{-0.5}^{0.5}x^2dx+\int_{0.5}^{1}\left(x-0.5\right)^2 dx+\int_{1}^{1.5}\left(x-1\right)^2 dx+\int_{1.5}^{2}\left(x-1.5\right)^2 dx\right]$$

Αν σε κάθε ένα από τα 3 πρώτα και τα τρία τελευταία ολοκληρώματα των αθροισμάτων τεθεί x- $\hat{x}$ =y➔

$$D=\frac{1}{4}\left[\int_{-0.5}^{0}y^2dy+\int_{-0.5}^{0}y^2dy+\int_{-0.5}^{0}y^2dy+\int_{-0.5}^{0.5}x^2dx+\int_{-0.5}^{0}y^2dy+\int_{-0.5}^{0}y^2dy+\int_{-0.5}^{0}y^2dy\right]=\frac{1}{4}\left[8\int_{-0.5}^{0}y^2dy\right]=\frac{1}{12}$$

D=0.085 Watt

Παράδειγμα 3

Διαθέτουμε ασύρματο κανάλι με απόσβεση L=40 dB και φασματική πυκνότητα θορύβου $N_0/2=10^{-8}$ Watt/Hz. Το σήμα βασικής ζώνης $m(t)$ που διαβιβάζουμε έχει P_{mn}=1/6, εύρο ζώνης W=10 KHz και επιθυμούμε στην έξοδο του δέκτη να έχει ποιότητα $(\mathrm{SNR})_0$=48 dB. Να υπολογίσετε την ισχύ εκπομπής και το εύρος ζώνης που απαιτούν κάθε ένα από τα συστήματα DSB, SSB και FM.β_f=7. Για το FM να διερευνήσετε αν ο δείκτης διαμόρφωσης ξεπερνά αυτόν που επιβάλλει το κατώφλι του FM.

Απάντηση

$$(S/N)_{o\mathrm{dB}} = 48\,\mathrm{dB} \Rightarrow (S/N)_o = 10^{4.8} \Rightarrow (S/N)_o = 63100$$

1. DSB

$$(S/N)_o = (S/N)_b = (P_R/N_0W) \Rightarrow P_R = (S/N)_o N_0W \Rightarrow P_R = 63100\times 2\times 10^{-8}\times 10^4 = 12.62\ \mathrm{Watt}$$

➔P_R=12.62 Watt➔P_T=LP_R =10^4 12.62 Watt➔ **P_T =126200 Watt**.

B_c=2W➔ **B_c=2 10^4 Hz**.

2. SSB

$$(S/N)_o = (S/N)_b = (P_R/N_0W) \Rightarrow P_R = (S/N)_o N_0W \Rightarrow P_R = 63100\times 2\times 10^{-8}\times 10^4 = 12.62\ \mathrm{Watt}$$

➔P_R=12.62 Watt➔P_T=LP_R =10^4 12.62 Watt➔ **P_T =126200 Watt**.

B_c=W➔ **B_c=10^4 Hz**.

3. FM

$$(S/N)_o = 3\beta_f^2 P_{mn}(S/N)_b \Rightarrow (S/N)_o = 3\beta_f^2 P_{mn}(P_R/N_0W)_b \Rightarrow P_R = (S/N)_o N_0W/3\beta_f^2 P_{mn} \Rightarrow$$

$$P_R = 63100\times 2\times 10^{-8}\times 10^4/(3\times 49\times 1/6) = 0.52\ \mathrm{Watt} \Rightarrow \mathbf{P_T = 5200\ Watt}$$

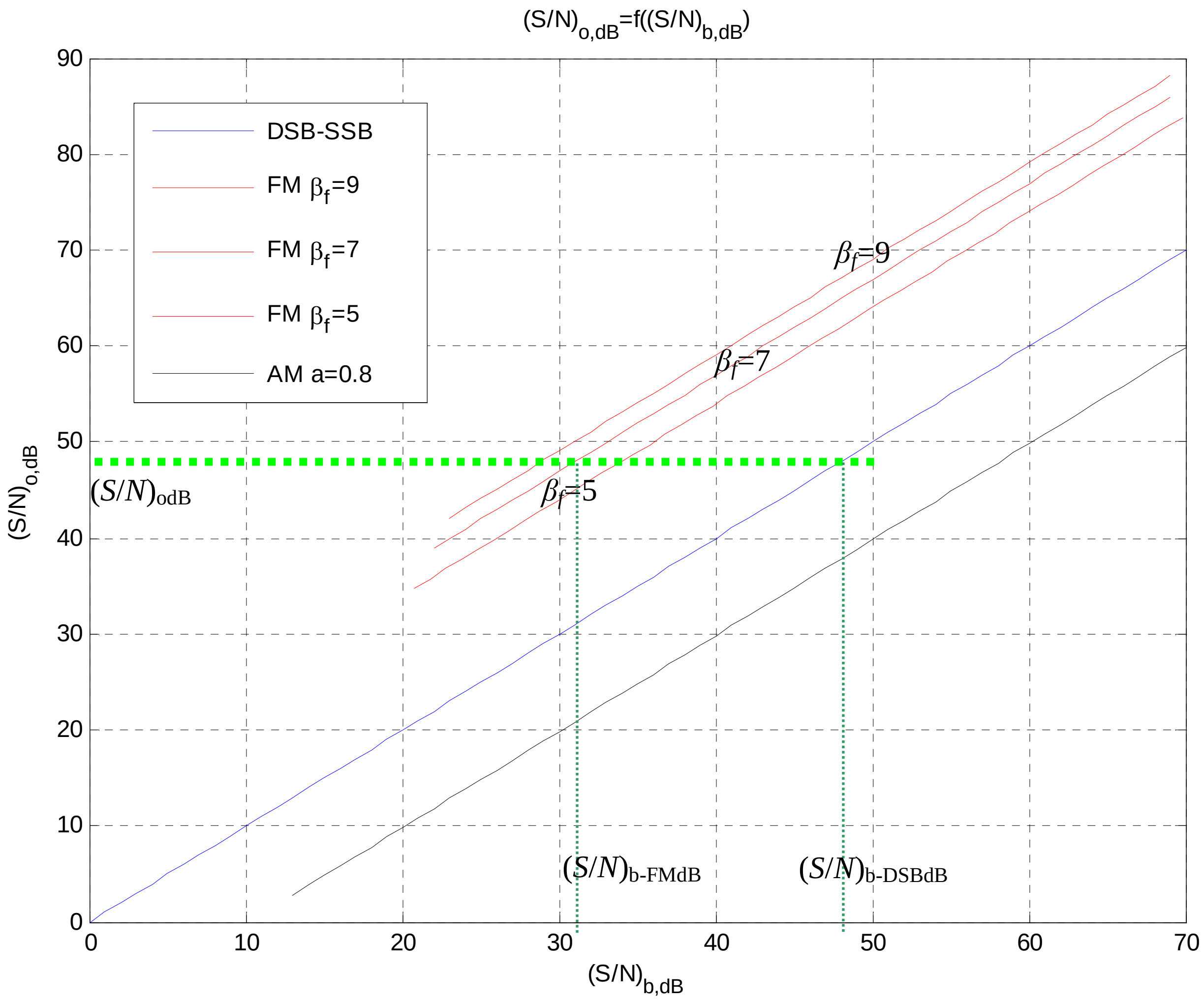
Για το κατώφλι:

$$(S/N)_o > 60\beta_f^3 P_{mn} \Rightarrow \beta_f < \sqrt[3]{\frac{(S/N)_o}{60P_{mn}}} \Rightarrow \beta_f < \sqrt[3]{\frac{63100}{60\times 1/6}} \Rightarrow \beta_f < 18.5$$ ➔Η τιμή του β_f που χρησιμοποιήσαμε, είναι πολύ μικρότερη από την επιτρεπόμενη.

B_c=2W(β_f+1)=2×10000×8=160000➔ **$\mathrm{B_c}$=160000** Hz

Παράδειγμα 4

Να επαναλάβετε τη λύση του προηγούμενου προβλήματος (χωρίς τον υπολογισμό του εύρους ζώνης) χρησιμοποιώντας το σμήνος των χαρακτηριστικών σύγκρισης αναλογικών συστημάτων. (Παρατίθεται στη συνέχεια)



Απάντηση

Από το πιο πάνω διάγραμμα προκύπτει:

1. Για FM

$(S/N)_{b\text{-FMdB}}$=31 dB➔ $P_R = (S/N)_{b-FM}\, N_0 W$ ➔ $P_R = 10^{3.1} \times 2 \times 10^{-8} \times 10^4 = 0.252$ Watt

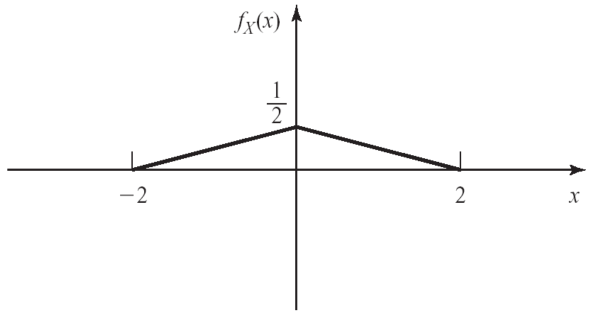
P_R=0,252 Watt.==>P_T=2520 Watt.

2. Για DSB & SSB

$(S/N)_{b\text{-DSBdB}}$=48 dB➔$(S/N)_{b\text{-DSB}}=10^{4.8}$=63100➔ $P_R = 63100 \times 2 \times 10^{-8} \times 10^4 = 12.62$ Watt ➔ P_T=126200 Watt

Παράδειγμα 5

Ένα σήμα μπορεί να θεωρηθεί ως μία στατική χαμηλοπερατή διαδικασία $X(t)$ της οποίας το PDF σε οποιοδήποτε χρονική στιγμή t_0 δίνεται στο Σχήμα Π-6.53. Το εύρος-ζώνης αυτής της διαδικασίας είναι 5 KHz και επιθυμούμε να τη διαβιβάσουμε με ποιότητα στον προορισμό (έξοδο του δέκτη) $(S/N)_o$= 45 dB. Να υπολογίσετε την ισχύ P_R στην είσοδο του δέκτη και το απαιτούμενο εύρος-ζώνης B_C για τη διαβίβαση του σήματος X(t), για το κάθε ένα από τα πιο κάτω Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα.



Σχήμα Π-6.53

Α) Τηλεφωνία Βασικής Ζώνης.
Β) DSB-SC
Γ) Συμβατικό ΑΜ με α=1.
Δ) PCM/B-PSK

Το κανάλι που θα χρησιμοποιηθεί είναι ένα AWGN με πυκνότητα θορύβου $N_0/2=10^{-10}$ Watt/Hz.

ΛΥΣΗ

Α) **<u>ΣΤΗ ΒΑΣΙΚΗ ΖΩΝΗ</u>**

$B_C=W=$5 KHz

$(S/N)_o=P_R/(N_0W)$ ή $P_R=(S/N)_o(N_0W)=10^{4.5}(5^x10^{3x}2^x10^{-10})$ ή $P_R=32^x10^{-3}$ Watt.

Β) **<u>DSB</u>**

$B_C=2W=$10 KHz, ➔ $B_C=$10 KHz

$(S/N)_o=P_R/(N_0W)$ ή $P_R=(S/N)_o(N_0W)=10^{4.5}(5^x10^{3x}2^x10^{-10})$

ή $P_R=32^x10^{-3}$ Watt.

Γ) **<u>Συμβ. ΑΜ</u>**

$B_C=2W=$10 KHz, ➔ $B_C=$10 KHz.

$P_{mn}=\sigma_x^2/(x_{max})^2$

$$\sigma_x^2=\int_{-2}^{2}(x-\mu_x)^2 f_x(x)dx=\int_{-2}^{2}x^2 f_x(x)dx=2\int_0^2 x^2 f_x(x)dx=2\int_0^2 x^2(1/2-x/4)dx$$

$$\sigma_x^2=2\left[\left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2-\left.\frac{x^4}{16}\right|_0^2\right]=2\left[\frac{8}{6}-\frac{16}{16}\right]=\frac{4}{6}$$

Δηλαδή $P_{mn}=(4/6)/2^2 \Rightarrow P_{mn}=1/6$

$(S/N)_o=[\alpha^2 P_{mn}/(1+\alpha^2 P_{mn})][P_R/(N_0 W)]$ ή

$P_R=(S/N)_o\,(N_0 W)\,(1+\alpha^2 P_{mn})/\alpha^2 P_{mn} \Rightarrow$

$P_R=10^{4.2}(5\times10^{3}\times2\times10^{-10})(1+1/6)6$ ή $P_R=7\times32\times10^{-3}$ Watt $\Rightarrow$.

$P_R=224\times10^{-3}$ Watt.

Δ) **PCM/B-PSK**

Από την (6.6.5)

$(SNR)_{db}=P_{mn}|_{dB}+6v+4.8$ ή 45 dB=-7.8 dB +6v+4.8 ή **v=8 bits**

$R_b=2vW$ ή $R_b=80$ Kbits/sec

$P_{th}=4^{-(v+2)}=4^{-10}=2^{-20}=10^{-6} \Rightarrow P_b<10^{-6}$

$$P_b=Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \quad ή \quad P_R=E_bR_b=\left[qfuncinv(P_b)\right]^2\left(N_0/2\right)R_b$$

Όπου qfuncinv(P_b) η αντίστροφη της συνάρτησης $Q(x)$. Επειδή $P_b<10^{-6} \Rightarrow$

$$P_R \succ \left[quinv(10^{-6})\right]^2\left(10^{-10}\right)70\cdot10^3=0.16\cdot10^{-3}Watt$$

$P_R=0.16\times10^{-3}$ Watt

Παράδειγμα 6

Σχεδιάστε ένα σύστημα FM που να επιτυγχάνει SNR στην έξοδο του δέκτη ίσο με 40 dB και να απαιτεί την ελάχιστη ισχύ εκπομπής. Το εύρος-ζώνης του καναλιού είναι 120 KHz, το εύρος-ζώνης του μηνύματος είναι 10 KHz, ο λόγος μέσης προς μέγιστη στιγμιαία ισχύ για το μήνυμα, $P_{M_n} = \frac{P_M}{(\max|m(t)|)^2}$, είναι $\frac{1}{2}$, και η (μονόπλευρη) φασματική πυκνότητα ισχύος του θορύβου είναι $N_0 = 10^{-8}$ W/Hz. Ποια είναι η απαιτούμενη ισχύς εκπομπής αν το σήμα εξασθενεί κατά 40 dB κατά τη μετάδοση μέσα από το κανάλι;

ΛΥΣΗ

Για να πετύχουμε την απαιτούμενη ποιότητα *SNR* με την ελάχιστη τιμή της ισχύος εκπομπής P_R πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη μεγαλύτερη δυνατόν τιμή του β_f. Η τιμή αυτή περιορίζεται από το φαινόμενο κατωφλίου και από το διαθέσιμο εύρος-ζώνης. Από το διαθέσιμο εύρος ζώνης προκύπτει ότι το β_f πρέπει να παραμένει:

$$2W\left(\beta_f + 1\right) \le B_C \Rightarrow \beta_f \le \frac{B_C}{2W} - 1 \Rightarrow \beta_f \le \frac{120\text{ KHz}}{2\left(10\text{ KHz}\right)} - 1 \Rightarrow \beta_f \le 5$$

Υπολογισμός τιμής Κατωφλίου β_{fth}

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{o\mathrm{FM}} \ge 60\beta_f^2\left(\beta_f + 1\right)P_{Mn} \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_{o\mathrm{FM}} \ge 60\beta_f^3 P_{Mn} \Rightarrow \beta_f \le \sqrt[3]{\left(\frac{S}{N}\right)_{o\mathrm{FM}} \Big/ \left(60P_{Mn}\right)}$$

$$\beta_f \le \sqrt[3]{10^4 / \left(60 \times 0.2\right)} \Rightarrow \beta_f \le 6.6$$ ➔ $\beta_{fth}=6.6$

Επομένως η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να λάβει το $\beta_f=5$

Υπολογισμός της απαιτούμενης Ισχύος Λήψης, P_R.

$$\left(S/N\right)_{o\mathrm{FM}} = 3\beta_f^2 P_{Mn}\left(S/N\right)_b \Rightarrow \left(S/N\right)_{o\mathrm{FM}} = 3\beta_f^2 P_{Mn}\left(P_R/\left(N_0 W\right)\right)_b$$ ➔

$$P_R = \left(S/N\right)_{o\mathrm{FM}} \frac{N_0 W}{3\beta_f^2 P_{Mn}} = 10^4 \frac{2\times 10^{-8}\text{ watt/Hz} \times 10 \times 10^3\text{ Hz}}{3\times 5^2 \times 0.5} = 26.7\times 10^{-3}\text{ Watt}$$

➔ P_R=26.7 mWatt.

Υπολογισμός της απαιτούμενης Ισχύος Εκπομπής, P_T.

$P_T=LP_R$ ➔ P_T=267 Watt.

Παράδειγμα 7

Επιθυμούμε να διαβιβάσουμε σήμα βασικής ζώνης $m(t)$ με εύρος ζώνης W=20 KHz και κανονικοποιημένη ισχύ P_{mn}=1/6. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε ένα σύστημα FM που λειτουργεί με ένα AWGN κανάλι με $N_0/2 = 10^{-10}$ Watt/Hz. Η ποιότητα που επιθυμούμε να επιτύχουμε στην έξοδο του δέκτη, είναι $(S/N)_{o\text{-dB}}$=40 dB. Πόση είναι η μικρότερη ισχύς λήψης, P_R, στον δέκτη που απαιτείται για να επιτύχουμε την επιθυμητή ποιότητα και πόσο το αντίστοιχο εύρος ζώνης B_c που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;

Απάντηση

Θυμηθείτε τον τύπο που δίνει την ποιότητα στο FM.

$$\left(S/N\right)_{o-\mathrm{FM}} = 3\beta_f^2 P_{mn}\left(\frac{P_R}{N_0 W}\right)$$

Από τον τύπο αυτό προκύπτει ότι για να επιτύχουμε δοσμένη ποιότητα στην έξοδο του δέκτη με τη μικρότερη ισχύ λήψης, P_R πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του β_f. Η τιμή όμως του β_f περιορίζεται από το φαινόμενο κατωφλίου που περιγράφεται από:

$$\left(S/N\right)_{o-\mathrm{FM}} > 60 P_{mn}\beta_f^3 \Rightarrow \beta_f < \sqrt[3]{\left(S/N\right)_{o-\mathrm{FM}} \Big/ \left(60 P_{mn}\right)}$$

$$\beta_f < \sqrt[3]{10^4/10} = 10 \Rightarrow \underline{\boldsymbol{\beta_f < 10}}$$

Οπότε θα χρησιμοποιήσουμε τιμή β_f=10. Η απαιτούμενη ισχύς λήψης, P_R υπολογίζεται από:

$$\left(S/N\right)_{o-\mathrm{FM}} = 3\beta_f^2 P_{mn}\left(\frac{P_R}{N_0 W}\right) \Rightarrow P_R = \left(S/N\right)_{o-\mathrm{FM}} N_0 W \Big/ \left(3\beta_f^2 P_{mn}\right)$$

$$P_R = 10^4 \times 2\times 10^{-10} \times 2\times 10^4 \Big/ \left(3\times 100 \times 1/6\right) \Rightarrow \underline{\boldsymbol{P_R = 8\ 10^{-4}\ \mathrm{Watt}}}$$

και το εύρος ζώνης, B_c από:

$$B_c = 2W(\beta_f + 1) = 2\times 2\times 10^4 \times 11 \Rightarrow \underline{\boldsymbol{B_c = 440\ \mathrm{KHz}}}$$

Παράδειγμα 8

Να υπολογίσετε την ισχύ λήψης που απαιτείται για ένα σύστημα 8-bits-PCM/16-PSK καθώς και για ένα 7-bits-PCM/16-QAM αν το εύρος ζώνης του διαβιβαζόμενου σήματος είναι W=5 KHz και δειγματοληπτείται με συχνότητα ίση με αυτή του Nyquist. και το κανάλι μετάδοσης παρουσιάζει λευκό Gaussian θόρυβο φασμ. πυκνότητας $N_0/2=10^{-8}$ Watt/Hz. (Δεχθείτε ομοιόμορφο PDF για το σήμα)

ΛΥΣΗ

8-PCM/16PSK

$P_{bth}=10^{-6}$ $P_{16th}=4*10^{-6}$ (από διάγραμμα 7.57 με σχετική επέκταση της καμπύλης) $E_{bav}/N_0 \cong 20$dB
$E_{bav}=100N_0$ $P_r= E_{bav}*R_b=100N_0 2Wv=200N_0 Wv$
$P_r=200*2*10^{-8}*5*10^3*8=1600*10^{-4}$ $P_r=0.16$ Watt

7-PCM/16QAM

$P_{bth}=4X10^{-6}$ $P_{16th}=1.6*10^{-5}$ (από διάγραμμα 7.62) $(E_{bav}/N_0)_{dB}=15.8dB \Rightarrow$
$E_{bav}/N_0=10^{1.58} \Rightarrow E_{bav}=35.5*N_0$ $P_r=E_{bav}*R_2=35.5N_0 2Wv=71N_0 Wv$
$P_r=71*2*10^{-8}*5*10^3*7=2170*10^{-5}$ **P_r=0.052 Watt**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Διατίθεται AWGN κανάλι με απόσβεση L=40 dB, θόρυβο στην έξοδο Gaussian λευκό με φασματική πυκνότητα $N_0/2=10^{-12}$ Watt/Hz. Μέσα από το κανάλι αυτό πρέπει να διαβιβαστεί σήμα video (W=4.5 MHz) με ποιότητα 48 dB. Πόση είναι η ισχύς εκπομπής P_T του πομπού και το εύρος ζώνης BW που θα χρησιμοποιηθεί, όταν:

a) Η διαβίβαση γίνει με PCM/QPSK ,
b) με PCM/64FSK.

Δεχθείτε ότι για το Μ-αδικό FSK ισχύει $P_b = \dfrac{(M-1)}{2}Q\left(\sqrt{\dfrac{\lambda E_b}{N_0}}\right)$, $\lambda=\log_2(M)$ και BW=$MR_M/2$ όπου R_M είναι ο χρησιμοποιούμενος ρυθμός διαβίβασης Συμβόλων και E_b η ενέργεια ανά λαμβανόμενο bit.

ΛΥΣΗ

Αφού δεν δίνει το PDF του σήματος θα δεχθούμε ομοιόμορφο PDF➔

$$(SNR)_{dB}=6v$$

και αφού $(SNR)_{dB}=48$ ➔ v=8 bits/sample.

Ο ρυθμός διαβίβασής των δυαδικών δεδομένων είναι:

$$R_b=f_S v=2Wv=2\times 4.5\text{MHz}\times 8 \Rightarrow$$

$$R_b=72\text{Mbit/sec}$$

Η πιθανότητα κατωφλίου είναι

$$P_{th}=4^{-(2v+2)}=4^{-10}=2^{-20}=10^{-6}$$

<u>a) Για PCM/QPSK</u>➔ $R_4=R_b/2$➔ Αν δεχθούμε $R_4=B_C$➔ <u>B_C=36 MHz.</u>

Για το QPSK ισχύει : $P_4 = 2Q\left(\sqrt{\dfrac{2P_r}{N_0 R_b}}\right)$ ➔ με $P_4=2P_b$=>

$$P_r = \left[qfuncinv\left(P_{th}\right)\right]^2 R_b \frac{N_0}{2} = \left[quinv\left(10^{-6}\right)\right]^2 \times 72\times 10^6 \times 10^{-12} = 1.6 \text{ mWatt} \Rightarrow P_T = 16 \text{ Watt}$$

b) Για PCM/64FSK ➔ $R_{64}=R_b/6$ ➔ και $B_C=64R_{64}/2$ ➔ B_C=384 MHz.

$$P_b=\frac{63}{2}Q\left(\sqrt{\frac{\log_2(64)P_r}{N_0R_b}}\right)<P_{th}\Rightarrow P_r\geq\left(quinv\left(\frac{2\times10^{-6}}{63}\right)\right)^2\frac{R_b}{3}\frac{N_0}{2}=\left(quinv\left(\frac{2\times10^{-6}}{63}\right)\right)^2\frac{72\times10^6}{3}10^{-12}$$

$P_r\geq 0.13$ mWatt $\Rightarrow \mathrm{P_T}\geq 1.3$ Watt

Παράδειγμα 10

Επιθυμούμε να διαβιβάσουμε αναλογικό σήμα X(t) με ποιότητα στον προορισμό (έξοδο του δέκτη) $(S/N)_o$= 51 dB τουλάχιστον. Το εύρος-ζώνης του σήματος είναι W=5 KHz και είναι P_{Mn}=1/6. Να υπολογίσετε την ισχύ P_R στην είσοδο του δέκτη και το απαιτούμενο εύρος-ζώνης B_C (Ρυθμό Συμβόλων, R για το PCM) για τη διαβίβαση του σήματος X(t), για το κάθε ένα από τα πιο κάτω Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα.

A) DSB-SC

B) Συμβατικό AM με α=0.8.

Γ) PCM/16 QAM (προσδιορίστε τον αριθμό v των bits του PCM. Δεχθείτε ότι ως συχνότητα δειγματοληψίας έχει ληφθεί η μικρότερη δυνατή.)

Το κανάλι που θα χρησιμοποιηθεί είναι ένα AWGN με πυκνότητα θορύβου $N_0/2=10^{-10}$ Watt/Hz.

ΛΥΣΗ

A) **DSB**

$(S/N)_0=P_R/(N_0W)$ ή $P_R= (S/N)_o\,(N_0W) =10^{5.1}(5^x10^3x2x10^{-10})$

ΚΩΔΙΚΑΣ MATLAB 10^5.1*(5*10^3*2*10^-10)

ή $\mathbf{P_R=0.13}$ **Watt**. $\mathbf{B_C=10}$ **KHz**

B) **Συμβ. AM**

BW=2W=**10 KHz**

$(S/N)_o=[\alpha^2P_{mn}/(1+\alpha^2P_{mn})][P_R/(N_0W)]$ ή $P_R= (S/N)_o\,(N_0W)\,(1+\alpha^2P_{mn})/\alpha^2P_{mn}$

$P_R =10^{5.1}(5^x10^{3x}2^x10^{-10})(1+0.64/6)6/0.64$

ΚΩΔΙΚΑΣ MATLAB 10^5.1*(5*10^3*2*10^-10)*(1+0.64/6)*6/0.64

$\mathbf{P_R=1.3}$ **Watt.**

Γ) **PCM/16 QAM**

$(S/N)_{dB}=4.8+6v+P_{mn}|_{dB}$ v=9

$P_{bth}=4^{-(9+2)}=2^{-22}=2^8 2^{-30}=256*10^{-9}=2.56*10^{-7}$

$P_{16}=2.56*10^{-7}*4=10^{-6}$.

Από το διάγραμμα επιδόσεων του M-QAM για M=16 και $P_M=10^{-6}$ προκύπτει:

(E_b/N_0)=15.8dB➔E_b/N_0=35.5

$P_R= E_{bav}R_b=15.8\ N_0\ 2\ W\ v=31.6\ N_0W\ v$

31.6*2*10^-10*5*10^3*9

$P_R =28410^{-6}$Watt =**284 μWatt**

$\mathbf{R_2=2Wv=90}$ **Kbit/sec➔**$\mathbf{R=R_2/4=22.5}$**Ksym/sec**

Παράδειγμα 11

Ένας αριθμός L=600 κανάλια ομιλίας που το καθ' ένα τους έχει εύρος ζώνης 4 KHz πολυπλέκονται με χρήση USSB διαμόρφωσης υπο-φερουσών και το πολύ-πλεγμένο σήμα διαμορφώνει κατά συχνότητα ένα φέρον. Η κατώτερη φέρουσα συχνότητα SSB είναι 10 KHz και οι υπο-φέρουσες απέχουν μεταξύ τους 4 KHz. Ας δεχθούμε ότι όλα τα σήματα ομιλίας έχουν την ίδια μέση ισχύ. Το κανάλι ομιλίας που βρίσκεται στα 10 KHz δίδει πηλίκο σήματος-προς-θόρυβο εξόδου 60 dB.

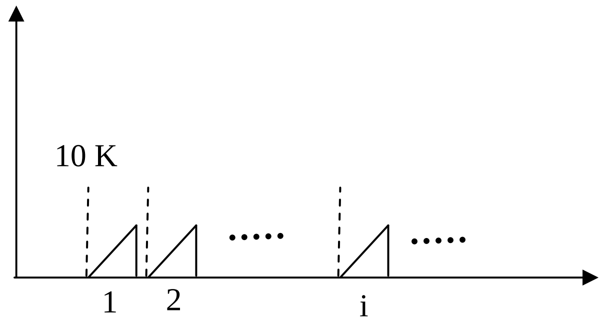
a) Αν στις εξόδους των καναλιών ομιλίας δεν είναι αποδεκτές τιμές ποιότητας $(S/N)_{dB}$ μικρότερες από 30 dB, πόσα κανάλια από το σύστημα αυτό είναι χρησιμοποιήσιμα; (Δεχθείτε ότι στην είσοδο του δέκτη FM έχουμε λευκό θόρυβο).

b) Αν το σήμα FDM διαμορφώνει το φέρον κατά φάση, υπολογίστε την ποιότητα $(S/N)_{dB}$ στις εξόδους των καναλιών ομιλίας του νέου συστήματος δεχόμενοι ότι η ισχύς λήψης, P_R και το εύρος ζώνης, B_C του συστήματος PM είναι ίδια με αυτά του συστήματος FM του προηγούμενου ερωτήματος. (Θεωρείστε επίσης ότι χρησιμοποιείτε το ίδιο κανάλι, δηλαδή ή ίδια τιμή για το $N_0/2$).

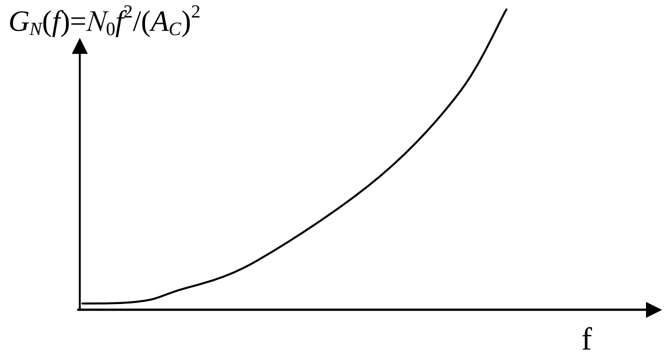
ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ:

Θυμηθείτε ότι σε ένα FM, αντίστοιχα έναν PM δέκτη, το σήμα εξόδου έχει ισχύ $P_{so\_FM}=k_f P_m$, αντίστοιχα $P_{so\_PM}=k_p P_m$.

ΛΥΣΗ



Φάσμα των πολυπλεγμένων σημάτων (Σήμα Βασικής Ζώνης για το φορέα, FM, ή PM)



Φασματική Πυκνότητα Θορύβου στην Έξοδο του Δέκτη FM

α) Χρήση για Φορέα του FM

Στην έξοδο του FM όλα τα κανάλια ομιλίας εξέρχονται με την ίδια ισχύ, την οποία ας συμπολίσουμε με P_S. Εν τούτοις ο θόρυβος που συνοδεύει κάθε κανάλι έχει διαφορετική φασματική πυκνότητα και εξαρτάται από την κεντιρική συχνότητα του καναλιου στο FDM σήμα. Έτσι το i-κανάλι που καταλαμβάνει τη ζώνη $[f_0+(i-1)\times W]$ έως $[f_0+(i-1)\times W]$ με f_0=10 KHz και W=4 KHz συνοδεύεται από θόρυβο ισύος P_{ni}:

$$P_{ni}=2\int_{f_0-(i-1)W}^{f_0+(i-1)W} G_n(f)df=\frac{2N_0}{A_c^2}\int_{f_0-(i-1)W}^{f_0+(i-1)W} f^2 df=\frac{2N_0}{3A_c^2}\Big[\big(f_0+iW\big)^3-\big(f_0+(i-1)W\big)^3\Big]\Rightarrow$$

$$P_{ni}=\frac{2N_0W}{3A_c^2}\Big[3\big(f_0+iW\big)\big(f_0+(i-1)W\big)+W^2\Big]$$

Με βάση τον πιο πάνω τύπο το πρώτο κανάλι του FDM συνοδεύεται από θόρυβο P_{n1}:

$$P_{ni} = \frac{2N_0W}{3A_c^2}\left[3f_0\left(f_0 + iW\right) + W^2\right]$$

Οπότε αν συμβολίσουμε με $(S/N)_{RiSSB}$

$(S/N)_{o\_FM-SSB\_i}$ >=30dB ⇔ $(S/N)_{o\_FM-SSB\_i}$ / $(S/N)_{o\_FM-SSB\_1}$>=-30 dB ⇔
$[3f_0(f_0+W)+W^2]/[3(f_0+iW)(f_0+(i-1)W)+W^2]$>=0.001 ⇔ **i=151**

b)

Ισχύς Σήματος στην έξοδο οποιουδήποτε SSB δέκτη της πολυπλεξίας

1. **Όταν χρησιμοποιείται FM για φορέας**
   $P_{so\_FM-SSB\_i}=k_f^2P_{mn}/L$ i=1,2,…,L ➔ $(S/N)_{o\_FM-SSB\_1}=$
   $(k_f^2P_{mn}/L)/[(2N_0/3A_C^2)W(3f_0(f_0+W)+W^2)]$

2. **Όταν χρησιμοποιείται PM για φορέας**
   $P_{so\_PM-SSB\_i}=k_p^2P_{mn}/L$ i=1,2,…,L ➔ $(S/N)_{o\_PM-SSB\_i}= (k_p^2P_{mn}/L)/[2W(N_0/A_C^2)]$

Επομένως:

$(S/N)_{o\_FM-SSB\_1}/(S/N)_{o\_PM-SSB\_i}=[(k_f^2/k_p^2)][2W(N_0/A_C^2)]/$
$[(2N_0/3A_C^2)W(3f_0(f_0+W)+W^2)]$ ⇔

⇔ $3[(k_f^2/k_p^2)]/[(3f_0(f_0+W)+W^2)]$

Επειδή τόσο το σύστημα με φορέα το FM όσο και το σύστημα με φορέα το PM χρησιμοποιούν το ίδιο εύρος ζώνης :

$B_C=2(\beta_f+1)(LW)=2(\beta_p+1)(LW)$ ➔ $\beta_f=\beta_p$ ➔ $k_f/(LW)=k_p$ ➔ $(k_f^2/k_p^2)=(LW)^2$

Άρα προκύπτει:

$(S/N)_{o\_FM-SSB\_1}/(S/N)_{o\_PM-SSB\_i}=3[L^2W^2]/[3f_0(f_0+W)+W^2]=3.96\ 10^4$ ➔

Επειδή $(S/N)_{o\_FM-SSB\_1}$=60 dB=10^6 ➔

$(S/N)_{o\_PM-SSB\_i}=10^6/(3.96\ 10^4)$ =14.0 dB