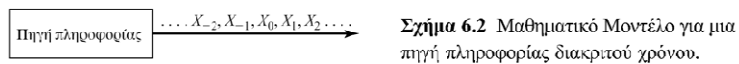


ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ και PCM

ΠΗΓΗ ΜΕ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΣΥΜΒΟΛΑ



**Τα στοιχεία της ακολουθίας των
συμβόλων**

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_N\} \quad p_i = p(X = a_i)$$

Διακριτή Πηγή Χωρίς Μνήμη-DMS

Σύμβολα μεταξύ τους στατιστικά ανεξάρτητα:

$$p(X_i = a_k \& X_j = a_l) = p(X_i = a_k) p(X_j = a_l) \text{ για κάθε } i, k, j, l$$

Ορισμός:

Πληροφορία $I(a_i)$ της μεταβλητής a_i καλείται η ποσότητα $I(a_i) = -\log_2(p_i)$.

Ορισμός:

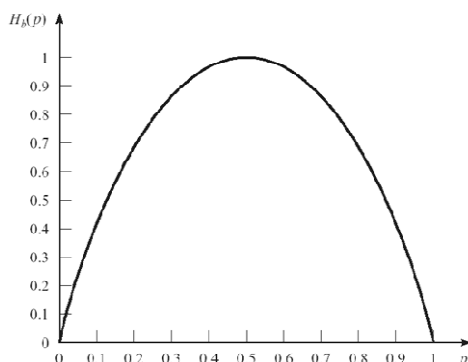
Εντροπία $H(X)$, ή μέσο Πληροφοριακό Περιεχόμενο μιας πηγής DMS

$$H(X) = - \sum_{i=1}^N p_i \log p_i = \sum_{i=1}^N p_i \log \left(\frac{1}{p_i} \right)$$

Παράδειγμα:

Να υπολογίσετε την εντροπία $H_b(p)$ μιας πηγής με δύο διαφορετικά σύμβολα που εμφανίζονται με πιθανότητες p και $1-p$. Σχεδιάστε την παράσταση $H_b(p)$ συναρτήσει του p .

Λύση: $H_b(p) = -p \log_2(p) - (1-p) \log_2(1-p)$



$H_b(p)$: γνωστή και ως συνάρτηση δυαδικής Εντροπίας

Αποδεικνύεται:

Για πηγή με N σύμβολα ισχύει $H(X) \leq \log_2(N)$ με το $=$ να ισχύει μόνο όταν $p_1 = p_2 = \dots = p_N = (1/N)$.

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} H(X) - \log_2(N) &= \sum_{i=1}^N p_i \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right) - \sum_{i=1}^N p_i \log_2(N) = \\ &= \sum_{i=1}^N p_i \log_2\left(\frac{1}{Np_i}\right) = \sum_{i=1}^N p_i \log_2(e) \ln\left(\frac{1}{Np_i}\right) \end{aligned}$$

Ισχύει $\ln x \leq x-1$ για κάθε $x > 0$

$$\begin{aligned} H(X) - \log_2(N) &= \log_2(e) \sum_{i=1}^N p_i \ln\left(\frac{1}{Np_i}\right) \leq \log_2(e) \sum_{i=1}^N p_i \left(\frac{1}{Np_i} - 1\right) \\ H(X) - \log_2(N) &\leq \log_2(e) \left(\sum_{i=1}^N p_i \left(\frac{1}{Np_i}\right) - \sum_{i=1}^N p_i\right) \\ H(X) - \log_2(N) &\leq \log_2(e)(1-1) \\ H(X) - \log_2(N) &\leq 0 \end{aligned}$$

Εντροπία ή Πληροφορία της DMS

$$H(X) = - \sum_{i=1}^N p_i \log p_i = \sum_{i=1}^N p_i \log\left(\frac{1}{p_i}\right)$$

Παραδείγματα

Μία πηγή με εύρος-ζώνης 4 KHz δειγματοληπτείται με ρυθμό Nyquist. Αν υποθέσουμε ότι η ακολουθία που προκύπτει μπορεί να προσεγγισθεί από μια DMS με αλφάβητο $\mathcal{S} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ και με αντίστοιχες πιθανότητες $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}\}$, να προσδιορίσετε το ρυθμό της πηγής σε bits/sec.

Λύση Έχουμε

$$H(X) = \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{4} \log 4 + \frac{1}{8} \log 8 + \frac{1}{16} \log 16 + \frac{1}{16} \log 16 = \frac{15}{8} \text{ bits/δείγμα}$$

και επειδή έχουμε 8000 δείγματα/sec, η πηγή παράγει πληροφορία με ρυθμό 15 Kbps.

Αποδεικνύεται:

Για την L επέκταση μιας πηγής ισχύει $H_L=LH$.

ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΤΕΣ ΠΗΓΗΣ

Έστω πηγή DMS με αλφάβητο συμβόλων:

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$$

Με πιθανότητες εμφάνισης :

$$p_1, p_2, \dots, p_N$$

Έστω ότι κάθε σύμβολο

$$a_1, a_2, \dots, a_N$$

κωδικοποιείται με την κωδική λέξη:

$$c_1, c_2, \dots, c_N$$

Αντίστοιχα, με μήκος λέξης

$$n_1, n_2, \dots, n_N$$

\bar{R} : Μέσος Αριθμός bits του κώδικα ανά σύμβολο της πηγής

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^N p_i n_i$$

Προφανώς επιθυμούμε η τιμή του \bar{R} να είναι όσο γίνεται μικρότερη.

Θεώρημα: Έστω μια πηγή DMS με Εντροπία H . Μπορεί να βρεθεί αλγόριθμος κωδικοποίησης με μέσο ρυθμό

$$\bar{R} = H$$

ο οποίος κωδικοποιεί όλα τα σύμβολά της πηγής αφήνοντας στο ενδεχόμενο του λάθους πιθανότητα όσο μικρή επιθυμούμε.

Θεώρημα Κωδικοποίησης Πηγής

Έστω μια πηγή DMS με Εντροπία $H(X)$. Μπορεί να βρεθεί αλγόριθμος κωδικοποίησης με μέσο ρυθμό

$$\bar{R} = H$$

ο οποίος κωδικοποιεί όλα τα σύμβολά της πηγής αφήνοντας στο ενδεχόμενο του λάθους πιθανότητα όσο μικρή επιθυμούμε. Οποιοσδήποτε όμως κώδικας πηγής με

$$\bar{R} < H$$

κωδικοποιεί τα σύμβολα της πηγής με σφάλμα που δεν μπορεί να μικρύνει κάτω από μια πεπερασμένη τιμή.

ΚΩΔΙΚΕΣ ΕΝΤΡΟΠΙΑΣ

1. Κώδικες Μεταβλητού μήκους

Επιχειρούμε να κωδικοποιήσουμε στο δυαδικό τα σύμβολα της πηγής ώστε να γίνει δυνατή η ψηφιακή αποθήκευσή τους σε ψηφιακή μνήμη ή η διαβίβασή τους μέσα από ψηφιακό κανάλι.

Μέσο μήκος του κώδικα

Για κάθε σύμβολο a_i
με πιθανότητα εμφάνισης p_i
αντιστοιχείται μια κωδική λέξη c_i
με μήκος l_i bits
με $i=1,2,\dots,N$

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^N p_i l_i$$

Συνθήκη Προθέματος:

Έστω c_i η κωδική λέξη του a_i με μήκος l_i bits τα δυαδικά ψηφία: $b_1, b_2, \dots, b_\lambda$. Τότε κάθε άλλη κωδική λέξη με μήκος l $l \leq \lambda$ bits πρέπει να διαφέρει σε ένα τουλάχιστον bit από τα l πρώτα bits της c_i

ΣΥΝΘΗΚΗ
ΠΡΟΘΕΜΑΤΟΣ

====>

$$\sum_{i=1}^N 2^{-n_i} \leq 1$$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΚΡΑΦΤ

Επιπλέον αποδεικνύεται ότι μπορούν να κατασκευαστούν κωδικές πηγής μεταβλητού μήκους με μέσο ρυθμό:

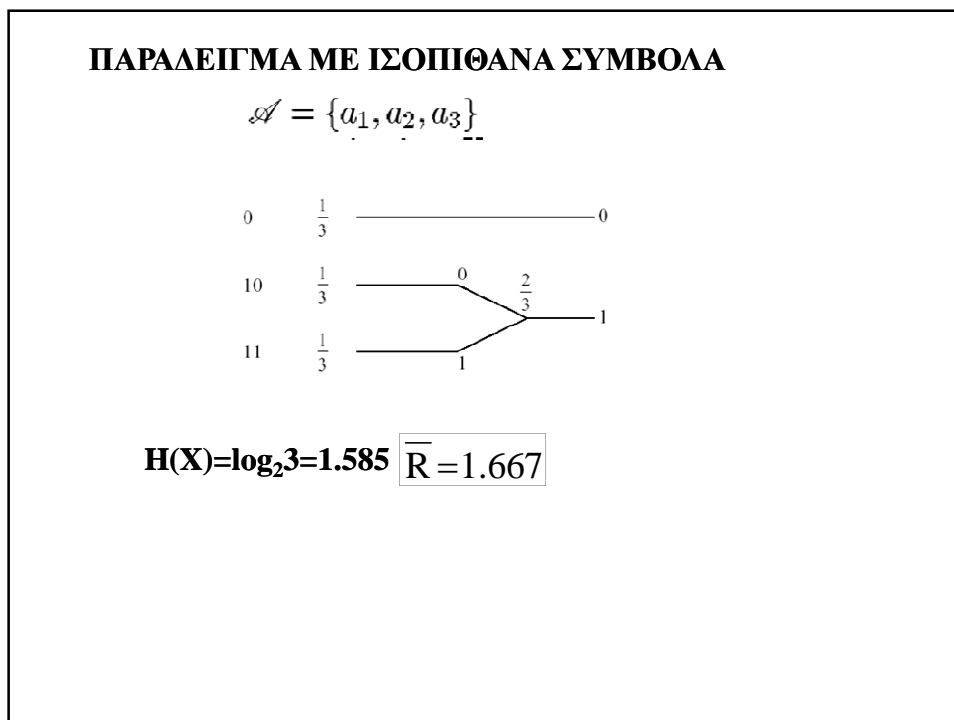
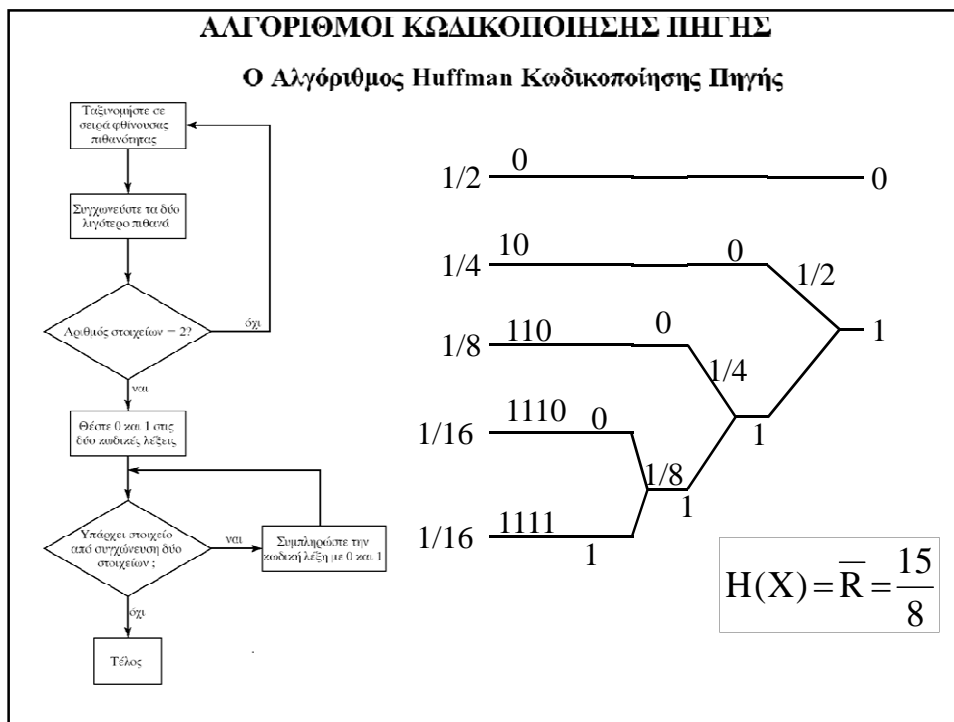
$$H(X) \leq \bar{R} < H(X) + 1$$

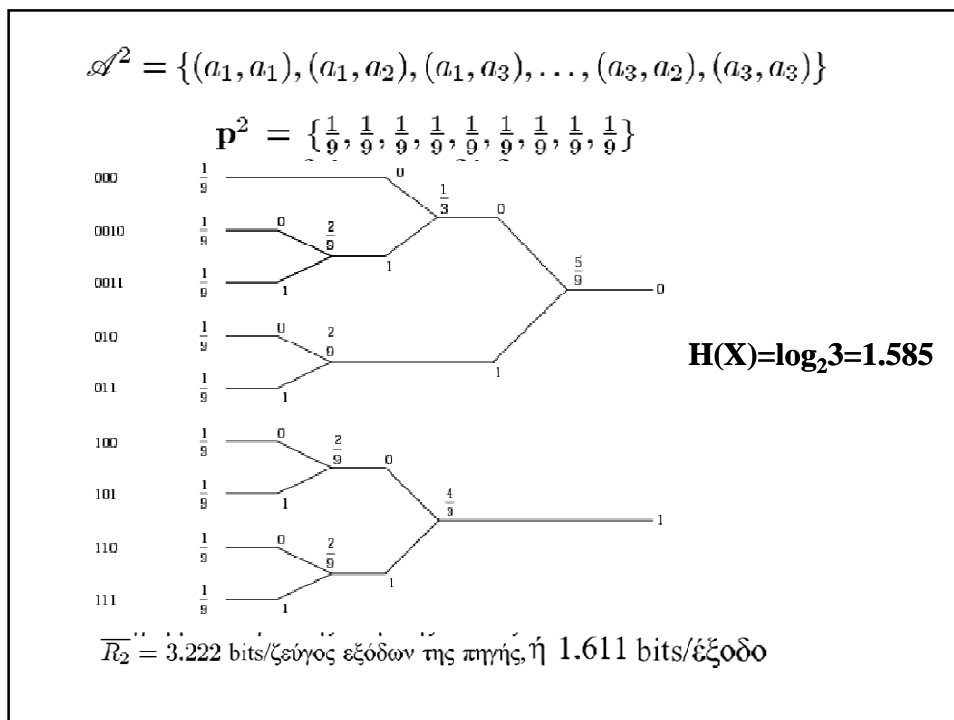
π.χ Huffman

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ ΠΗΓΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ

Ο Αλγόριθμος Huffman Κωδικοποίησης Πηγής

- 1.** Διατάξτε τις εξόδους της πηγής κατά φθίνουσα σειρά των πιθανοτήτων τους.
- 2.** Συγχωνεύστε τις δύο λιγότερο πιθανώς εξόδους σε μία μοναδική έξοδο, και θέστε ως πιθανότητά της το άθροισμα των δύο πιθανοτήτων.
- 3.** Αν ο αριθμός των εξόδων που απομένουν είναι 2, τότε προχωρήστε στο επόμενο βήμα. Διαφορετικά, επανέλθετε στο βήμα 1.
- 4.** Αυθαίρετα αντιστοιχίστε το 0 και το 1 ως κωδικές λέξεις για τις δύο εξόδους που απομένουν.
- 5.** Αν μια έξοδος είναι το αποτέλεσμα της συγχώνευσης δύο εξόδων σε προηγούμενο βήμα, προσαρτήστε στην φθίνουσα κωδική λέξη ένα 0 και ένα 1 για να αποκτήσετε την κωδική λέξη για τις προηγούμενες εξόδους και επαναλάβετε το βήμα 5. Αν καμία έξοδος δεν προηγείται άλλης σταματήστε.





Μέτρο παραμόρφωσης για τα συνεχή σύμβολα x μιας διακριτής στο χρόνο πηγής.

Έστω η ακολουθία δειγμάτων $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ενός αναλογικού σήματος $x(t)$. Οι τιμές των δειγμάτων της ακολουθίας είναι πραγματικοί αριθμοί που ανήκουν σε ένα διάστημα δ . Η διαβίβαση, ή η αποθήκευση των στοιχείων αυτών είναι αδύνατη!

Αντικαθιστώντας τα δείγματα της ακολουθίας με τα στοιχεία ενός πεπερασμένου αλφαβήτου, A , προκύπτει η ακολουθία:

$$\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, \dots$$

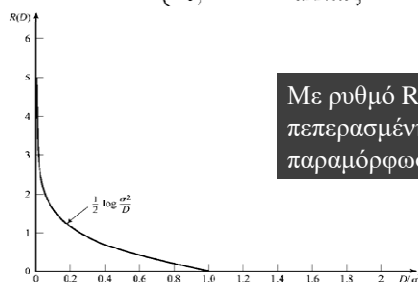
ΠΑΡΑΜΟΦΩΣΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

$$d(x, \hat{x}) = (x - \hat{x})^2 \quad D = E[d(\mathbf{X}^n, \hat{\mathbf{X}}^n)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[d(X_i, \hat{X}_i)] = E[d(X, \hat{X})]$$

Θεώρημα Shannon Κωδικοποίησης Gaussian Πηγής Χωρίς Μνήμη

Μπορεί επίσης να δείχθει ότι για μια Gaussian πηγή με μηδενική μέση τιμή, με διακύμανση σ^2 και με το τετραγωνικό σφάλμα ως μέτρο παραμόρφωσης, η συνάρτηση ρυθμού-παραμόρφωσης δίνεται από τη σχέση

$$R(D) = \begin{cases} \frac{1}{2} \log \frac{\sigma^2}{D}, & 0 \leq D \leq \sigma^2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (6.4.10)$$



Με ρυθμό $R=0$, έχουμε πεπερασμένη παραμόρφωση, $D=\sigma^2!!!$

$$R(D) = \begin{cases} \frac{1}{2} \log \frac{\sigma^2}{D}, & 0 \leq D \leq \sigma^2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad d(x, \hat{x}) = (x - \hat{x})^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στην αναπαράσταση μιας Gaussian πηγής με μέση τιμή μηδέν και μοναδιαία διακύμανση, ποια είναι η ελάχιστη δυνατή παραμόρφωση αν χρησιμοποιούνται 8 bits/έξοδο πηγής; Με ποιο συντελεστή μειώνεται η παραμόρφωση αν χρησιμοποιήσουμε 16 bits/έξοδο πηγής;

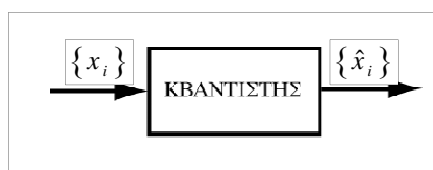
Λύση Χρησιμοποιώντας τη σχέση $D(R) = \sigma^2 2^{-2R}$ με $R = 8$ και $\sigma = 1$, έχουμε $D = \frac{1}{2^{16}} \approx 1.52 \times 10^{-5}$. Αν αντί 8, χρησιμοποιηθούν 16 bits, η παραμόρφωση μειώνεται περίπου κατά 48 dB, ή μ' ένα συντελεστή 4^8 .

Μια τεχνική ορισμού του αλφαβήτου

$$\{\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_N\}$$

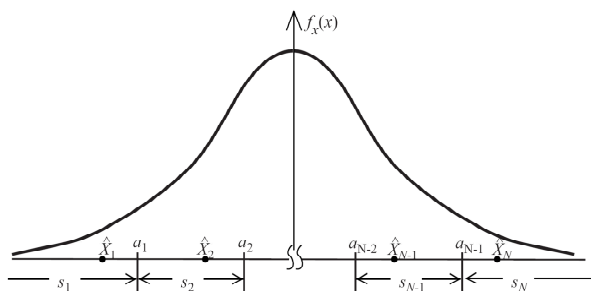
και αντικατάσταση της $\{x_i\}$ από την $\{\hat{x}_i\}$ είναι η βαθμωτή κβάντιση (*scalar quantization*)

Βαθμωτή Κβάντιση



1. Στο πιο κάτω σχήμα το πεδίο τιμών της ακολουθία δειγμάτων $\{x_n\}$ είναι ολόκληρος ο άξονας των πραγματικών αριθμών.

2. Διαχωρίζεται το πεδίο τιμών της $\{x_n\}$ στα N διαδοχικά διαστήματα s_1, s_2, \dots, s_N και σε κάθε διάστημα s_n ορίζεται μία στάθμη κβάντισης \hat{X}_n .



3. Για κάθε x_i της ακολουθίας $\{x_n\}$ προσδιορίζεται το διάστημα s_λ στο οποίο ανήκει το x_i και τίθεται $\hat{x}_i = \hat{X}_\lambda$.

ΜΕΣΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΙΖΟΜΕΝΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Με τον κβαντιστή που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη διαφάνεια η αρχική ακολουθία δειγμάτων:

$$\{x_n\} = x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$$

Αντικαταστάθηκε από την ακολουθία των κβαντισμένων δειγμάτων

$$\{\hat{x}_n\} = \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_i, \dots$$

Κάθε στοιχείο x_i της $\{x_n\}$ αλλάζει κατά την ποσότητα $\tilde{x}_i = x_i - \hat{x}_i$. Η ακολουθία $\{\tilde{x}_n\}$ αποτελεί τον θόρυβο κβάντισης και η μέση τιμή του τετραγώνου της, D είναι γνωστή ως *Παραμόρφωση* (Distortion).

$$D = E \left[(x_i - \hat{X}_i)^2 \right]$$

Αν ορίσουμε με $Q(x)$ τη συνάρτηση που από το κάθε δείγμα x προκύπτει η αντίστοιχη στάθμη κβάντισης \hat{X}_i

$$D = E \left[(x_i - \hat{x}_i)^2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - Q(x))^2 f_X(x) dx$$

Με βάση τον ορισμό της παραμόρφωσης μπορούμε να υπολογίσουμε την παραμόρφωση του κβαντιστή της βαθμωτής κβάντισης ως:

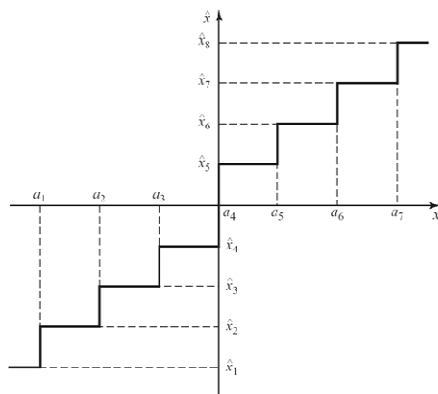
$$D = \int_{-\infty}^{a_1} (x - \hat{X}_1)^2 f_X(x) dx + \sum_{i=1}^{N-2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (x - \hat{X}_{i+1})^2 f_X(x) dx + \int_{a_{N-1}}^{\infty} (x - \hat{X}_N)^2 f_X(x) dx$$

Σε μια βαθμίδα κβάντισης η παραμόρφωση D μιας κβαντισμένης ακολουθίας είναι ανάλογη της διακύμανσης σ^2 της ακολουθίας και επιπλέον εξαρτάται:

1. Από τον αριθμό N των σταθμών κβάντισης.
2. Από τον τρόπο επιλογής της ακολουθίας των διαστημάτων και των αντίστοιχων σταθμών κβάντισης σε συνδυασμό με το PDF $f_X(x)$ της ακολουθίας δειγμάτων.
3. Από την τάξη του κβαντιστή.

$$D = E[d(X, \hat{X})] = E[(X - Q(X))^2]$$

$$D = \int_{-\infty}^{a_1} (x - \hat{X}_1)^2 f_X(x) dx + \sum_{i=1}^{N-2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (x - \hat{X}_{i+1})^2 f_X(x) dx + \int_{a_{N-1}}^{\infty} (x - \hat{X}_N)^2 f_X(x) dx$$



Διάταξη κβαντιστή με
8 στάθμες κβάντισης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η πηγή $X(t)$ είναι στατική Gaussian με μέση τιμή μηδέν και φασματική πυκνότητα ισχύος

$$S_x(f) = \begin{cases} 2, & |f| < 100 \text{ Hz} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η πηγή δειγματοληπτείται με ρυθμό Nyquist και κάθε δείγμα κβαντίζεται χρησιμοποιώντας τον κβαντιστή με τις 8 στάθμες του Σχήματος 6.10 με $a_1 = -60$, $a_2 = -40$, $a_3 = -20$, $a_4 = 0$, $a_5 = 20$, $a_6 = 40$, $a_7 = 60$, και $\hat{x}_1 = -70$, $\hat{x}_2 = -50$, $\hat{x}_3 = -30$, $\hat{x}_4 = -10$, $\hat{x}_5 = 10$, $\hat{x}_6 = 30$, $\hat{x}_7 = 50$, $\hat{x}_8 = 70$. Πόση είναι η παραμόρφωση και ποιος ο ρυθμός που προκύπτει;

Υπολογισμός ισχύος του σήματος και διακύμανσης της κατανομής

$$\sigma^2 = E[X_i^2] = R_X(\tau)|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df = \int_{-100}^{100} 2 df = 400$$

Ρυθμός διαβίβασης R

$$R = 3f_s = 600 \text{ bits/sec}$$

Η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 400}} e^{-\frac{x^2}{800}}$$

Υπολογισμός Παραμόρφωσης

$$D = E[d(X, \hat{X})] = E[(X - Q(X))^2] = \sum_{i=1}^8 \int_{\mathcal{R}_i} (x - Q(x))^2 f_X(x) dx$$

$$D = \int_{-\infty}^{a_1} (x - \hat{X}_1)^2 f_X(x) dx + \sum_{i=1}^6 \int_{a_i}^{a_{i+1}} (x - \hat{X}_{i+1})^2 f_X(x) dx + \int_{a_7}^{\infty} (x - \hat{X}_8)^2 f_X(x) dx$$

$$\underline{D=33.4}$$

Σχόλια και διερεύνηση

Αν $R=0$ $D=\sigma^2=400$

Ο βέλτιστος κβαντιστής, $R = \frac{1}{2} \log \frac{\sigma^2}{D}$, προβλέπει για $R=3$ bits/δείγμα $D=6.25$. Που οφείλεται η διαφορά;

1. Η κβάντιση έγινε χωριστά για κάθε δείγμα.
2. Δεν επιλέγησαν σωστά τα α , και οι τιμές κβάντισης.
3. Τα σύμβολα που προκύπτουν κωδικοποιήθηκαν ως ισοπίθανα πράγμα που δεν ισχύει (0.0014, 0.0214, 0.1359, 0.3414)!

Λόγος Σήματος προς Θόρυβο Κβάντισης

$$\text{SQNR} = \frac{E[X^2]}{E[(X - Q(X))^2]}$$

Ισχύς του Θορύβου Κβάντισης

$$P_{\tilde{X}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E[(X(t) - Q(X(t)))^2] dt$$

Ισχύς του Σήματος

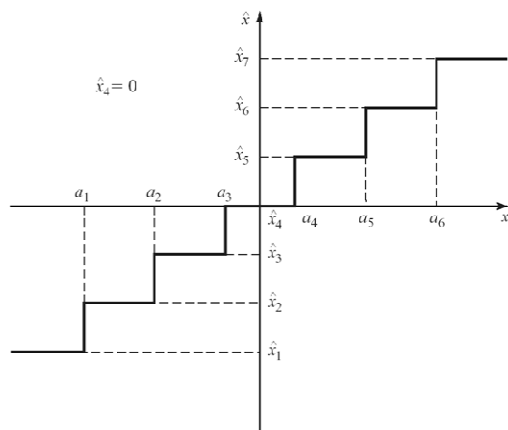
$$P_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E[X(t)^2] dt$$

$$\text{SQNR} = \frac{P_X}{P_{\tilde{X}}}$$

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΚΒΑΝΤΙΣΗ

για όλα τα $1 \leq i \leq N - 2$, $a_{i+1} - a_i = \Delta$.

$$\Delta = (\alpha_{N-1} - \alpha_1) / (N-2) = \text{Βαθμίδα Κβάντισης}$$



Ομοιόμορφος
Κβαντιστής με 7 Στάθμες

Υπολογισμός Παραμόρφωσης στην Ομοιόμορφη Κβάντιση

$$D = \int_{-\infty}^{a_1} (x - \hat{X}_1)^2 f_X(x) dx + \sum_{i=2}^{N-1} \int_{a_{i-1}}^{a_i} (x - \hat{X}_i)^2 f_X(x) dx + \int_{a_{N-1}}^{\infty} (x - \hat{X}_N)^2 f_X(x) dx$$

ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟΣ ΚΒΑΝΤΙΣΤΗΣ**Στη Γενική Περίπτωση**

Για δεδομένο PDF, $f_X(x)$ της ακολουθίας δεδομένων, και για δεδομένο πλήθος N των διαστημάτων κβάντισης να προσδιοριστεί η τιμή της βαθμίδας κβάντισης, Δ και η ακολουθία των σταθμών κβάντισης:

$$\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_N$$

ώστε η παραμόρφωση, D , του κβαντιστή που θα προκύψει να είναι ελάχιστη.

ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟΣ ΚΒΑΝΤΙΣΤΗΣ**Σε Περίπτωση με PDF Συμμετρικό ως προς το Μηδέν.**

Ένας απλούστερος τύπος ομοιόμορφου κβαντιστή είναι αυτός για τον οποίο οι στάθμες κβάντισης τοποθετούνται στο μέσον των ίσων διαστημάτων κβάντισης. Στον τύπο αυτό για δεδομένο αριθμό N τα όρια των διαστημάτων κβάντισης $a_i, i=1,2,\dots,N-1$ και οι στάθμες κβάντισης $i=1,2,\dots,N$ δίνονται από τους πιο κάτω τύπους

$$a_i = -\left(\frac{N}{2} - i\right)\Delta \quad i=1,2,\dots,N-2$$

$$\hat{X}_i = -\left(\frac{N+1}{2} - i\right)\Delta \quad i=1,2,\dots,N$$

Η τιμή του εύρους βαθμίδας Δ προκύπτει από την ελαχιστοποίηση ως προς Δ της πιο κάτω παράστασης.

ΜΗ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΚΒΑΝΤΙΣΗ

$$D = \int_{-\infty}^{a_1} (x - \hat{X}_1)^2 f_X(x) dx + \sum_{i=1}^{N-2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (x - \hat{X}_{i+1})^2 f_X(x) dx + \int_{a_{N-1}}^{\infty} (x - \hat{X}_N)^2 f_X(x) dx$$

Για δεδομένο PDF, $f_X(x)$ της ακολουθίας δεδομένων, και για δεδομένο πλήθος N των διαστημάτων κβάντισης να προσδιοριστεί η ακολουθία τών σταθμών κβάντισης:

$$\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_N$$

Καθώς και τα άκρα των περιοχών κβάντισης:

$$a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$$

ώστε η παραμόρφωση D , του κβαντιστή που θα προκύψει να είναι ελάχιστη.

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} D = \int_{a_{i-1}}^{a_i} 2(x - \hat{x}_i) f_X(x) dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a_i} D = f_X(a_i) [(a_i - \hat{x}_i)^2 - (a_i - \hat{x}_{i+1})^2] = 0$$

**Ο Βέλτιστος μη Ομοιόμορφος Κβαντιστής Σχεδιάζεται με
βάση τις Συνθήκες Lloyd-Max**

1. Τα άκρα των περιοχών κβάντισης δίνονται από τον αριθμητικό μέσο των γειτονικών τιμών κβάντισης (νόμος πλησιέστερου γείτονα).
2. Οι τιμές κβάντισης είναι τα κέντρα μάζας των περιοχών κβάντισης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Πώς θα μεταβληθούν τα αποτελέσματα του Παραδείγματος 6.5.1 αν αντί του ομοιόμορφου κβαντιστή του Σχήματος 6.10, χρησιμοποιηθεί ο βέλτιστος μη ομοιόμορφος κβαντιστής με τον ίδιο αριθμό σταθμών;

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.3 ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΜΗ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟΣ ΚΒΑΝΤΙΣΤΗΣ ΓΙΑ GAUSSIAN ΠΗΓΗ

N	$\pm a_i$	$\pm \hat{x}_i$	D	$H(\hat{x})$
1	—	0	1	0
2	0	0,7980	0,3634	1
3	0,6120	0, 1,224	0,1902	1,536
4	0, 0,9816	0,4528, 1,510	0,1175	1,911
5	0,3823, 1,244	0, 0,7646, 1,724	0,07994	2,203
6	0, 0,6589, 1,447	0,3177, 1,090, 1,894	0,05798	2,443
7	0,2803, 0,8744, 1,611	0, 0,5606, 1,188, 2,033	0,04400	2,647
8	0, 0,5006, 1,050, 1,748	0,2451, 0,7560, 1,344, 2,152	0,03454	2,825

Για $\sigma=20$ οι πιο πάνω τιμές πολλαπλασιάζονται X 20

$$a_1 = -a_7 = -34.96, a_2 = -a_6 = -21, a_3 = -a_5 = -10.012, a_4 = 0$$

$$\hat{x}_1 = -\hat{x}_8 = -43.04, \hat{x}_2 = -\hat{x}_7 = -26.88, \hat{x}_3 = -\hat{x}_6 = -15.12, \hat{x}_4 = -\hat{x}_5 = -4.902.$$

Παραμόρφωση $D=0.03454 \times 400=13.82$ και $R=2.825$

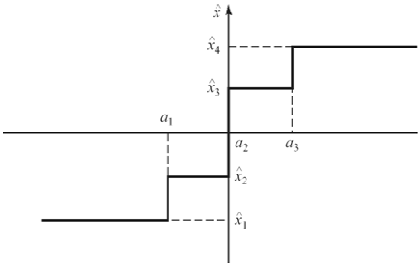
Από τη συνάρτηση Ρυθμός-Παραμόρφωση προκύπτουν:

Για $R=2.825$ πρέπει $D=7.96$ ή για $D=13.82$ $R=2.43$

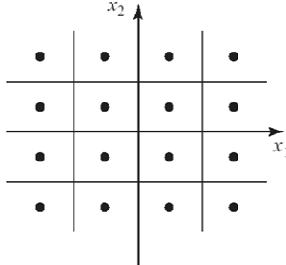
Η διαφορά αυτή θα μικρύνει ακόμη περισσότερο αν ακολουθηθεί διανυσματική κβάντιση.

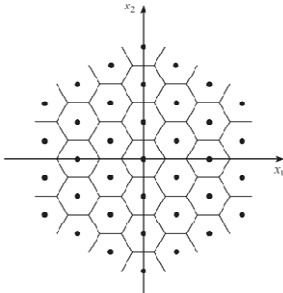
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΚΒΑΝΤΙΣΗ

ΒΑΘΜΩΤΗ ΚΒΑΝΤΙΣΗ



ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΚΒΑΝΤΙΣΗ





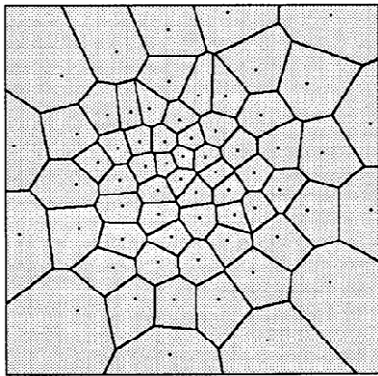
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΚΒΑΝΤΙΣΗ

ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΚΒΑΝΤΙΣΤΗ

1. Η περιοχή \mathcal{R}_i είναι το σύνολο όλων των σημείων στο χώρο n -διαστάσεων που βρίσκονται πιο κοντά στο $\hat{\mathbf{x}}_i$ από οποιοδήποτε άλλο $\hat{\mathbf{x}}_j$ για κάθε $j \neq i$.

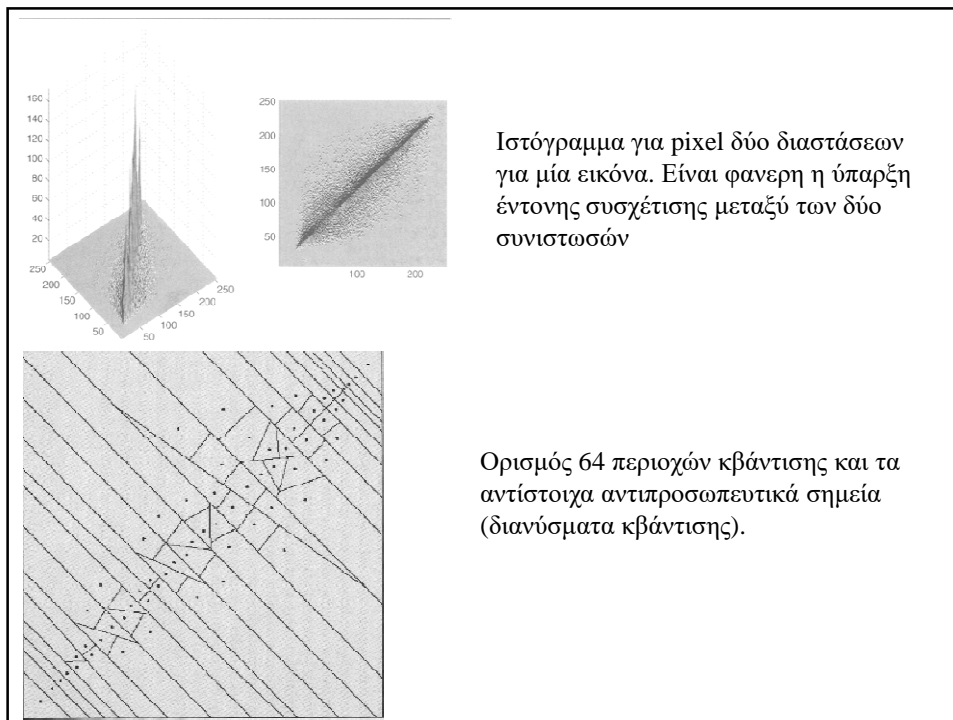
$$\mathcal{R}_i = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_i\| < \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_j\|, \forall j \neq i \}$$
2. Το $\hat{\mathbf{x}}_i$ είναι το κέντρο μάζας της περιοχής \mathcal{R}_i , δηλαδή,

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \frac{1}{P(\mathbf{X} \in \mathcal{R}_i)} \int \int \dots \int_{\mathcal{R}_i} \mathbf{x} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$



Κατανομή Gaussian δυο διαστάσεων

64 περιοχές (6 bits/δείγμα)



ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΚΒΑΝΤΙΣΤΗ

1. Η περιοχή \mathcal{R}_i είναι το σύνολο όλων των σημείων στο χώρο n -διαστάσεων που βρίσκονται πιο κοντά στο $\hat{\mathbf{x}}_i$ από οποιοδήποτε άλλο $\hat{\mathbf{x}}_j$ για κάθε $j \neq i$.

$$\mathcal{R}_i = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_i\| < \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_j\|, \forall j \neq i \}$$

2. Το $\hat{\mathbf{x}}_i$ είναι το κέντρο μάζας της περιοχής \mathcal{R}_i , δηλαδή,

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \frac{1}{P(\mathbf{X} \in \mathcal{R}_i)} \int \int \dots \int_{\mathcal{R}_i} \mathbf{x} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Το PCM της Σταθερής Τηλεφωνίας.

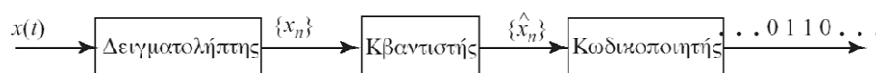
Η απλούστερη μορφή PCM είναι αυτή της σταθερής τηλεφωνίας. Το PCM αυτό θεωρεί το σήμα $x(t)$ ότι έχει ένα συμμετρικό PDF γύρω από το μηδέν του οποίου οι μη μηδενικές τιμές εκτείνονται στο πεπερασμένο διάστημα

$$[-x_{max}, x_{max}].$$

Στο PCM αυτό χρησιμοποιούμε έναν ομοιόμορφο κβαντιστή με N στάθμες κβάντισης όπου N είναι δύναμη του 2 με φυσικό αριθμό για εκθέτη: $N=2^v$

Για κωδικοποιητή πηγής χρησιμοποιείται συνήθως η απλή δυαδική αρίθμηση.

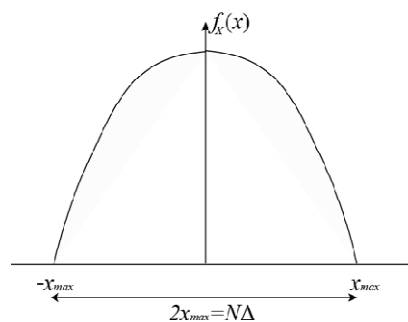
Παλμοκωδική Διαμόρφωση (PCM)



Θεωρείστε ότι το σήμα $x(t)$ έχει PDF $f_X(x)$ συμμετρικό ως προς το μηδέν και ότι ισχύει $f_X(x)=0$ εκτός του πεπερασμένου διαστήματος $[-x_{max}, x_{max}]$.

Ορίζουμε έναν ομοιόμορφο κβαντιστή με N διαστήματα κβάντισης ίσου μήκους Δ και ορίζουμε το μέσον κάθε διαστήματος ως στάθμη κβάντισης. Προφανώς ισχύει:

$$2x_{max}=N \times \Delta$$



Το σταθερό μήκος των διαστημάτων κβάντισης καλείται *Βήμα Κβάντισης* (Quantisation Step)

Επιπλέον ο κβαντιστής στην εφαρμογή αυτή της σταθερής τηλεφωνίας κατασκευάζεται με:

1. N πολύ μεγάλο, $N \geq 128$.
2. N ισούται με ακέραια δύναμη του 2 ($N=2^v$, v θετικός ακέραιος.)

Ο ειδικός αυτός τρόπος υλοποίησης του κβαντιστή έχει ως αποτέλεσμα να απλοποιηθεί η διαδικασία του υπολογισμού της παραμόρφωσης ή του μέσου τετραγωνικού σφάλματος κβάντισης D .

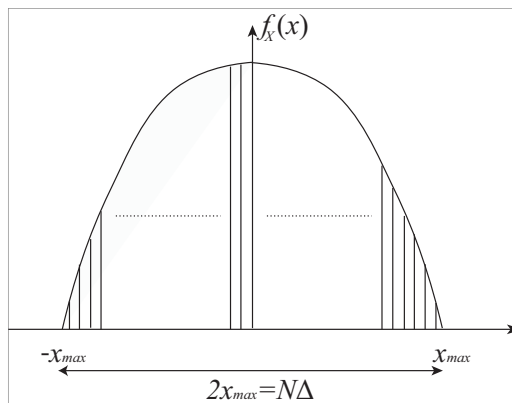
Πράγματι το σταθερό μήκος δυο Δ και η επιλογή του μέσου ως της στάθμης κβάντισης οδηγεί στο ότι για το σφάλμα κβάντισης:

$$\tilde{x}_i = x_i - \hat{x}_i$$

σε οποιοδήποτε διάστημα κβάντισης s_j και αν ανήκει το x_j , ισχύει:

$$-\frac{\Delta}{2} \leq \tilde{x} < \frac{\Delta}{2}$$

Επιπλέον ο μεγάλος αριθμός N των διαστημάτων στα οποία διαχωρίζεται το διάστημα τιμών της $\{x_n\}$ έχει ως αποτέλεσμα να ισχύει με καλή προσέγγιση ότι το σε κάθε διάστημα s_i το x έχει ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ των δύο άκρων του διαστήματος.

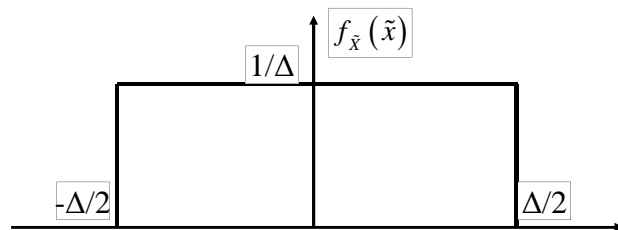


Επειδή ισχύει

$$\tilde{x} = x - \hat{X}_i = x - \frac{s_{istart} + s_{iend}}{2}$$

το σφάλμα κβάντισης έχει σχεδόν ομοιόμορφο κατανομή στο διάστημα τιμών του, $[-\Delta/2, \Delta/2]$

Δηλαδή ανεξάρτητα από σε ποιο διάστημα βρισκόμαστε και ανεξάρτητα από το PDF του σήματος, $f_{\tilde{x}}(x)$, ισχύει:



Στο PCM η κωδικοποίηση γίνεται με κώδικα σταθερού μήκους. Για το λόγο αυτό επιλέγουμε το πλήθος των διαστημάτων κβάντισης N ίσο με δύναμη του 2 (2^n) και επομένως οι δυαδικές κωδικές λέξεις θα έχουν μήκος n . Συνήθως χρησιμοποιείται η απλή δυαδική αρίθμηση.

Για παράδειγμα, αν στον κβαντιστή της προηγούμενης διαφάνειας χρησιμοποιήσουμε 256 στάθμες κβάντισης, αυτές θα είναι:

$$\hat{X}_0 = -x_{\max} + \frac{\Delta}{2}, \hat{X}_1 = -x_{\max} + \frac{\Delta}{2} + \Delta, \hat{X}_2 = \dots$$

Και γενικά ισχύει:

$$\hat{X}_i = -x_{\max} + \frac{\Delta}{2} + i\Delta, i = 0, 1, \dots, 255$$

Στη συνέχεια οι N στάθμες κβάντισης κωδικοποιούνται με λέξεις των ν bits, συνήθως τον ισοδύναμο δυαδικό αριθμό του δείκτη της στάθμης κβάντισης:

$$\hat{X}_0 : 00000000, \hat{X}_1 : 00000001, \hat{X}_2 : 00000010, \dots$$

$$\dots, \hat{X}_{64} = 00100000, \dots, \hat{X}_{255} = 11111111$$

Το μέσο πλήθος Bits να δείγμα που χρησιμοποιούμε για την κωδικοποίηση καλούμε *Μέσο Ρυθμό Κωδικοποίησης R*.

Επειδή στο PCM που περιγράφουμε χρησιμοποιούμε κωδικές λέξεις σταθερού μήκους με ν bits $\nu = \log_2(N)$, ισχύει:

$$\text{Ρυθμός Κωδικοποίησης: } \nu = \log_2(N)$$

Και επομένως

$$\Delta = \frac{2x_{\max}}{N} = \frac{x_{\max}}{2^{\nu-1}}$$

Έχοντας το PDF του σφάλματος κβάντισης μπορούμε να υπολογίσουμε τη διακύμανση του σφάλματος αυτού.

$$E[\tilde{X}^2] = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta} \tilde{x}^2 d\tilde{x} = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{x_{\max}^2}{3N^2} = \frac{x_{\max}^2}{3 \times 4^\nu}$$

Και επομένως το πηλίκo σήμα προς θόρυβο, SQNR, του κβαντισμένου σήματος γίνεται:

$$\text{SQNR} = \frac{\overline{X^2}}{\overline{\tilde{X}^2}} = \frac{3 \times N^2 \overline{X^2}}{x_{\max}^2} = \frac{3 \times 4^\nu \overline{X^2}}{x_{\max}^2}$$

Στον τελευταίο τύπο διακρίνουμε τον παράγοντα

$$\frac{\overline{X^2}}{x_{\max}^2}$$

Το πηλίκο αυτό εξαρτάται από τη στατιστική του σήματος $x(t)$ και μπορούμε να διακρίνουμε ότι είναι η διακύμανση του σήματος $x(t)/x_{max}$. Δηλαδή το πηλίκο αυτό ισούται με την ισχύ της κανονικοποιημένης μορφής του σήματος $x(t)$.

Θα συμβολίζουμε λοιπόν το πηλίκο αυτό με P_{mn}

$$P_{mn} = \frac{\overline{X^2}}{x_{max}^2}$$

Οπότε:

$$SQNR = 3 \cdot 4^v P_{mn}$$

και αν υπολογίσουμε την ποιότητα σε decibels

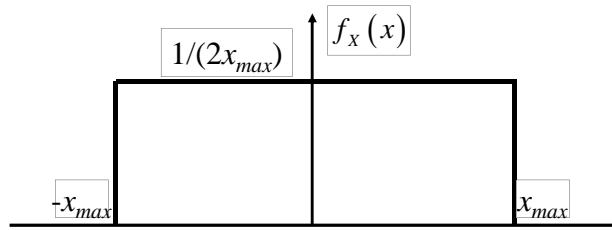
$$SQNR_{dB} = 6v + 4.8 + P_{mndB}$$

Ο τελευταίος τύπος μας δείχνει ότι κάθε αύξηση της τιμής του ρυθμού κωδικοποίησης v κατά μία μονάδα, αυξάνει την ποιότητα του σήματος κατά 6 dB.

Στον ίδιο τύπο διακρίνουμε τον προσθετέο P_{mndB} της οποίας η τιμή εξαρτάται αποκλειστικά από το PDF $f_X(x)$ του σήματος που διαβιβάζεται μέσω του PCM. Για ένα σήμα $x(t)$ με ομοιόμορφο PDF η

$$P_{mn}$$

Για παράδειγμα όταν το σήμα $x(t)$ παρουσιάζει ομοιόμορφο PDF η $P_{mn} = 1/3$ και $P_{mndB} = -4.8$ dB.



Πράγματι, αν το PDF του διαβιβαζόμενου σήματος είναι όπως στο σχήμα, θα ισχύει:

$$E[x] = 0$$

και

$$\sigma_x^2 = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \frac{2}{2x_{\max}} \int_0^{x_{\max}} x^2 dx = \frac{x_{\max}^2}{3}$$

άρα $P_{mn} = 1/3$ και $P_{mndB} = -4.8$ dB

Οπότε για σήμα $x(t)$ με ομοιόμορφο PDF οι αντίστοιχοι τύποι της ποιότητας απλοποιούνται σε

$$SQNR = 4^v = 2^{2v}$$

$$SQNR_{dB} = 6v$$

Απαιτήσεις ενός συστήματος PCM σε Εύρος Ζώνης B_C και Ισχύ Λήψης P_R

Ρυθμός Δημιουργίας Δυαδικών Δεδομένων, R_b

Αν f_s είναι η συχνότητα δειγματοληψίας του αναλογικού σήματος και ν bits/sample ο ρυθμός κωδικοποίησης του PCM, τότε ο Ρυθμός Δημιουργίας Δυαδικών Δεδομένων R_b ισούται με:

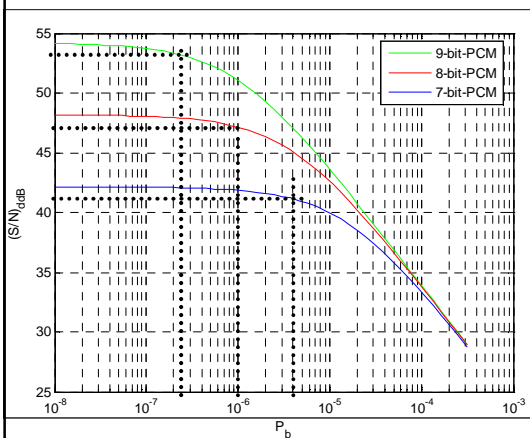
$$R_b = f_s \nu$$

Ποιότητα Σήματος στον Προορισμό, $(S/N)_d$ - Πιθανότητα Κατωφλίου P_{th} .

Όταν τα δυαδικά δεδομένα που δημιουργήθηκαν από το PCM διαβιβαστούν μέσα από ένα δυαδικό κανάλι με πιθανότητα σφάλματος P_b , τα ανακατασκευασμένα δείγματα στον δέκτη θα έχουν υποστεί μια επιπλέον παραμόρφωση που οφείλεται στα σφάλματα του καναλιού. Αποδεικνύεται ότι η παραμόρφωση αυτή (θόρυβος) έχει ως αποτέλεσμα η ποιότητα του σήματος στον προορισμό να γίνει τελικά $(S/N)_d$.

$$(S/N)_d = \frac{(S/N)_{\max}}{1 + 4P_b 4^\nu}$$

όπου $(S/N)_{\max}$ είναι η ποιότητα της ακολουθίας των κβαντισμένων δειγμάτων αμέσως μετά την κβάντιση και ν είναι ο ρυθμός κωδικοποίησης των δειγμάτων.



Στο παραπλεύρωσ διάγραμμα έχει χαραχθεί η σχέση του $(S/N)_{d-dB}$ συναρτήσει της P_b για ένα σήμα με ομοιόμορφο PDF και για ρυθμούς κωδικοποίησης $\nu=7,8$ και 9 bits/sample.

Από το διάγραμμα αυτό μπορείτε να διαπιστώσετε ότι για μικρές τιμές της πιθανότητας σφάλματος, P_b του δυαδικού καναλιού, η ποιότητα $(S/N)_{d-dB}=6\nu$, δηλαδή είναι ίδια με την ποιότητα στην έξοδο του κβαντιστή.

Αντίθετα για μεγάλες πιθανότητες σφάλματος η τιμή της ποιότητας καταρρέει.

Στην πράξη ορίζεται η τιμή P_{th} ως η τιμή της P_b που εξασφαλίζει ποιότητα ίση με 1 dB μικρότερη από τη μέγιστη τιμή. Εφαρμόζοντας τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι η P_{th} δίνεται από τη σχέση:

$$P_{th} = 4^{-(v+2)}$$

Αν εξασφαλιστεί να ισχύει $P_b < P_{th}$, τότε η ποιότητα του σήματος στον προορισμό είναι περίπου ίση με αυτήν της εξόδου στον κβαντιστή.

Σημειώστε ότι τιμή της P_b πολύ μικρότερη της P_{th} δεν προσφέρει καμία αύξηση στην ποιότητα αλλά απλώς αυξάνει την απαίτηση της ισχύος λήψης στο δέκτη.

Στο διάγραμμα διακρίνονται οι τιμές της P_{th} για τις αντίστοιχες τιμές του v .

Παράδειγμα

Ένα σήμα ομιλίας με ομοιόμορφο PDF και με εύρος ζώνης $W=5$ KHz διαβιβάζεται με σύστημα PCM. Για το σκοπό αυτό το σήμα δειγματοληπτείται με ρυθμό $f_s=12$ KHz και τα δυαδικά δεδομένα διαβιβάζονται χρησιμοποιώντας ένα AWGN κανάλι με φασματική πυκνότητα $N_0/2=10^{-12}$ Watt/Hz. Για τα ακόλουθα συστήματα PCM:

7 bits/B-PAM	7 bits/Q-PSK	7 bits/8-PAM	7 bits/8-PSK
8 bits/B-PAM	8 bits/Q-PSK	8 bits/8-PAM	8 bits/8-PSK
10 bits/B-PAM	10 bits/Q-PSK	10 bits/8-PAM	10 bits/8-PSK

Να προσδιορίσετε:

- την ποιότητα στον προορισμό $(S/N)_{d,dB}$, τον απαιτούμενο ρυθμό διαβίβασης δυαδικών δεδομένων R_b , και τον αντίστοιχο ρυθμό διαβίβασης συμβόλων, R .
- Την τιμή της πιθανότητας κατωφλίου P_{th} την αντίστοιχη τιμή της πιθανότητας σφάλματος ανά σύμβολο, P_e και την ισχύ λήψης, P_R .

Λύση

Με δεδομένο ότι θα έχει επιλεγεί $P_b < P_{th}$, η ποιότητα στον προορισμό θα είναι ίση με την ποιότητα στην έξοδο του κβαντιστή, ίση με 6v dB.

Επομένως ανεξάρτητα από το ψηφιακό σύστημα διαβίβασης της δυαδικής ακολουθίας θα ισχύει:

$$(S/N)_d = 6v$$

Παρόμοια ανεξάρτητα από το σύστημα διαβίβασης θα ισχύει:

$$R_b = f_s v \quad \text{και} \quad P_{th} = 4^{-(v+2)}$$

Οπότε:

	$(S/N)_d$	R_b	P_{th}
7 bits-PCM	42 dB	84 Kbit/sec	4×10^{-6}
8 bits -PCM	48 dB	96 Kbit/sec	10^{-6}
10 bits -PCM	60 dB	120 Kbit/sec	6.4×10^{-8}

Ο ρυθμός διαβίβασης συμβόλων R δίνεται από τη σχέση.

$$R = R_b / \log_2(M) = f_s v / \log_2(M)$$

Οπότε:

7 bits/B-PAM $R=84$ Ksymbols/sec	7 bits/Q-PSK $R=42$ Ksymbols/sec	7 bits/8-PAM & 7 bits/8-PSK $R=28$ Ksymbols/sec
8 bits/B-PAM $R=96$ Ksymbols/sec	8 bits/Q-PSK $R=48$ Ksymbols/sec	8 bits/8-PAM & 8 bits/8-PSK $R=32$ Ksymbols/sec
10 bits/B-PAM $R=120$ Ksymbols/sec	10 bits/Q-PSK $R=60$ Ksymbols/sec	10 bits/8-PAM & 10 bits/8-PSK $R=40$ Ksymbols/sec

Για τον προσδιορισμό της ισχύος λήψης πρέπει να γίνει χωριστός υπολογισμός για κάθε σύστημα ψηφιακής διαβίβασης. Έτσι για B-PAM :

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2P_R}{R_b N_0}}\right) < P_{th} \Rightarrow P_R > [Q^{-1}(P_{th})]^2 R_b \frac{N_0}{2}$$

Όπου Q^{-1} η αντίστροφη συνάρτηση της $Q(k)$.

Και αντικαθιστώντας P_{th} και R_b για 7,8 & 10 bits PCM υπολογίζουμε την απαιτούμενη ισχύ. Βλέπε επόμενο πίνακα.

Για QPSK

$$P_e = 2Q\left(\sqrt{\frac{2P_R}{R_b N_0}}\right), P_b = P_e/2 = Q\left(\sqrt{\frac{2P_R}{R_b N_0}}\right) < P_{th}$$

$$P_R > \left[Q^{-1}(P_{th})\right]^2 R_b \frac{N_0}{2}$$

Ομοίως αντικαθιστώντας P_{th} και R_b για 7,8 & 10 bits PCM υπολογίζουμε την απαιτούμενη ισχύ. Βλέπε επόμενο πίνακα.

Για 8-PAM

$$P_e = 2\frac{M-1}{M}Q\left(\sqrt{\frac{6\log_2(M)P_R}{(M^2-1)R_b N_0}}\right) \Rightarrow P_b = P_8/3 = \frac{1}{3} \times \frac{2 \times 7}{8} Q\left(\sqrt{\frac{6 \times 3P_R}{63R_b N_0}}\right) < P_{th}$$

Οπότε:

$$P_R > 7 \left[Q^{-1}\left(\frac{24P_{th}}{14}\right)\right]^2 \frac{N_0}{2} R_b$$

Και για P_{th} και R_b για 7,8 & 10 bits PCM υπολογίζουμε την απαιτούμενη ισχύ. Βλέπε επόμενο πίνακα.

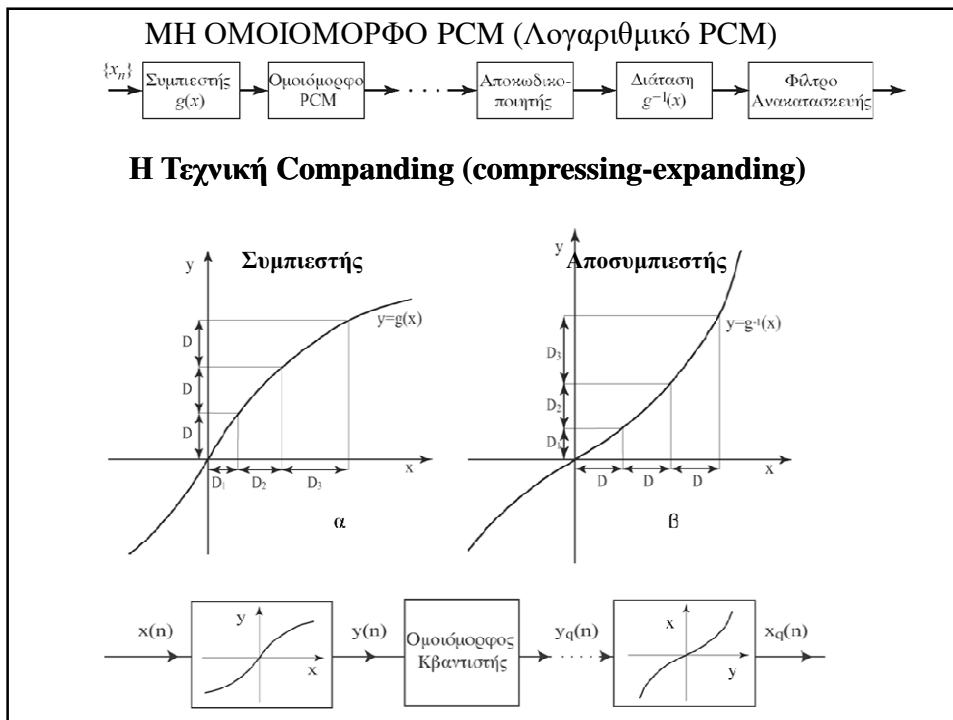
Για 8-PSK

$$P_e = 2Q\left(\sqrt{\frac{2\log_2(M)P_R}{R_b N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) \Rightarrow P_b = \frac{P_8}{3} = \frac{2}{3} Q\left(\sqrt{\frac{2 \times 3P_R}{R_b N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) < P_{th}$$

$$P_R > \frac{1}{3\sin^2(\pi/8)} \left[Q^{-1}\left(\frac{3P_{th}}{2}\right)\right]^2 \frac{N_0}{2} R_b$$

Και για P_{th} και R_b για 7,8 & 10 bits PCM υπολογίζουμε την απαιτούμενη ισχύ. Βλέπε επόμενο πίνακα.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ			
α) $(S/N)_d$ dB, R_b, R			
7 bits/B-PAM 42 dB, 84 Kbits/sec, 84 Ksym/sec	7 bits/Q-PSK 42 dB, 84 Kbits/sec, 42 Ksym/sec	7 bits/8-PAM 42 dB, 84 Kbits/sec, 28 Ksym/sec	7 bits/8-PSK 42 dB, 84 Kbits/sec, 28 Ksym/sec
8 bits/B-PAM 48 dB, 96 Kbits/sec, 96 Ksym/sec	8 bits/Q-PSK 48 dB, 96 Kbits/sec, 48 Ksym/sec	8 bits/8-PAM 48 dB, 96 Kbits/sec, 32 Ksym/sec	8 bits/8-PSK 48 dB, 96 Kbits/sec, 32 Ksym/sec
10 bits/B-PAM 60 dB, 120 Kbits/sec, 120 Ksym/sec	10 bits/Q-PSK 60 dB, 120 Kbits/sec, 60 Ksym/sec	10 bits/8-PAM 60 dB, 120 Kbits/sec, 40 Ksym/sec	10 bits/8-PSK 60 dB, 120 Kbits/sec, 40 Ksym/sec
β) P_{th}, P_e, P_R			
7 bits/B-PAM 4×10^{-6} 4×10^{-6} 1.7 μ Watt	7 bits/Q-PSK 4×10^{-6} 8×10^{-6} 1.7 μ Watt	7 bits/8-PAM 4×10^{-6} 1.2×10^{-5} 11 μ Watt	7 bits/8-PSK 4×10^{-6} 1.2×10^{-5} 3.7 μ Watt
8 bits/B-PAM 10^{-6} 10^{-6} 2.2 μ Watt	8 bits/Q-PSK 10^{-6} 2×10^{-6} 2.2 μ Watt	8 bits/8-PAM 10^{-6} 3×10^{-6} 15 μ Watt	8 bits/8-PSK 10^{-6} 3×10^{-6} 4.8 μ Watt
10 bits/B-PAM 6.4×10^{-8} 6.4×10^{-8} 3.4 μ Watt	10 bits/Q-PSK 6.4×10^{-8} 1.3×10^{-7} 3.4 μ Watt	10 bits/8-PAM 6.4×10^{-8} 1.9×10^{-7} 23 μ Watt	10 bits/8-PSK 6.4×10^{-8} 1.9×10^{-7} 7.4 μ Watt

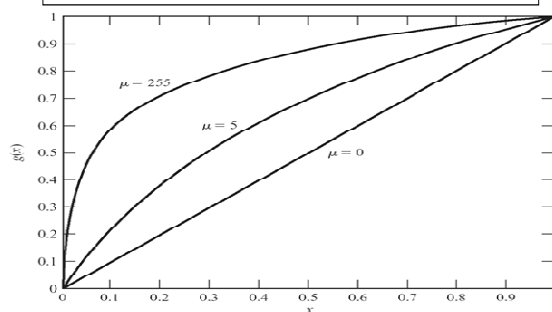


ΤΥΠΟΙ ΣΥΜΠΙΕΣΤΩΝ

Για ένα σήμα $x(t)$ με συμμετρικό PDF και μέγιστη τιμή x_{max}

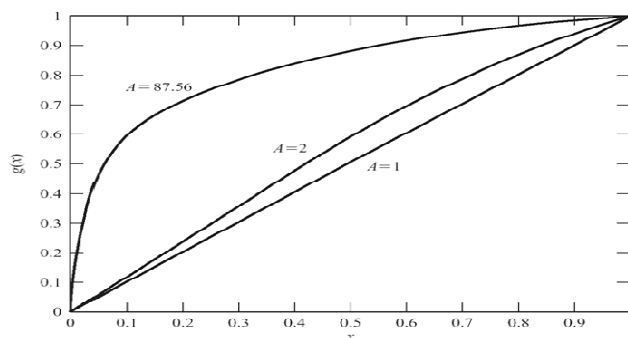
1. Συμπίεστης τύπου 'μ' (ΗΠΑ)

$$g(x) = \frac{\log(1 + \mu |x/x_{max}|)}{\log(1 + \mu)} \operatorname{sgn}(x)$$



2 Συμπίεστης τύπου 'Α' (Καναδάς-Ευρώπη)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{A |x/x_{max}|}{1 + \log A} \operatorname{sgn}(x), & 0 \leq |x/x_{max}| \leq 1/A \\ \frac{1 + \log(A |x/x_{max}|)}{1 + \log A} \operatorname{sgn}(x), & 1/A \leq |x/x_{max}| \leq 1 \end{cases}$$



Στόχος του Βέλτιστου Συμπιεστή είναι για το δοσμένο PDF να απεικονίσει τα άνισα διαστήματα D_1, D_2, \dots, D_N της βέλτιστης διαμέρισης σε διαστήματα σταθερού μήκους Δ .

Χαρακτηριστική Βέλτιστου Συμπιεστή για δεδομένο PDF $f_X(x)$

$$g(x) = y_{\max} \left[\frac{2 \int_{-\infty}^x [f_X(\eta)]^{\frac{1}{3}} d\eta}{\int_{-\infty}^{\infty} [f_X(\eta)]^{\frac{1}{3}} d\eta} - 1 \right]$$

Η ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΠΟΥ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΙ ΣΤΟΝ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ

$$D = \frac{1}{12 \times 4^{\nu}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} [f_X(\eta)]^{\frac{1}{3}} d\eta \right]^3$$

Απαιτήσεις ενός συστήματος PCM σε Εύρος Ζώνης BW και Ισχύ P_r ($\beta=B_c/W$ και $\alpha=P_r/(N_0W)$)

Προφανώς το PCM παράγει δυαδικά δεδομένα με ρυθμό $R_b = \nu f_s = 2\nu W$. Το εύρος ζώνης BW που απαιτείται για τη διαβίβαση του ρυθμού R_b εξαρτάται από το Σύστημα Ψηφιακών Δεδομένων που θα επιλεγεί για τη διαβίβαση.

Για παράδειγμα αν χρησιμοποιηθεί διπλοδυαδικό PAM θα ισχύει $B_c = \nu W$ και στην περίπτωση αυτή

$$\beta = \nu.$$

Απαιτήσεις ενός συστήματος PCM σε Ισχύ P_r ($\alpha=P_r/(N_0W)$)

$$\text{SNR} = \frac{3 \times 4^{\nu} \overline{X^2}}{1 + 4P_b 4^{\nu}}$$

$$P_{th}, P_b: -1 \text{ db}$$

$$\text{Αποδεικνύεται } P_{th} = 4^{-(\nu+2)}$$

Παράδειγμα

Ένα σήμα ομιλίας με εύρος $W=5$ KHz διαβιβάζεται με σύστημα PCM. Για το σκοπό αυτό το σήμα δειγματοληπτείται με ρυθμό $f_s = 12$ KHz και τα δυαδικά δεδομένα διαβιβάζονται χρησιμοποιώντας ένα AWGN κανάλι με λευκό Gaussian θόρυβο φασματικής πυκνότητας $N_0/2=10^{-12}$ Watt/Hz. Για τα ακόλουθα συστήματα PCM:

7 bits/B-PAM	7 bits/B-PSK	7 bits/8-PAM	7 bits/8-PSK
8 bits/B-PAM	8 bits/B-PSK	8 bits/8-PAM	8 bits/8-PSK
10 bits/B-PAM	10 bits/B-PSK	10 bits/8-PAM	10 bits/8-PSK

Να προσδιορίσετε:

α) την ποιότητα στον προορισμό $(S/N)_d$ dB, τον απαιτούμενο ρυθμό διαβίβασης δυαδικών δεδομένων R_b και το απαιτούμενο εύρος ζώνης BW.

β) Την τιμή της πιθανότητας κατοφλίου P_{th} και την αντίστοιχη τιμή της ισχύος λήψης P_r .

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

α) $(S/N)_d$ dB, R_b , BW

7 bits/B-PAM 42 dB 84 Kbits/sec 42 KHz	7 bits/B-PSK 42 dB 84 Kbits/sec 168 KHz	7 bits/8-PAM 42 dB 84 Kbits/sec 14 KHz	7 bits/8-PSK 42 dB 84 Kbits/sec 56 KHz
8 bits/B-PAM 48 dB 96 Kbits/sec 48 KHz	8 bits/B-PSK 48 dB 96 Kbits/sec 192 KHz	8 bits/8-PAM 48 dB 96 Kbits/sec 16 KHz	8 bits/8-PSK 48 dB 96 Kbits/sec 64 KHz
10 bits/B-PAM 60 dB 120 Kbits/sec 60 KHz	10 bits/B-PSK 60 dB 120 Kbits/sec 240 KHz	10 bits/8-PAM 60 dB 120 Kbits/sec 20 KHz	10 bits/8-PSK 60 dB 120 Kbits/sec 80 KHz

β) P_{th} , P_r

7 bits/B-PAM $P_{th}=4 \cdot 10^{-6}$ $P_r=1.7 \mu\text{Watt}$	7 bits/B-PSK $P_{th}=4 \cdot 10^{-5}$ $P_r=1.7 \mu\text{Watt}$	7 bits/8-PAM $P_{th}=4 \cdot 10^{-5}$ $P_r=11 \mu\text{Watt}$	7 bits/8-PSK $P_{th}=4 \cdot 10^{-6}$ $P_r=3.4 \mu\text{Watt}$
8 bits/B-PAM $P_{th}=10^{-6}$ $P_r=2.2 \mu\text{Watt}$	8 bits/B-PSK $P_{th}=10^{-5}$ $P_r=2.2 \mu\text{Watt}$	8 bits/8-PAM $P_{th}=10^{-6}$ $P_r=15 \mu\text{Watt}$	8 bits/8-PSK $P_{th}=10^{-5}$ $P_r=4.8 \mu\text{Watt}$
10 bits/B-PAM $P_{th}=64 \cdot 10^{-9}$ $P_r=3.76 \mu\text{Watt}$	10 bits/B-PSK $P_{th}=64 \cdot 10^{-9}$ $P_r=3.76 \mu\text{Watt}$	10 bits/8-PAM $P_{th}=64 \cdot 10^{-9}$ $P_r=25.4 \mu\text{Watt}$	10 bits/8-PSK $P_{th}=64 \cdot 10^{-9}$ $P_r=8.33 \mu\text{Watt}$

Διατίθεται AWGN κανάλι με απόσβεση $L=40$ dB, θόρυβο στην έξοδο Gaussian λευκό με φασματική πυκνότητα $N_0/2=10^{-12}$ Watt/Hz. Μέσα από το κανάλι αυτό πρέπει να διαβιβαστεί σήμα video ($W=4.5$ MHz) με ποιότητα 48 dB. Πόση είναι η ισχύς εκπομπής P_T του πομπού και το εύρος ζώνης BW που θα χρησιμοποιηθεί, όταν:

- Η διαβίβαση γίνει με PCM/QPSK,
- με PCM/64FSK.

Δεχθείτε ότι για το M -αδικό FSK ισχύει $P_b = \frac{(M-1)}{2} Q\left(\sqrt{\frac{\lambda E_b}{N_0}}\right)$, $\lambda = \log_2(M)$ και

$BW = MR_M/2$ όπου R_M είναι ο χρησιμοποιούμενος ρυθμός διαβίβασης Συμβόλων και E_b η ενέργεια ανά λαμβανόμενο bit.

Στοιχεία από Επεξεργασία Σήματος

Θεωρείστε την εργοδική ακολουθία τυχαίων αριθμών $\{x(n)\}$ $n=1,2,\dots$ με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση

$$\sigma_x^2 = E\{x^2(n)\}.$$

Ορίζουμε ως “Ακολουθία Αυτοσυσχέτισης”,

$$R_x(k), k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$R_x(k) = E\{x(n)x(n-k)\}$$

$$\text{Ισχύει: } R_x(0) = \sigma_x^2 \text{ και } R_x(k) = R_x(-k)$$

Στοιχεία από Επεξεργασία Σήματος (Συνέχεια)

Επειδή η $\{x(n)\}$ είναι εργοδική οι αναμενόμενες τιμές υπολογίζονται επίσης από τα αθροίσματα:

$$R_x(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2} x(n)x(n-k), k = 0, \pm 1, \dots$$

Μερικές φορές χρησιμοποιούμε το Συντελεστή Αυτοσυσχέτισης, $\rho_x(k) = R_x(k)/\sigma_x^2$

Στοιχεία από Επεξεργασία Σήματος (Συνέχεια-2)

Σε ένα σήμα ομιλίας, τα δείγματα ενός τμήματος μικρής διάρκειας, μπορεί να προσεγγιστούν από ένα σήμα που περιγράφεται από:

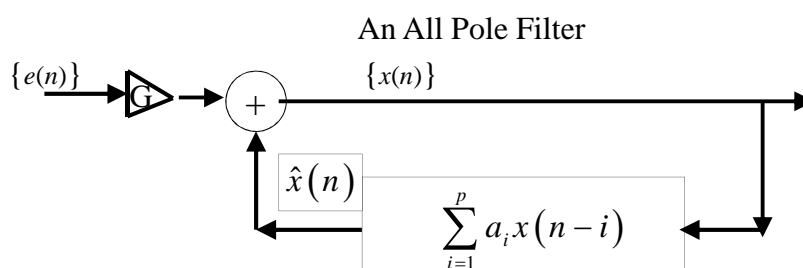
$$x(n) = \sum_{i=1}^p a_i x(n-i) + Ge(n).$$

όπου a_1, a_2, \dots, a_p σταθεροί συντελεστές για κάθε τμήμα μικρής διάρκειας, $e(n)$ τυχαία ακολουθία με κατανομή Gauss, $R_e(m) = 0$ όταν m διάφορο το μηδενός και $R_e(0) = \sigma_e^2 = 1$, και $R_e(k) = 0$ k μη μηδέν. Τέλος G σταθερά.

Στοιχεία από Επεξεργασία Σήματος (Συνέχεια-3)

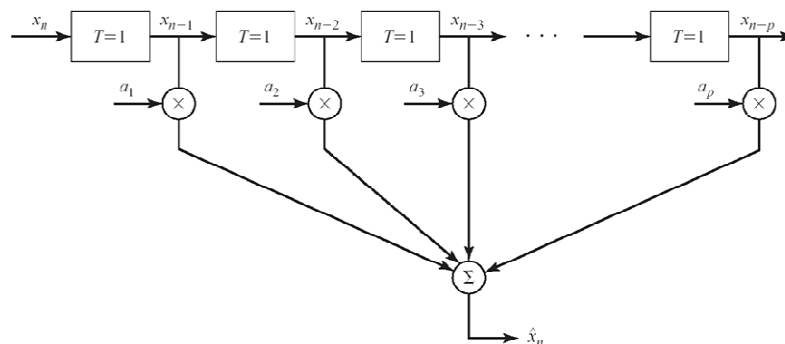
$$x(n) = \sum_{i=1}^p a_i x(n-i) + Ge(n).$$

Ένα μοντέλο σαν και αυτό που περιγράφει ο πιο πάνω τύπος καλείται: “Autoregressive Moving Average-ARMA”

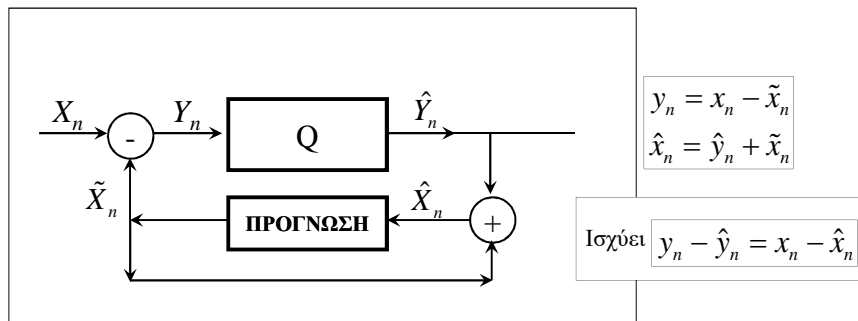


$$\hat{x}(n) = \sum_{i=1}^p a_i x(n-i)$$

Ισοδύναμα:



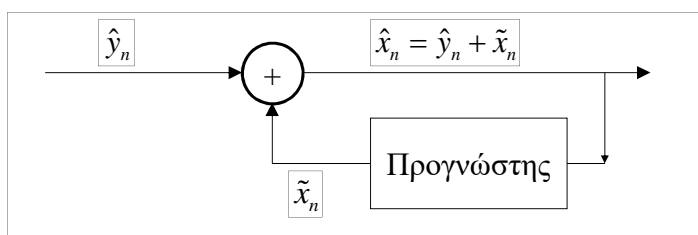
Διαφορική Παλμοκωδική Διαμόρφωση (DPCM)



Παρατήρηση 1: Ισχύς $\{y_n\}$ μικρότερη από ισχύ $\{x_n\}$.

Παρατήρηση 2: Αφού $\hat{x}_n = \hat{y}_n + \tilde{x}_n$ η αποθήκευση/διαβίβαση του του x_n γίνεται μέσω του \hat{y}_n και η ανακατασκευή του θα γίνει από το \hat{y}_n και την πρόγνωση που στηρίζεται σε προηγούμενες κβαντισμένες τιμές του x_n

Στο Δέκτη

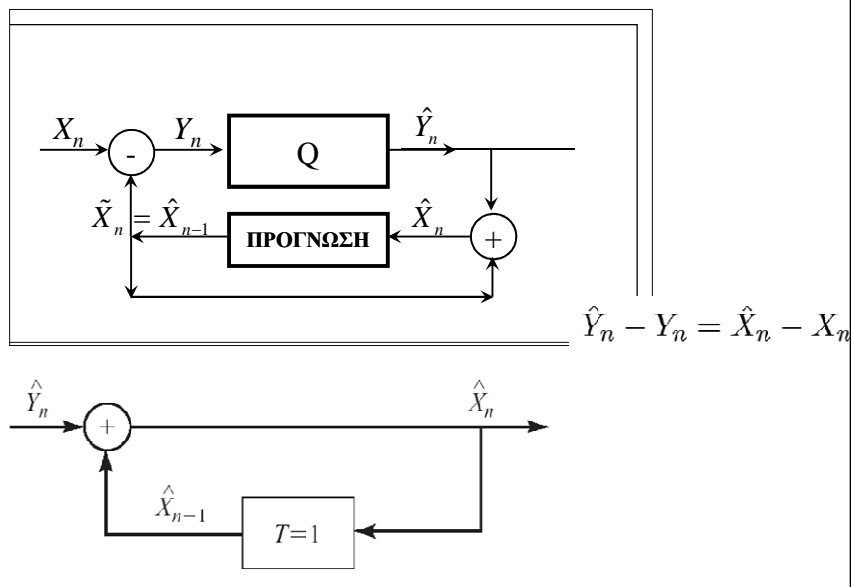


\hat{x}_n : Ανακατασκευασμένο δείγμα της ακολουθίας $\{x_n\}$

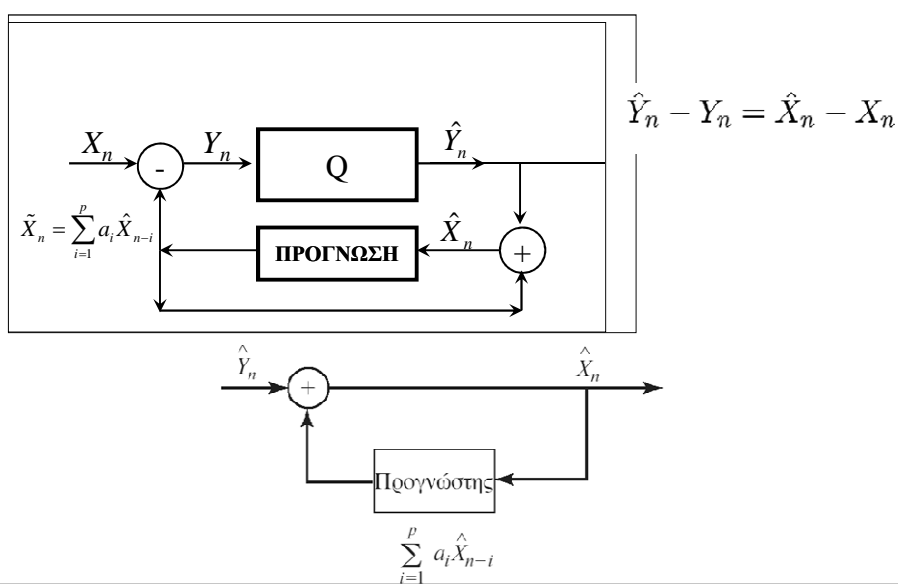
\hat{y}_n : Διαβιβασμένο δείγμα της ακολουθίας $\{y_n\}$

\tilde{x}_n : Πρόγνωση της $\{x_n\}$ βασισμένη σε προηγούμενα κβαντισμένα δείγματα, $\hat{x}_{n-1}, \hat{x}_{n-2}, \dots$

Παράδειγμα: Για Πρόγνωση Χρησιμοποιείται το Προηγούμενο Κβαντισμένο Δείγμα



Για Πρόγνωση Χρησιμοποιείται Γραμμικός Συνδυασμός Προηγούμενων Κβαντισμένων Δειγμάτων



Παράδειγμα

Η ακολουθία δειγμάτων $\{x_n\}$ ενός πραγματικού σήματος παρουσιάζει μέση τιμή μηδέν, διακύμανση σ_x^2 , και ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης $\rho_1 = E\{x_i x_{i+1}\} / \sigma_x^2 = 0,95$. Αν ως πρόγνωση του $x(n)$ οριστεί η

$$\tilde{x}_n = \hat{x}_{n-1}$$

και αντί να κβαντίσουμε απευθείας την $\{x_n\}$ κβαντίζεται η $\{y_n\}$

$$y_n = x_n - \tilde{x}_n = x_n - \hat{x}_{n-1}$$

Να υπολογίσετε τη βελτίωση που θα έχετε στο SQNR αν χρησιμοποιήσετε τον ίδιο αριθμό N σταθμών κβάντισης. Να δεχθείτε ότι ισχύει:

$$x_n \approx \hat{x}_n$$

Παράδειγμα**Λύση**

Αν κβαντίσουμε απευθείας την $\{x_n\}$ με N στάθμες:

$$(\text{SQNR})_{\text{PCM}} = \sigma_x^2 / \sigma_q^2 = \sigma_x^2 / (\sigma_x^2 / f(N)) = f(N)$$

Αν η κβάντιση της x_n γίνει έμμεσα μέσω της y_n :

$$q_n = x_n - \hat{x}_n = y_n - \hat{y}_n \Rightarrow \sigma_q^2 = \sigma_y^2 / f(N)$$

$$(\text{SQNR})_{\text{DPCM}} = \sigma_x^2 / \sigma_q^2 = \sigma_x^2 / (\sigma_y^2 / f(N)) = (\sigma_x^2 / \sigma_y^2) f(N)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= E[y_n^2] = E[(x_n - \hat{x}_{n-1})^2] \approx E[(x_n - x_{n-1})^2] = \\ &= E[x_n^2 + x_{n-1}^2 - 2x_n x_{n-1}] = 2\sigma_x^2 - 2E[x_n x_{n-1}] \\ &= 2\sigma_x^2(1 - \rho_1) = 2\sigma_x^2(1 - 0,95) = 0,1\sigma_x^2 \end{aligned}$$

$$(\text{SQNR})_{\text{DPCM}} / (\text{SQNR})_{\text{PCM}} = 10$$

Παράδειγμα

Η ακολουθία δειγμάτων $\{x_n\}$ ενός πραγματικού σήματος παρουσιάζει μέση τιμή μηδέν, και διακύμανση σ_x^2 . Αν ως πρόγνωση του $x(n)$ οριστεί:

$$\tilde{x}_n = a_1 \hat{x}_{n-1} + a_2 \hat{x}_{n-2}$$

Να υπολογίσετε τα a_1 και a_2 ώστε να προκύψει μέγιστη τιμή του πηλίκου $(\text{SQNR})_{\text{DPCM}}/(\text{SQNR})_{\text{PCM}}$, και να υπολογίσετε την τιμή αυτή του μεγίστου. Δεχθείτε $\rho_1=0.6$ και $\rho_2=0.6^2$. Επίσης δεχθείτε ότι ισχύει

$$\hat{x}_n \approx x_n$$

Λύση**Λύση**

Από το προηγούμενο παράδειγμα προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή του λόγου $(\text{SQNR})_{\text{DPCM}}/(\text{SQNR})_{\text{PCM}}$ συμβαίνει όταν η σ_y^2 γίνει ελάχιστη.

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - a_1 x_{n-1} - a_2 x_{n-2} \Rightarrow E[y_n^2] = E[(x_n - a_1 x_{n-1} - a_2 x_{n-2})^2] = \\ &= \sigma_x^2 + a_1^2 \sigma_x^2 + a_2^2 \sigma_x^2 - 2a_1 R(1) - 2a_2 R(2) + 2a_1 a_2 R(1) = \\ &= \sigma_x^2 [1 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 \rho_1 - 2a_2 \rho_2 + 2a_1 a_2 \rho_1] \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας ως προς a_1 και a_2 και θέτοντας μηδέν τις παραγώγους προκύπτει:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1 &= \rho_1 \\ \rho_1 \alpha_1 + \alpha_2 &= \rho_2 \end{aligned} \Rightarrow \alpha_1 = \rho_1, \alpha_2 = 0 \quad \sigma_y^2 = (1 - \rho_1^2) \sigma_x^2 = 0.64 \sigma_x^2$$

$$\text{Οπότε } (\text{SQNR})_{\text{DPCM}}/(\text{SQNR})_{\text{PCM}} = 1.56$$

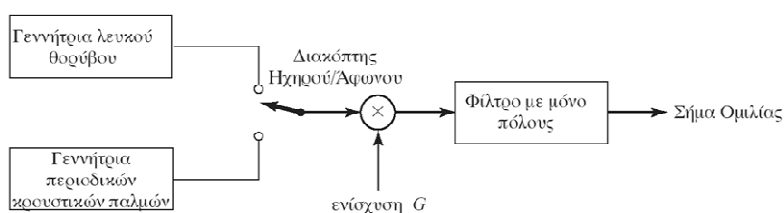
ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ-ΣΥΝΘΕΣΗΣ

**Κωδικοποιητής Γραμμικής Πρόγνωσης
Linear Predictive Coding -LPC**

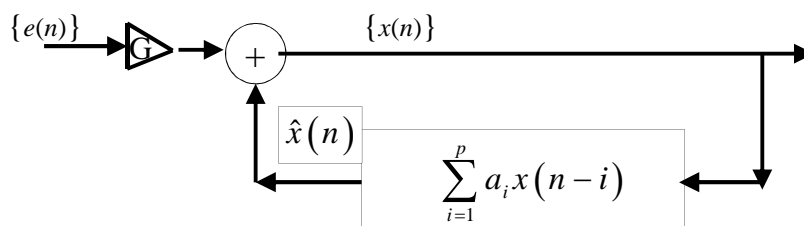
$$X_n = \sum_{i=1}^p a_i X_{n-i} + Gw_n$$

w_n : Καινοτόμος Διαδικασία
 $\{a_i\}$: Συντελεστές Φίλτρου
 p : Αριθμός συντελεστών

$\{a_i\}$: Συντελεστές Φίλτρου παραμένουν σταθεροί για 20-30 msec



An All Pole Filter



Από Ομιλία 20 msec, $N=160$ δείγματα ($f_s=8\text{KHz}$),
προσδιορίζονται οι παράμετροι $\{a_i, i=1,2,\dots,p\}$, G, f_0 , και τύπος
διέγερσης σήματος:

Οι συντελεστές προσδιορίζονται έτσι ώστε:

$$\hat{x}_n = \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} \quad \text{για } 1 \leq n \leq N$$

$$Ge_n = x_n - \hat{x}_n = x_n - \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k}$$

$$E_p = G^2 E[e_n^2] = E\left[\left(x_n - \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k}\right)^2\right]$$

Να υπολογιστούν τα $a_k, k=1,2,\dots,p$ ώστε E_p ελάχιστο.

$$E_p = E\left[\left(x_n - \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k}\right)^2\right]$$

Να προσδιοριστούν τα $a_k, k=1,2,\dots,p$ έτσι ώστε σφάλμα E_p να
γίνει ελάχιστο.

$$E_p = E\left[x_n^2 + \sum_{k=1}^p \sum_{m=1}^p a_k a_m x_{n-k} x_{n-m} - 2 \sum_{k=1}^p a_k x_n x_{n-k}\right]$$

$$E_p = R_x(0) + \sum_{k=1}^p a_k \sum_{m=1}^p a_m R_x(m-k) - 2 \sum_{k=1}^p a_k R_x(k)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial a_i} = 2 \sum_{k=1}^p a_k R_x(i-k) - 2R_x(i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$\sum_{k=1}^p a_k R_x(i-k) = R_x(i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

Θέτοντας για συντομία $R_x(i) = R_i$

$$\begin{bmatrix} R_0 & R_{-1} & \cdots & R_{1-p} \\ R_1 & R_0 & \cdots & R_{2-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{p-1} & R_{p-2} & \cdots & R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{R}_0 & \hat{R}_1 & \cdots & \hat{R}_{p-1} \\ \hat{R}_1 & \hat{R}_0 & \cdots & \hat{R}_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{R}_{p-1} & \hat{R}_{p-2} & \cdots & \hat{R}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{R}_1 \\ \hat{R}_2 \\ \vdots \\ \hat{R}_p \end{bmatrix}, \quad \hat{R}_i = \frac{1}{N-i} \sum_{n=i+1}^N x_n x_{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, p$$

Πίνακας Toeplitz Εξισώσεις **Yule-Walker**

Επίλυση με Αλγόριθμο Levinson-Durbin με πολυπλοκότητα $O(p^2)$

$$\sum_{k=1}^p a_k R_x(i-k) = R_x(i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις:

προκύπτει η ελάχιστη τιμή του σφάλματος:

$$E_p = G^2 E[e_n^2] = G^2 = E \left[\left(x_n - \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} \right)^2 \right]$$

$$= E \left[\left(x_n^2 + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_i a_j x_{n-i} x_{n-j} - 2 \sum_{k=1}^p a_k x_n x_{n-k} \right) \right]$$

$$G^2 = R_0 + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_i a_j R_{|i-j|} - 2 \sum_{k=1}^p a_k R_k = R_0 + \sum_{i=1}^p a_i \sum_{j=1}^p a_j R_{|i-j|} - 2 \sum_{k=1}^p a_k R_k$$

Όμως οι συντελεστές έχουν επιλεγεί ως:

$$\sum_{k=1}^p a_k R_x(i-k) = R_x(i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

Οπότε

$$G^2 = R_0 + \sum_{i=1}^p a_i R_i - 2 \sum_{k=1}^p a_k R_k = R_0 - \sum_{i=1}^p a_i R_i$$

$$G^2 = R_0 - \sum_{i=1}^p a_i R_i$$

$$G = \sqrt{R_0 - \sum_{i=1}^p a_i R_i}$$

$$G^2 = R_0 - \sum_{i=1}^p a_i R_i$$

$$G = \sqrt{R_0 - \sum_{i=1}^p a_i R_i}$$

Προσδιορισμός f_0 και τύπου διέγερσης,
κβάντιση συντελεστών,
δημιουργία record

1 record των 20 msec

H/A (1 bit), f_0 (6 bits), G(5 bits) 8-10 bits/coef
Έως 4800 bits/sec για διανυσματική κβάντιση