

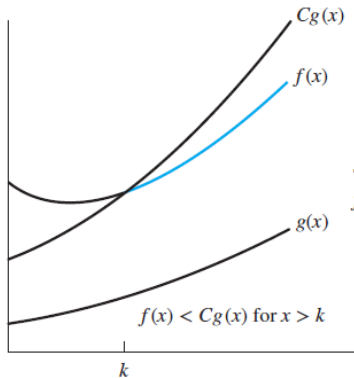
# Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών  
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2025-2026

# Ασυμπτωτικός Συμβολισμός



The part of the graph of  $f(x)$  that satisfies  $f(x) < Cg(x)$  is shown in color.

**The function  $f(x)$  is  $O(g(x))$ .**

## Άσκηση 1

Δώστε μια εκτίμηση για το μεγάλο- $O$  των ακόλουθων συναρτήσεων.

a  $n \log(n^2 + 1) + n^2 \log n$

b  $n^{2^n} + n^{n^2}$

$$\bullet f(n) = n \log(n^2 + 1) + n^2 \log n$$

Παρατηρούμε ότι:  $n \log(n^2 + 1) \leq n \log(2n^2)$ , εφόσον  $2n^2 > n^2 + 1$  για  $n > 1$

Συνεπώς:  $f(n) \leq n \log(2n^2) + n^2 \log n = n \log 2 + 2n \log n + n^2 \log n$

Ο τρίτος όρος αυξάνεται πιο γρήγορα και συνεπώς  $f(n) = O(n^2 \log n)$ .

ⓑ  $f(n) = n^{2^n} + n^{n^2} \leq n^{2^n} + n^{2^n} = 2n^{2^n}$  για  $n > 5$

καθώς παρατηρούμε ότι  $n^2 < 2^n$  για  $n > 5$ .

Συνεπώς  $f(n) = O(n^{2^n})$ .

## Άσκηση 2

Να δείξετε ότι η  $f(n) = 2^n + 17$  είναι  $O(3^n)$

## Άσκηση 2

Να δείξετε ότι η  $f(n) = 2^n + 17$  είναι  $O(3^n)$

Για  $n > 5$ ,  $2^n + 17 \leq 2^n + 2^n = 2 * 2^n \leq 2 * 3^n$

Αυτό δείχνει ότι η  $f(n)$  είναι  $O(3^n)$ , (μάρτυρες  $k = 5$  και  $C = 2$ ).

## Άσκηση 3

Να δείξετε ότι α) η  $x \log x$  είναι  $O(x^2)$ , αλλά β) η  $x^2$  δεν είναι  $O(x \log x)$

## Άσκηση 3

Να δείξετε ότι α) η  $x \log x$  είναι  $O(x^2)$ , αλλά β) η  $x^2$  δεν είναι  $O(x \log x)$

α) Γνωρίζουμε ότι  $x < 2^x \Leftrightarrow \log x < x$ , για  $x > 0$ .

Άρα,  $x \log x < x^2$  και συνεπώς  $O(x^2)$  με μάρτυρες  $C = 1, k = 0$ .

Θα δείξουμε ότι  $x^2 \notin O(x \log x)$ . Υποθέτουμε προς άτοπο ότι  $x^2 \in O(x \log x)$ . Τότε υπάρχουν σταθερές  $C > 0$  και  $k > 0$  ώστε για κάθε  $x > k$  να ισχύει

$$x^2 \leq Cx \log x.$$

Διαιρώντας με  $x > 0$ , παίρνουμε  $x \leq C \log x$  για κάθε  $x > k$  δηλαδή  $\log x \geq \frac{x}{C}$  για κάθε  $x > k$ .

Θέτουμε τώρα  $x = 2^m$  με  $m \in \mathbb{N}$ . Για αρκετά μεγάλο  $m$  ισχύει  $2^m > k$ , άρα

$$\log(2^m) \geq \frac{2^m}{C}.$$

Άρα:

$$m \log 2 \geq \frac{2^m}{C} \iff 2^m \leq C(\log 2) m.$$

Θέτουμε  $A = C \log 2 > 0$ . Τότε προκύπτει  $2^m \leq Am$  για όλα τα αρκετά μεγάλα  $m$ .

Επιλέγουμε  $m_0 \in \mathbb{N}$  τέτοιο ώστε  $m_0 > 2A$ . Τότε για κάθε  $m \geq m_0$  ισχύει  $m > 2A$  και άρα

$$2^m \geq 2m > Am,$$

που αντιφάσκει με την ανισότητα  $2^m \leq Am$ . Άρα η αρχική υπόθεση ήταν λανθασμένη και συνεπώς  $x^2 \notin O(x \log x)$ .

## Άσκηση 4

Έστω  $k$  θετικός ακέραιος. Να δείξετε ότι η  $f(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$  είναι  $O(n^{k+1})$

## Άσκηση 4

Έστω  $k$  θετικός ακέραιος. Να δείξετε ότι η  $f(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$  είναι  $O(n^{k+1})$

$$1^k + 2^k + \dots + n^k \leq n^k + n^k + \dots + n^k = n * n^k = n^{k+1}.$$

Συνεπώς ισχύει ότι η  $f(n)$  είναι  $O(n^{k+1})$  με μάρτυρες  $C = 1, \lambda = 1$

## Άσκηση 5

- 1 Έστω  $f(x) = O(g(x))$  όπου  $f$  και  $g$  αύξουσες και μη φραγμένες συναρτήσεις. Δείξτε ότι  $\log(f(x)) = O(\log(g(x)))$
- 2 Έστω  $f(x) = O(g(x))$ . Προκύπτει ότι  $2^{f(x)} = O(2^{g(x)})$ ;

## Άσκηση 5

❶ Έστω  $f(x) = O(g(x))$  όπου  $f$  και  $g$  αύξουσες και μη φραγμένες συναρτήσεις. Δείξτε ότι  $\log(f(x)) = O(\log(g(x)))$

❶ Εφόσον  $f$  και  $g$  αύξουσες και μη φραγμένες, από την υπόθεση προκύπτει ότι υπάρχουν  $k$  και  $C$  τέτοια ώστε  $f(x) \leq Cg(x)$  για  $x > k$ . Συνεπώς  $\log(f(x)) \leq \log C + \log(g(x)) \leq \log(g(x)) + \log(g(x)) = 2 \log(g(x))$ , εφόσον η  $g$  δεν είναι φραγμένη, για κάποιο  $x_0$  και  $x > x_0$ ,  $g(x) > C$ . Συνεπώς  $\log(f(x)) = O(\log(g(x)))$

## Άσκηση 5

❷ Έστω  $f(x) = O(g(x))$ . Προκύπτει ότι  $2^{f(x)} = O(2^{g(x)})$ ;

❷ Όχι. Αρκεί ένα αντιπαράδειγμα  $f(x) = 2x$  και  $g(x) = x$ . Προφανώς ισχύει  $f(x) = O(g(x))$ .

Ωστόσο,  $2^{f(x)} = 2^{2x} = 4^x$  και  $2^{g(x)} = 2^x$ .

Παρατηρούμε ότι για κάθε  $C$ ,  $f(x) > Cg(x)$ ,

δηλαδή  $4^x > C * 2^x \Leftrightarrow 2^x > C$ , για  $x > \log_2 C$ .

Συνεπώς,  $2^{f(x)} \neq O(2^{g(x)})$

## Άσκηση 6

Δείξτε ότι  $n! \neq O(2^n)$ .

## Άσκηση 6

Δείξτε ότι  $n! \neq O(2^n)$ .

## Απόδειξη με αντίφαση.

Έστω ότι υπάρχει  $C$  και  $k$  έτσι ώστε για κάθε  $n > k$  να ισχύει

$$n! \leq C \cdot 2^n \Leftrightarrow \frac{n!}{2^n} \leq C.$$

$$\text{Ωστόσο, } \frac{n!}{2^n} = \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \geq \frac{n}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$$

Τότε  $\frac{n}{4} \leq \frac{n!}{2^n} \leq C$  που είναι άτοπο γιατί δεν υπάρχει αριθμός  $C$  για τον οποίο:

$$\frac{n}{4} \leq C, \forall n > k, \text{ π.χ. } n = 5 \cdot C$$

## Άσκηση 7

Να τοποθετήσετε σε σειρά τις συναρτήσεις:

$$\sqrt{n}, 1000 \log n, n \log n, 2n!, 2^n, 3^n, n^2/1.000.000,$$

ώστε κάθε συνάρτηση να είναι μεγάλο- $O$  της επόμενης.

## Άσκηση 7

Να τοποθετήσετε σε σειρά τις συναρτήσεις:

$$\sqrt{n}, 1000 \log n, n \log n, 2n!, 2^n, 3^n, n^2/1000000,$$

ώστε κάθε συνάρτηση να είναι μεγάλο-Ο της επόμενης.

$$1000 \log n, \sqrt{n}, n \log n, n^2/1.000.000, 2^n, 3^n, 2n!$$

Η σειρά των 6 πρώτων συναρτήσεων είναι γνωστή από τη θεωρία. Θα αποδείξουμε ότι  $m^n = O(2n!)$  για κάθε σταθερό  $m > 0$ .

$$m^n = m^m * m^{n-m} < m^m * (m+1) * (m+2) \cdots * (m+n-m) = m^m * (m+1) * (m+2) * \cdots * n$$

$$m^n < m^m * \frac{n!}{m!} = \frac{m^m}{m!} * n!$$

Συνεπώς για κάθε  $m$  μπορούμε να επιλέξουμε μάρτυρες  $C = \frac{m^m}{2m!}$  και  $k = 1$  σύμφωνα με τον ορισμό του Μεγάλου-Ο ώστε για  $n > k$ ,  $m^n < \frac{m^m}{2m!} * 2n!$

## Άσκηση 8

Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $n^n$  δεν είναι  $O(n!)$ .

## Άσκηση 8

Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $n^n$  δεν είναι  $O(n!)$ .

Έστω ότι η συνάρτηση είναι  $O(n!)$ .

Τότε θα υπήρχαν  $k$  και  $C$  ώστε  $n^n \leq C * n!$  για κάθε  $n > k$

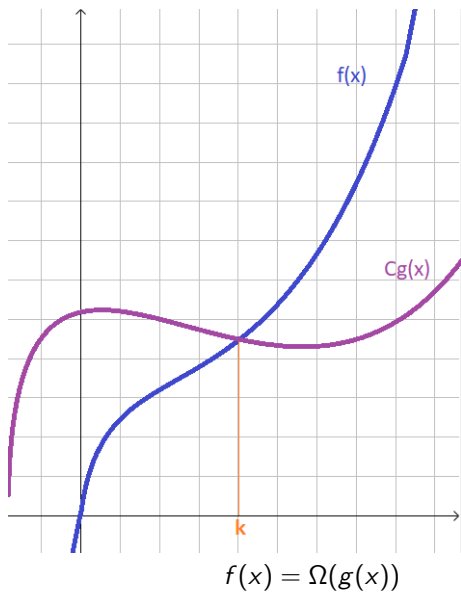
Ισοδύναμα,  $\frac{n^n}{n!} \leq C$ .

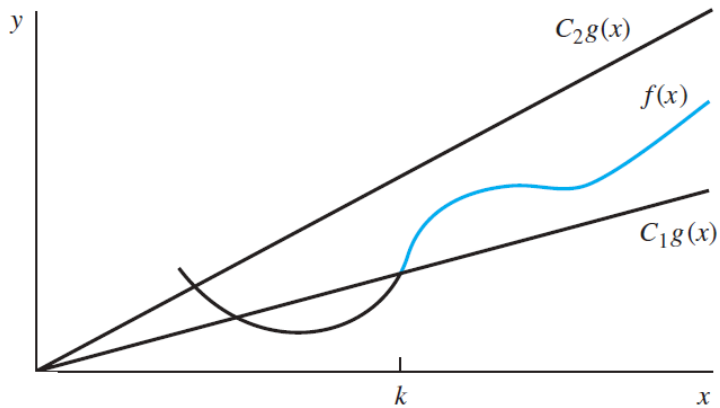
Παρατηρούμε ότι  $\frac{n^n}{n!} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdots \frac{n}{1}$ .

Αυτό είναι ένα γινόμενο του οποίου όλοι οι όροι πλην του τελευταίου είναι σίγουρα μεγαλύτεροι της μονάδας και ο τελευταίος όρος  $n$ .

Συνεπώς,  $\frac{n^n}{n!} > n$ . Τότε όμως ισχύει  $n < \frac{n^n}{n!} \leq C$  για κάθε  $n > k$ , που είναι άτοπο γιατί δεν υπάρχει αριθμός  $C$  για τον οποίο  $n < C$  για κάθε  $n > k$ .

(Προφανώς αν  $k > C$ . Αν  $k \leq C$  μπορούμε να επιλέξουμε  $n > k = C + 1$ ).





$$f(x) = \Theta(g(x))$$

## Άσκηση

Να αποδείξετε: α) ότι  $f + g = \Theta(\max(f, g))$  και β) αν  $f_1 = \Theta(g_1)$  και  $f_2 = \Theta(g_2)$  τότε  $f_1 + f_2 = \Theta(\max(g_1, g_2))$

α) Γνωρίζουμε ότι  $\frac{1}{2}(f + g) \leq \max(f, g) \leq (f + g)$

Συνεπώς  $\max(f, g) \leq (f + g) \leq 2 \max(f, g)$ , Όπερ έδει δείξαι.

β) Αναλόγως, αν  $f_1 = \Theta(g_1)$  και  $f_2 = \Theta(g_2)$  τότε  $f_1 + f_2 = \Theta(\max(g_1, g_2))$

$c_1 g_1(x) \leq f_1(x) \leq C_1 g_1(x)$  και  $c_2 g_2(x) \leq f_2(x) \leq C_2 g_2(x)$

Συνεπώς,  $f_1(x) + f_2(x) \leq C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x)$ .

Χωρίς βλάβη της γενικότητας  $\max(g_1, g_2) = g_1$ .

Έπεται  $f_1(x) + f_2(x) \leq C_1 g_1(x) + C_2 g_1(x) = (C_1 + C_2) \max(g_1(x), g_2(x))$  και  $f_1 + f_2 = O(\max(g_1, g_2))$ .

Επίσης,  $f_1(x) + f_2(x) \geq c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) \geq c_1 g_1(x) = c_1 \max(g_1, g_2)$

Συνεπώς  $f_1 + f_2 = \Omega(\max(g_1, g_2))$  και  $f_1 + f_2 = \Theta(\max(g_1, g_2))$

## Άσκηση 9

Να τοποθετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις σε σειρά κατά τάξη:

$$f_1(n) = n^2 + (\log(n))^2, \quad f_2(n) = n^2 + n, \quad f_3(n) = n^2 + \log(2^n) + 1,$$

$$f_4(n) = (n + 1)^3 - (n - 1)^3, \quad f_5(n) = (n + \log(n))^2, \quad f_6(n) = n^2 + 2^n,$$

$$f_7(n) = n^2 + 2^{100}, \quad f_8(n) = n^2 + 2^{2n}, \quad f_9(n) = n^2 + n!$$

$$f_{10}(n) = n^2 + 3^n, \quad f_{11}(n) = (n^2 + 1)^2$$

## Άσκηση 9

Να τοποθετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις σε σειρά κατά τάξη:

$$\begin{array}{lll}
 f_1(n) = n^2 + (\log(n))^2, & f_2(n) = n^2 + n, & f_3(n) = n^2 + \log(2^n) + 1, \\
 f_4(n) = (n+1)^3 - (n-1)^3, & f_5(n) = (n + \log(n))^2, & f_6(n) = n^2 + 2^n, \\
 f_7(n) = n^2 + 2^{100} & f_8(n) = n^2 + 2^{2n}, & f_9(n) = n^2 + n! \\
 f_{10}(n) = n^2 + 3^n & f_{11}(n) = (n^2 + 1)^2 & 
 \end{array}$$

Από την μικρότερη στην μεγαλύτερη τάξη έχουμε τις εξής:

- $\Theta(n^2)$  για τις συναρτήσεις  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_7$ .
- $\Theta(n^4)$  για την συνάρτηση  $f_{11}$ .
- $\Theta(2^n)$  για την συνάρτηση  $f_6$ .
- $\Theta(3^n)$  για την συνάρτηση  $f_{10}$ .
- $\Theta(4^n)$  για την συνάρτηση  $f_8$ .
- $\Theta(n!)$  για την συνάρτηση  $f_9$ .

## Άσκηση 10

Για κάθε μία από τις επόμενες παραστάσεις και κάθε ένα από τα σύμβολα  $O$ ,  $\Omega$ ,  $\Theta$  να εξετάσετε αν το σύμβολο μπορεί να αντικαταστήσει το  $\square$  ώστε η πρόταση που προκύπτει να είναι αληθής.

	$O$	$\Omega$	$\Theta$
1. $\sum_{k=1}^n \frac{n^2}{k} = \square(n^3)$			
2. $n^{\log n} = \square(2^{n \log n})$			
3. $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^k = \square(3^n)$			
4. $n \log^2 n = \square(n^2)$			
5. $n^n = \square(n!)$			
6. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = \square(3^n)$			

1  $f(n) = \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{k} = n^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{3} + \dots + \frac{n^2}{n} \leq n^2 + n^2 + \dots + n^2 = n * n^2 = n^3$ .  
 Συνεπώς  $O(n^3)$ .

Επιπλέον, δεν είναι  $f(n) = \Omega(n^3)$  το οποίο ισχύει ανν  $n^3 = O(f(n))$ .

Απόδειξη με αντίφαση:  $\exists c \exists n_0$  ώστε  $n^3 \leq c \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{k} = cn^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  για  $n > n_0$ . Ισχύει (ιδιότητες αρμονικών σειρών)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < 1 + \log n$ .  
 Συνεπώς:  $n^3 < cn^2(1 + \log n)$ .

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε  $\log n > 1$ .

Τότε,  $n^3 < 2cn^2 \log n$  ή  $n < c \log n$ . Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί γνωρίζουμε ότι  $n \neq O(\log n)$ . Προφανώς,  $f(n) \neq \Theta(n^3)$ .

2  $2^{n \log n} = n^n > n^{\log n}$ . Συνεπώς  $n^{\log n} = O(2^{n \log n})$  (μάρτυρες  $c = 1, n_0 = 2$ ).  
 Προφανώς,  $n^{\log n} \neq \Omega(2^{n \log n}) = \Omega(n^n)$  (και συνεπώς ούτε και μεγάλο- $\Theta$ ),  
 διότι  $\log(n) \neq \Omega(n)$ .

3 Θα βασιστούμε στην ταυτότητα  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$ .

Προφανώς,  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k = 4^n$ .

Συνεπώς,  $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k - \binom{n}{0} 3^0 = 4^n - 1$  και  $\Omega(3^n)$ .

Προφανώς δεν ισχύει  $O(3^n)$  και  $\Theta(3^n)$

4 Από τη θεωρία ισχύει ότι  $\log^2 n = O(n)$  και συνεπώς  $n \log^2 n = O(n^2)$ . Το αντίστροφο δεν ισχύει επομένως δεν είναι  $\Omega(n^2)$  και συνεπώς ούτε και μεγάλο- $\Theta$ .

5  $n^n \geq n * (n-1) * (n-2) * \dots * 1 = n!$ . Συνεπώς,  $n^n = \Omega(n!)$ . Δεν ισχύει  $n^n = O(n!)$ . Λογαριθμίζουμε τις 2 πλευρές της ανισότητας  $n^n \leq c * n!$ :

$\log n^n \leq \log(c * n!) \Leftrightarrow n \log n \leq \log c + \log n + \log(n-1) + \dots + \log 1$ .

Εφόσον  $\log 1 = 0$ , έχουμε  $n$  λογαριθμικούς όρους από κάθε πλευρά. Για

κάθε  $c$  αν λάβουμε  $n > c$ , τότε προφανώς  $\log n^n > \log(c * n!)$ , που είναι η άρνηση της πρότασης.

6 Βάσει της ταυτότητας του 3. προκύπτει  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n$ . Προφανώς είναι  $O(3^n), \Omega(3^n), \Theta(3^n)$ .

## Άσκηση 11

Έστω  $f$ ,  $g$  θετικές συναρτήσεις. Αποφασίστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

- 1  $4n^2 + 5n - 9 = \Omega(10n^2)$
- 2  $\log(n!) = \Theta(n \log n)$
- 3  $f(n) + g(n) = \Theta(\min(g(n), f(n)))$

- ❶ Αληθής. Για  $c = \frac{1}{5}$ ,  $n_0 = 2$ , έχουμε  $4n^2 + 5n - 9 \geq c(10n^2) = 2n^2, \forall n > n_0$
- ❷ Αληθής.  $n! \leq n^n \Leftrightarrow \log(n!) \leq n * \log n$ . Συνεπώς,  $\log(n!) = O(n \log n)$  (1).  
 Για το  $\Omega$ :  $\log(n!) = \sum_{i=1}^n \log i \geq \sum_{i=\lceil n/2 \rceil}^n \log i \geq \sum_{i=\lceil n/2 \rceil}^n \log \frac{n}{2} \geq$   
 $\frac{n}{2} \log \frac{n}{2} \geq \frac{n}{2} \log \sqrt{n} = \frac{1}{4} n \log n$  (αν  $n > 4, n/2 > \sqrt{n}$ ).  
 Συνεπώς,  $\log(n!) = \Omega(n \log n)$  και από (1)  $\log(n!) = \Theta(n \log n)$
- ❸ Ψευδής. Υπάρχει προφανές αντιπαράδειγμα. Π.χ.  $f(n) = n^2$  και  $g(n) = n$ . Τότε  $f(n) + g(n) = \Theta(n^2)$  και  $\Theta(\min(g(n), f(n))) = \Theta(n)$

## Άσκηση 12

Δώστε ένα παράδειγμα 2 συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{Z}^+$   $f(n)$  και  $g(n)$  για τις οποίες δεν ισχύει ούτε  $f(n) = O(g(n))$  ούτε  $g(n) = O(f(n))$ .

## Άσκηση 12

Δώστε ένα παράδειγμα 2 συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{Z}^+$   $f(n)$  και  $g(n)$  για τις οποίες δεν ισχύει ούτε  $f(n) = O(g(n))$  ούτε  $g(n) = O(f(n))$ .

Έστω  $f, g : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$

$f(n) = 0$ , αν  $n$  περιττός

$f(n) = n^n$ , αν  $n$  άρτιος

$g(n) = n$

Προφανώς δεν υπάρχουν  $k$  και  $C$  τέτοια ώστε για  $n > k$  να ισχύει

$f(n) \leq Cg(n)$ , αφού  $\forall C \forall k$  υπάρχει άρτιος  $n > k$  ώστε

$f(n) = n^n \geq C \cdot n \Leftrightarrow n^{n-1} \geq C$ . (μη φραγμένη συνάρτηση)

Αντιστοίχως, δεν υπάρχουν  $k$  και  $C$  τέτοια ώστε για  $n > k$  να ισχύει

$g(n) \leq Cf(n)$ , αφού  $\forall C \forall k$  υπάρχει περιττός  $n > k$  ώστε  $g(n) = n \geq C \cdot 0 = 0$ .

### Άσκηση 13

Δώστε ένα παράδειγμα 2 **αυξουσών** συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{Z}^+$   $f(n)$  και  $g(n)$  για τις οποίες δεν ισχύει ούτε  $f(n) = O(g(n))$  ούτε  $g(n) = O(f(n))$ .

Έστω  $f, g : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$

$$f(n) = (2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)! \text{ και } g(n) = (2\lceil \frac{n}{2} \rceil)!$$

**Αν  $n = 2m + 1$  περιττός:**

$$f(n) = (2\lfloor m + \frac{1}{2} \rfloor + 1)! = (2m + 1)!$$

$$g(n) = (2\lceil m + \frac{1}{2} \rceil)! = (2(m + 1))! = (2m + 2)!$$

**Αν  $n = 2m$  άρτιος:**

$$f(n) = (2m + 1)!, g(n) = (2m)!$$

Προφανώς δεν υπάρχουν  $k$  και  $C$  τέτοια ώστε για  $n > k$  να ισχύει

$f(n) \leq Cg(n)$ , αφού  $\forall C \forall k$  υπάρχει άρτιος  $n = 2m > k$  ώστε

$$f(n) = (2m + 1)! \geq C \cdot (2m)! \Leftrightarrow \frac{(2m+1)!}{(2m)!} \geq C \Leftrightarrow (2m + 1) \geq C \Leftrightarrow n \geq C - 1.$$

Αντιστοίχως, δεν υπάρχουν  $k$  και  $C$  τέτοια ώστε για  $n > k$  να ισχύει

$g(n) \leq Cf(n)$ , αφού  $\forall C \forall k$  υπάρχει περιττός  $n = 2m + 1 > k$  ώστε

$$g(n) = (2m + 2)! \geq C \cdot (2m + 1)! \Leftrightarrow \frac{(2m+2)!}{(2m+1)!} \geq C \Leftrightarrow (2m + 2) \geq C \Leftrightarrow n \geq C - 1.$$