

Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2025-2026

Μαθηματική Επαγωγή - Ισχυρή Επαγωγή

Άσκηση 1

Να αποδειχθεί ότι αν $h > -1$ τότε $1 + nh \leq (1 + h)^n$, για κάθε μη αρνητικό ακέραιο n . Αυτή είναι η λεγόμενη **ανισότητα Bernoulli**.

Έστω $P(n)$ η πρόταση $1 + nh \leq (1 + h)^n, \forall h > -1$.

Βήμα βάσης: $P(0)$ είναι αληθής καθώς $\forall h$ έχουμε $(1 + h)^0 = 1$, άρα η ανισότητα γίνεται $1 \leq 1$.

Επαγωγικό βήμα: Έστω $P(k)$ αληθής, δηλαδή $1 + kh \leq (1 + h)^k$. Τότε αφού $1 + h > 0$ έχουμε $(1 + h)^{k+1} = (1 + h)(1 + h)^k \geq (1 + h)(1 + kh)$ βάσει επαγωγικής υπόθεσης. Το δεύτερο μέρος της ανισότητας αναπτύσσεται ως $1 + kh + h + kh^2 = 1 + (k + 1)h + kh^2 \geq 1 + (k + 1)h$, ολοκληρώνοντας το επαγωγικό βήμα και την απόδειξη.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $n^2 - 1$ διαιρείται από το 8, οποτεδήποτε ο n είναι περιττός θετικός αριθμός.

Έστω $P(n)$ η πρόταση ο αριθμός $n^2 - 1$ διαιρείται από το 8, αν n θετικός περιττός. Θέτουμε $n = 2k - 1$ και θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό για κάθε $k \geq 1$.

Βήμα βάσης: Αν $k = 1$, τότε $n^2 - 1 = 0$ και προφανώς διαιρείται από το 8, δείχνοντας ότι η $P(1)$ ισχύει.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι $P(k)$ αληθής, δηλαδή $(2k - 1)^2 - 1$ διαιρείται από το 8. Τότε $(2k - 1)^2 - 1 = 8m$ για κάποιον m θετικό ακέραιο. Κάνοντας πράξεις βρίσκουμε ότι $(2(k + 1) - 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 - 4k + 1 - 1 + 8k = (2k - 1)^2 - 1 + 8k = 8m + 8k$, αποδεικνύοντας τον ισχυρισμό.

Άσκηση 3

α. Βρείτε έναν τύπο για το άθροισμα

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

εξετάζοντας τις τιμές έκφρασης για μικρές τιμές του n .

β. Να αποδείξετε τη σχέση που βρήκατε στο ερώτημα (α) .

α. Συμβολίζουμε το άθροισμα με $S(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i}$. Παρατηρούμε ότι

$$S(1) = \frac{1}{2}, S(2) = \frac{3}{4}, S(3) = \frac{7}{8} \dots \text{Άρα υποθέτουμε ότι } S(n) = \frac{2^n - 1}{2^n}.$$

β. Έστω $P(n)$ η πρόταση $S(n) = \frac{2^n - 1}{2^n}$. Θα αποδείξουμε την πρόταση για κάθε $n \geq 1$.

Βήμα βάσης: $S(1) = \frac{1}{2}$, οπότε η $P(1)$ ισχύει.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι $P(k)$ αληθής, δηλαδή $S(k) = \frac{2^k - 1}{2^k}$.

Έχουμε $S(k+1) = S(k) + \frac{1}{2^{k+1}}$, από τον ορισμό του αθροίσματος. Άρα

$$S(k+1) = \frac{2^k - 1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \text{ από επαγωγική υπόθεση. Δηλαδή}$$

$$S(k+1) = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}, \text{ αποδεικνύοντας ότι η } P(k+1) \text{ είναι αληθής.}$$

Άσκηση 4

Σε μια τράπεζα το ΑΤΜ έχει χαρτονομίσματα των 20 και 50 €. Ποια χρηματικά ποσά μπορεί να δίνει αν θεωρήσουμε ότι έχει απεριόριστη ποσότητα αυτών των χαρτονομισμάτων? Η απάντηση να αποδειχτεί με χρήση μαθηματικής επαγωγής.

Μπορεί να δώσει όλα τα χρηματικά ποσά που είναι πολλαπλάσια των 10€ που είναι μεγαλύτερα ή ίσα από 40€, καθώς και το ποσό των 20€. Έστω $P(n)$ η πρόταση $\Pi(n) = 10n$.

Βήμα βάσης: Για $n = 4$ μπορεί να δοθεί το ποσό των 40€
 $\Pi(n) : 40 = 20n_{20} + 50 \cdot 0$, $P(4)$ αληθής και $n_{20} = 2$ (δύο εισοσάευρα)

Επαγωγικό βήμα: Έστω $P(k)$ αληθής για $k > 4$. Τότε η επαγωγική υπόθεση είναι: $\Pi(k) = 10k = 50n_{50} + 20n_{20}$, όπου n_{50}, n_{20} μη αρνητικοί ακέραιοι (πεννηντάευρα και εικοσάευρα). Αν $n_{50} > 0$, τότε ένα πενηντάευρο μπορεί να αντικατασταθεί από τρία εικοσάευρα και πράγματι ισχύει $10(k + 1) = 50(n_{50} - 1) + 20(n_{20} + 3)$. Συνεπώς $P(k + 1)$ αληθής. Από την άλλη, αν $n_{50} = 0$, τότε δύο εικοσάευρα μπορούν να αντικατασταθούν από ένα πενηντάευρο και πράγματι ισχύει $10(k + 1) = 50(n_{50} + 1) + 20(n_{20} - 2)$ (αφού το ποσό είναι μεγαλύτερο των 40€ και άρα $n_{20} \geq 2$), συνεπώς $P(k + 1)$ αληθής, ολοκληρώνοντας το επαγωγικό βήμα.

Άσκηση 5

Έστω f_n ο n -οστός αριθμός Fibonacci .

- α. Να αποδείξετε ότι $f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$, για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq 1$.
- β. Να αποδείξετε ότι $f_0 - f_1 + f_2 - \cdots - f_{2n-1} + f_{2n} = f_{2n-1} - 1$, για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq 1$.

Έστω f_n ο n -οστός αριθμός Fibonacci .

α. Θα δείξουμε με επαγωγή ότι η πρόταση $P(n)$: $f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$ ισχύει για κάθε $n \geq 1$.

Βήμα βάσης: Για $n = 1$ έχουμε $f_2 \cdot f_0 - f_1^2 = 0 - 1 = (-1)^1$.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι η πρόταση $P(k)$ ισχύει. Τότε βάσει ορισμού της ακολουθίας Fibonacci $f_{k+2} = f_k + f_{k+1}$, άρα

$f_{k+2}f_k - f_{k+1}^2 = (f_k + f_{k+1})f_k - f_{k+1}^2 = f_{k+1}(f_k - f_{k+1}) + f_k^2$. Όμως πάλι βάσει ορισμού της ακολουθίας $f_k - f_{k+1} = -f_{k-1}$, δίνοντας τελικά ότι $f_{k+2}f_k - f_{k+1}^2 = -f_{k-1}f_{k+1} + f_k^2 = -(-1)^k = (-1)^{k+1}$, βάσει της επαγωγικής υπόθεσης, δείχνοντας ότι η $P(k+1)$ είναι αληθής.

Έστω f_n ο n -οστός αριθμός Fibonacci .

β. Έστω το άθροισμα $F(n) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \cdot f_i$. Θα δείξουμε με επαγωγή ότι η πρόταση $P(n)$: $F(n) = f_{2n-1} - 1$ ισχύει για κάθε ακέραιο.

Βήμα βάσης: Για $n = 1$ έχουμε $f_0 - f_1 + f_2 = 0 = f_1 - 1$, οπότε ισχύει η πρόταση $P(1)$.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι ισχύει η πρόταση $P(k)$. Τότε $F(k+1) = F(k) - f_{2k+1} + f_{2k+2}$. Από τον ορισμό της ακολουθίας Fibonacci $f_{2k+2} = f_{2k+1} + f_{2k}$ και από την επαγωγική υπόθεση $F(k) = f_{2k-1} - 1$. Συνολικά $F(k+1) = f_{2k-1} - 1 + f_{2k} = f_{2k+1} - 1$, αποδεικνύοντας το επαγωγικό βήμα.

Άσκηση 6

Χρησιμοποιήστε μαθηματική επαγωγή για να δείξετε ότι

$\sum_{j=0}^n (j+1) = (n+1)(n+2)/2$ όταν ο n είναι μη αρνητικός ακέραιος.

Έστω $P(n)$ η πρόταση $\sum_{j=0}^n (j+1) = (n+1)(n+2)/2, \forall n \geq 0$.

Βήμα βάσης: $P(0)$ είναι αληθής καθώς $\sum_{j=0}^0 (j+1) = 0+1 = (0+1)(0+2)/2$.

Επαγωγικό βήμα:

Έστω $P(k)$ αληθής, δηλαδή $\sum_{j=0}^k (j+1) = (k+1)(k+2)/2$.

$$\begin{aligned} \text{Τότε } \sum_{j=0}^{k+1} (j+1) &= \sum_{j=0}^k (j+1) + [(k+1) + 1] = (k+1)(k+2)/2 + (k+2) \\ &= (k+2)[(k+1)/2 + 1] = (k+2)(k+3)/2 = [(k+1) + 1][(k+1) + 2]/2, \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας το επαγωγικό βήμα και την απόδειξη.

Άσκηση 7

Χρησιμοποιήστε μαθηματική επαγωγή για να δείξετε ότι n διαφορετικές ευθείες στο επίπεδο που διέρχονται από το ίδιο σημείο, χωρίζουν το επίπεδο σε $2n$ διακριτά μέρη. Προφανώς $n \geq 1$.

Βήμα βάσης: $P(1)$ είναι αληθής καθώς μία ευθεία χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα.

Επαγωγικό βήμα:

Έστω $P(k)$ αληθής, δηλαδή k ευθείες που διέρχονται από το ίδιο σημείο χωρίζουν το επίπεδο σε $2k$ διακριτά μέρη. Η προσθήκη της $(k + 1)$ ευθείας χωρίζει ακριβώς δύο από αυτά τα διακριτά μέρη σε δύο κομμάτια. Συνεπώς οι $k + 1$ ευθείες διαχωρίζουν το επίπεδο σε $2k + 2 = 2(k + 1)$ διακριτά μέρη, ολοκληρώνοντας το επαγωγικό βήμα και την απόδειξη.

Άσκηση 8

- α. Να προσδιοριστεί ποια ποσά ταχυδρομικών τελών μπορούν να σχηματιστούν με γραμματόσημα αξίας 3 και 10 λεπτών.
- β. Να αποδείξετε την απάντηση που δώσατε για το ερώτημα (α) με μαθηματική επαγωγή. Να βεβαιωθείτε ότι διατυπώνετε ρητά την επαγωγική υπόθεση και το επαγωγικό βήμα.
- γ. Να αποδείξετε την απάντηση που δώσατε για το ερώτημα (α) με ισχυρή επαγωγή. Με ποιον τρόπο διαφέρει αυτή η απόδειξη από την απόδειξη με μαθηματική επαγωγή?

- α. 3, 6, 9, 10, 12, 13, 15, 16 και όλα τα ποσά από 18 λεπτά και πάνω.
- β. Θεωρούμε $P(n)$ την πρόταση «μπορούμε να σχηματίσουμε ταχυδρομικό τέλος n λεπτών μόνο με γραμματόσημα των 3 και 10 λεπτών». Θα δείξουμε με επαγωγή ότι αυτή η πρόταση είναι αληθής για κάθε $n \geq 18$.

Βήμα βάσης: $18 = 3 \cdot 6$, άρα η $P(18)$ ισχύει.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι ισχύει η $P(k)$. Τότε $k = 3 \cdot i + 10 \cdot j$, για κάποιους i, j ακέραιους. Αν $i \geq 3$, τότε μπορούμε να γράψουμε την ισότητα $k + 1 = 3 \cdot (i - 3) + 10 \cdot (j + 1)$. Αν $i < 3$, τότε το j πρέπει να είναι σίγουρα μεγαλύτερο ή ίσο του 2, αφού το βήμα βάσης είναι το 18. Άρα μπορούμε να αντικαταστήσουμε 2 γραμματόσημα των 10 λεπτών με 7 των 3 λεπτών, έχοντας πράγματι $k + 1 = 3 \cdot (i + 7) + 10 \cdot (j - 2)$.

Υ. Βήμα βάσης: Θα δείξουμε ότι τα τέλη 18, 19 και 20 λεπτών μπορούν να σχηματιστούν με γραμματόσημα των 3 και 10 λεπτών (προφανώς το τέλος των 21 λεπτών φτιάχνεται εφόσον κάποιος χρησιμοποιήσει επιπλέον ένα γραμματόσημο των 3 λεπτών στο τέλος των 18 λεπτών). Πράγματι $19 = 3 \cdot 3 + 10 \cdot 1$, $20 = 2 \cdot 10$, ενώ την περίπτωση της $P(18)$ την δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα.

Επαγωγικό βήμα: Έστω η ισχυρή επαγωγή ότι η πρόταση P είναι αληθής για κάθε j τέτοιο ώστε $18 \leq j \leq k$. Τότε, $k - 2 \geq 18$ (για τα υπόλοιπα επιληφθήκαμε στο βήμα βάσης) και βάσει ισχυρής επαγωγικής υπόθεσης η πρόταση $P(k - 2)$ είναι αληθής, οπότε $k - 2 = 3 \cdot i + 10 \cdot j$. Οπότε προσθέτοντας ένα ακόμα γραμματόσημο των 3 λεπτών έχουμε ότι $k + 1 = 3 \cdot (i + 1) + 10 \cdot j$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Σε σχέση με το προηγούμενο ερώτημα, χρησιμοποιώντας την ισχυρή επαγωγή έπρεπε να επεκτείνουμε το βήμα βάσης, αλλά χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $P(j)$ είναι αληθής για κάθε $18 \leq j \leq k$ δεν χρειάστηκε να πάρουμε περιπτώσεις για την ολοκλήρωση της απόδειξης.

Άσκηση 9

Έστω ότι S είναι το υποσύνολο του συνόλου των διατεταγμένων ζευγών ακεραίων που ορίζονται αναδρομικά από τα βήματα:

Βήμα βάσης: $(0, 0) \in S$

Αναδρομικό βήμα: Αν $(a, b) \in S$ τότε το $(a, b + 1) \in S$, $(a + 1, b + 1) \in S$ και $(a + 2, b + 1) \in S$.

- α. Να παραθέσετε τα στοιχεία του S που παράγονται από τις 4 πρώτες εφαρμογές του αναδρομικού ορισμού.
- β. Να χρησιμοποιήσετε την ισχυρή επαγωγή ως προς το πλήθος των εφαρμογών του αναδρομικού βήματος του ορισμού για να δείξετε ότι, $a \leq 2b$, οποτεδήποτε $(a, b) \in S$.
- γ. Να χρησιμοποιήσετε τη δομική επαγωγή για να δείξετε ότι, $a \leq 2b$, οποτεδήποτε $(a, b) \in S$.

α. Εφαρμόζουμε τον τύπο 4 φορές:

Βάση	1η	2η	3η	4η
(0, 0)				(0, 4)
			(0, 3)	(1, 4)
		(0, 2)	(1, 3)	(2, 4)
	(0, 1)	(1, 2)	(2, 3)	(3, 4)
	(1, 1)	(2, 2)	(3, 3)	(4, 4)
	(2, 1)	(3, 2)	(4, 3)	(5, 4)
		(4, 2)	(5, 3)	(6, 4)
			(6, 3)	(7, 4)
				(8, 4)

β. Θα δείξουμε με ισχυρή επαγωγή την πρόταση $P(n)$ " $a \leq 2b, \forall (a, b) \in S$ στην n -οστή εφαρμογή του αναδρομικού τύπου".

Βήμα βάσης: Η πρόταση $P(0)$ προφανώς ισχύει καθώς μόνο το $(0, 0)$ είναι μέρος του συνόλου σε αυτήν την περίπτωση.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι ισχύει $a \leq 2b$ για κάθε $(a, b) \in S$, εφόσον το S φτιάχτηκε με k ή λιγότερα αναδρομικά βήματα. Θεωρούμε ένα στοιχείο (a', b') που φτιάχτηκε με $k + 1$ εφαρμογές του αναδρομικού βήματος. Επειδή η τελική εφαρμογή πρέπει να γίνει σε ένα στοιχείο (a, b) που κατασκευάστηκε με λιγότερες εφαρμογές του αναδρομικού τύπου, έχουμε για αυτό το στοιχείο $a \leq 2b$. Οπότε εφαρμόζοντας μια τελευταία φορά τον αναδρομικό τύπο έχουμε ότι $b' = b + 1$ και $a' = a, a + 1$ ή $a + 2$. Σε κάθε περίπτωση $a' \leq 2b'$.

- γ. Η υπόθεση ισχύει για το βήμα βάσης, όπως και στο προηγούμενο ερώτημα. Αν ισχύει αυτό για το στοιχείο $(a, b) \in S$ τότε ισχύει επίσης και για κάθε στοιχείο που λαμβάνεται από το (a, b) με μια εφαρμογή του αναδρομικού τύπου, καθώς
- $$a \leq 2b \Rightarrow (a \leq 2(b+1)) \wedge (a+1 \leq 2(b+1)) \wedge (a+2 \leq 2(b+1)).$$

Άσκηση 10

Θεωρούμε ότι μια πλάκα σοκολάτας αποτελείται από n τετραγωνάκια που είναι διατεταγμένα σε ορθογώνια διάταξη.

Η πλάκα ή μικρότερο ορθογώνιο κομμάτι της πλάκας μπορεί να σπάσει κατά μήκος της κατακόρυφης ή οριζόντιας γραμμής που χωρίζει τα τετραγωνάκια.

Αν θεωρήσουμε ότι κάθε φορά μπορεί να σπάζει ένα κομμάτι, να προσδιοριστεί πόσα σπασίματα πρέπει να κάνουμε διαδοχικά για να σπάσουμε την πλάκα σε n ξεχωριστά τετραγωνάκια.

Η απάντηση να αποδειχτεί με ισχυρή επαγωγή.

Ισχυριζόμαστε ότι χρειάζονται ακριβώς $n - 1$ σπασίματα για να σπάσει η πλάκα σε n τετραγωνάκια.

Βήμα βάσης: Αρχικά για $n = 1$ είναι εμφανές ότι χρειάζονται $n - 1 = 0$ σπασίματα.

Επαγωγικό βήμα: Θα προχωρήσουμε με υπόθεση ισχυρής επαγωγής για k κομμάτια ή λιγότερα. Θα αποδείξουμε ότι μια πλάκα με $k + 1$ τετράγωνα χρειάζεται ακριβώς k σπασίματα.

Ξεκινάμε με ένα σπάσιμο που θα αφήσει 2 κομμάτια, εκ των οποίων το ένα θα έχει $i + 1$ τετράγωνα, ενώ το άλλο θα έχει $k - i$ κομμάτια, ενώ ισχύει ότι $0 \leq i \leq k - 1$. (Δηλαδή κάθε κομμάτι έχει τουλάχιστον 1 και μέχρι k κομμάτια). Από την υπόθεση ισχυρής επαγωγής θα έχουμε ότι το πρώτο κομμάτι θα χρειαστεί i σπασίματα για να γίνει $i + 1$ κομμάτια, ενώ το δεύτερο κομμάτι θα χρειαστεί $k - i - 1$ σπασίματα για να γίνει $k - i$ κομμάτια.

Συνολικά, προσθέτοντας το πρώτο σπάσιμο θα έχουμε $1 + i + k - i - 1 = k$ σπασίματα ακριβώς, ολοκληρώνοντας το επαγωγικό βήμα.

Άσκηση 11

Ένα παζλ σχηματίζεται μέσω της διαδοχικής συνένωσης κομματιών που συγκροτούν μπλοκ. Μια κίνηση γίνεται κάθε φορά που ένα κομμάτι προστίθεται σε ένα μπλοκ ή όταν συνενώνονται δύο μπλοκ. Με τη χρήση της ισχυρής επαγωγής να αποδειχτεί ότι ανεξάρτητα από τον τρόπο εκτέλεσης των κινήσεων, χρειάζονται μόνο $n - 1$ κινήσεις για τη συναρμολόγηση παζλ με n κομμάτια.

Έστω $P(n)$ η πρόταση ότι χρειάζονται μόνο $n - 1$ κινήσεις για τη συναρμολόγηση παζλ με n κομμάτια.

Βήμα βάσης: Προφανώς, η $P(1)$ είναι αληθής.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι ισχύει η $P(j)$ για κάθε $1 < j \leq k$. Η τελευταία κίνηση σχηματισμού ενός παζλ με $k + 1$ κομμάτια πρέπει να είναι η συνένωση 2 μπλοκ μεγέθους m και $k + 1 - m$ κομμάτια αντίστοιχα, όπου $1 \leq m \leq k$. Από την επαγωγική υπόθεση, το μπλοκ με m κομμάτια απαιτεί για τον σχηματισμό του $m - 1$ κινήσεις και το μπλοκ με $k + 1 - m$ κομμάτια, απαιτεί $k - m$ κινήσεις. Συνεπώς, για το σχηματισμό του παζλ με $k + 1$ κομμάτια απαιτούνται $1 + m - 1 + k - m = k$ κινήσεις, και το επαγωγικό βήμα ολοκληρώνεται.

Άσκηση 12

Διατύπωση άσκησης

Ξεκινάμε με έναν σωρό από n πέτρες. Θέλουμε τελικά να καταλήξουμε σε n σωρούς, καθένας από τους οποίους αποτελείται από 1 πέτρα.

Σε κάθε βήμα:

- επιλέγουμε έναν σωρό και τον χωρίζουμε σε δύο μικρότερους σωρούς,
- αν οι δύο νέοι σωροί έχουν r και s πέτρες αντίστοιχα, υπολογίζουμε το γινόμενο $r \cdot s$.

Να δείξετε ότι: ανεξάρτητα από τον τρόπο με τον οποίο χωρίζουμε τους σωρούς, το άθροισμα όλων των γινομένων $r \cdot s$ που προκύπτουν σε κάθε βήμα είναι

$$\sum (\text{όλα τα } r \cdot s) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Ιδιότητα προς απόδειξη και Βήμα Βάσης

Ιδιότητα $P(n)$

Για κάθε διαδικασία που ξεκινά από έναν σωρό με n πέτρες και καταλήγει σε n σωρούς της 1 πέτρας, το άθροισμα των γινομένων $r \cdot s$ σε όλα τα βήματα ισούται με

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Βήμα Βάσης

Για $n = 1$ δεν γίνεται καμία διαίρεση, άρα το άθροισμα των γινομένων είναι 0. Η σχέση δίνει $\frac{1 \cdot 0}{2} = 0$, οπότε η $P(1)$ ισχύει.

Επαγωγική Υπόθεση

Υποθέτουμε ότι η $P(k)$ ισχύει για όλα τα k με $1 \leq k < n$, για κάποιο $n \geq 2$.

Επαγωγικό Βήμα (διάσπαση)

Πρώτο σπάσιμο

Ξεκινάμε από έναν σωρό με n πέτρες και στο **πρώτο** βήμα τον χωρίζουμε σε δύο σωρούς με a και b πέτρες, όπου

$$a, b \geq 1, \quad a + b = n.$$

Σε αυτό το βήμα υπολογίζουμε το γινόμενο $a \cdot b$.

Δύο ανεξάρτητες διαδικασίες

Στη συνέχεια η διαδικασία χωρίζεται σε δύο ανεξάρτητες υποδιαδικασίες:

- μία που ξεκινά από σωρό με a πέτρες και καταλήγει σε a σωρούς του 1,
- και μία που ξεκινά από σωρό με b πέτρες και καταλήγει σε b σωρούς του 1.

Επειδή $a < n$ και $b < n$, από την επαγωγική υπόθεση:

$$\text{άθροισμα για τον σωρό } a = \frac{a(a-1)}{2}, \quad \text{άθροισμα για τον σωρό } b = \frac{b(b-1)}{2}.$$

Επαγωγικό Βήμα (υπολογισμοί)

Συνολικό άθροισμα γινομένων

Το συνολικό άθροισμα όλων των γινομένων είναι:

$$\underbrace{ab}_{\text{1ο βήμα}} + \underbrace{\frac{a(a-1)}{2}}_{\text{σπάσιμο του } a} + \underbrace{\frac{b(b-1)}{2}}_{\text{σπάσιμο του } b}.$$

Αλγεβρικός υπολογισμός

$$ab + \frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2} = \frac{2ab + a^2 - a + b^2 - b}{2} = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - (a+b)}{2}.$$

Εφόσον $a + b = n$, έχουμε

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = n^2,$$

άρα

$$\text{συνολικό άθροισμα} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Άσκηση 13– Παιχνίδι Nim

Παιχνίδι

Υπάρχουν n σπέρτα σε έναν σωρό. Δύο παίκτες παίζουν εναλλάξ. Σε κάθε κίνηση, ο παίκτης που παίζει μπορεί να αφαιρέσει 1, 2 ή 3 σπέρτα.

Ο παίκτης που αφαιρεί **το τελευταίο σπέρτο** είναι **ο ηττημένος**.

Στόχος

Υποθέτουμε ότι και οι δύο παίκτες χρησιμοποιούν την καλύτερη δυνατή στρατηγική.

Να δείξετε, με ισχυρή επαγωγή στο n , ότι:

- αν $n = 4j$, $4j + 2$ ή $4j + 3$ για κάποιον μη αρνητικό ακέραιο j , τότε κερδίζει ο **πρώτος** παίκτης,
- ενώ αν $n = 4j + 1$, τότε κερδίζει ο **δεύτερος** παίκτης.

Βήμα Βάσης

Ιδιότητα $P(n)$

Θεωρούμε τη θέση με n σπάρτα, όπου ο παίκτης που έχει τη σειρά του παίζει πρώτος σε αυτή τη θέση.

Ισχυρισμός: Η θέση με n σπάρτα είναι

- **χαμένη** αν $n \equiv 1 \pmod{4}$,
- **κερδισμένη** αν $n \equiv 0, 2, 3 \pmod{4}$.

Βήμα Βάσης

- $n = 1$: ο παίκτης που παίζει αναγκάζεται να πάρει το τελευταίο σπάρτο και χάνει. Άρα η θέση είναι χαμένη, και $1 \equiv 1 \pmod{4}$.
- $n = 2$: ο παίκτης παίρνει 1 σπάρτο και αφήνει 1 στον αντίπαλο, που χάνει. Άρα η θέση είναι κερδισμένη, και $2 \equiv 2 \pmod{4}$.
- $n = 3$: ο παίκτης παίρνει 2 σπάρτα και αφήνει 1 στον αντίπαλο, που χάνει. Άρα η θέση είναι κερδισμένη, και $3 \equiv 3 \pmod{4}$.
- $n = 4$: ο παίκτης παίρνει 3 σπάρτα και αφήνει 1 στον αντίπαλο. Άρα η θέση είναι κερδισμένη, και $4 \equiv 0 \pmod{4}$.

Επαγωγικό Βήμα: $n + 1 = 4k + 1$

Επαγωγική Υπόθεση

Υποθέτουμε ότι η $P(m)$ ισχύει για όλες τις θέσεις με $1 \leq m \leq n$.

Θέση με $n + 1 = 4k + 1$ σπέρτα

Έστω $n + 1 = 4k + 1$. Ο παίκτης που παίζει μπορεί να αφαιρέσει:

- 1 σπέρτο $\Rightarrow$ μένουν $4k$ σπέρτα,
- 2 σπέρτα $\Rightarrow$ μένουν $4k - 1 = 4(k - 1) + 3$ σπέρτα,
- 3 σπέρτα $\Rightarrow$ μένουν $4k - 2 = 4(k - 1) + 2$ σπέρτα.

Δηλαδή, το νέο πλήθος είναι κάθε φορά $\leq n$ και είναι αντίστοιχα $\equiv 0, 3, 2 \pmod{4}$.

Συμπέρασμα

Από την επαγωγική υπόθεση, οι θέσεις με πλήθος $\equiv 0, 2, 3 \pmod{4}$ είναι **κερδισμένες**.

Άρα, από τη θέση $4k + 1$, κάθε δυνατή κίνηση οδηγεί σε **κερδισμένη θέση για τον αντίπαλο**.

Επομένως η θέση με $n + 1 = 4k + 1$ σπέρτα είναι **χαμένη**.

Επαγωγικό Βήμα – Κερδισμένες θέσεις

Θέσεις με $n + 1 \equiv 0, 2, 3 \pmod{4}$

Τώρα θεωρούμε ότι $n + 1$ **δεν** είναι της μορφής $4k + 1$.

Δηλαδή μία από τις παρακάτω περιπτώσεις ισχύει:

$$n + 1 = 4k, \quad n + 1 = 4k + 2, \quad \text{ή} \quad n + 1 = 4k + 3.$$

Κίνηση προς χαμένη θέση

Σε κάθε περίπτωση, ο παίκτης έχει κίνηση προς θέση $4k' + 1$:

- Αν $n + 1 = 4k$, αφαιρεί 3 σπέρτα:
 $4k \rightarrow 4k - 3 = 4(k - 1) + 1.$
- Αν $n + 1 = 4k + 2$, αφαιρεί 1 σπέρτο:
 $4k + 2 \rightarrow 4k + 1.$
- Αν $n + 1 = 4k + 3$, αφαιρεί 2 σπέρτα:
 $4k + 3 \rightarrow 4k + 1.$

Σε όλες τις περιπτώσεις, καταλήγουμε σε πλήθος σπέρτων $\equiv 1 \pmod{4}$, άρα σε **χαμένη θέση** για τον επόμενο παίκτη (από την επαγωγική υπόθεση).

Τελικό συμπέρασμα

Άρα οι θέσεις με $n + 1 \equiv 0, 2, 3 \pmod{4}$ είναι **κερδισμένες**.

Συνολικά:

- $n = 4j + 1$: χαμένη θέση για τον παίκτη που παίζει, άρα κερδίζει ο **δεύτερος**.
- $n = 4j, 4j + 2, 4j + 3$: κερδισμένη θέση για τον παίκτη που παίζει, άρα κερδίζει ο **πρώτος**.

Άσκηση 14 - Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος

Στόχος

Να δείξουμε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι **άρρητος**, δηλαδή δεν γράφεται ως λόγος δύο θετικών ακεραίων.

Ορισμός της πρότασης $P(n)$

Ακολουθώντας μια υπόδειξη, ορίζουμε για κάθε θετικό ακέραιο n την πρόταση, όπου b ο μικρότερος δυνατός ακέραιος παρονομαστής:

$$P(n) : \text{ Δεν υπάρχει θετικός ακέραιος } b \text{ τέτοιος ώστε } \sqrt{2} = \frac{n}{b}.$$

Αν αποδείξουμε ότι όλες οι $P(n)$ ισχύουν για $n = 1, 2, 3, \dots$, τότε καμία αναπαράσταση $\frac{n}{b}$ δεν δίνει τον $\sqrt{2}$, άρα ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Βήμα Βάσης και Επαγωγική Υπόθεση

Βήμα βάσης: $P(1)$

Πρέπει να δείξουμε ότι δεν υπάρχει θετικός ακέραιος b με $\sqrt{2} = 1/b$.
Όμως για κάθε θετικό ακέραιο b ισχύει

$$\frac{1}{b} \leq 1 < \sqrt{2},$$

άρα $\sqrt{2} \neq \frac{1}{b}$ για κάθε $b \in \mathbb{N}^*$. Επομένως η $P(1)$ είναι αληθής.

Επαγωγική Υπόθεση

Έστω τώρα ότι για κάποιο **αυθαίρετο** θετικό ακέραιο k ισχύουν όλες οι προτάσεις $P(j)$ για κάθε j με $1 \leq j \leq k$. Δηλαδή, για κάθε τέτοιο j και κάθε θετικό ακέραιο b έχουμε

$$\sqrt{2} \neq \frac{j}{b}.$$

Πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει και η $P(k+1)$.

Επαγωγικό Βήμα (I)

Υπόθεση προς άτοπο

Για να αποδείξουμε την $P(k+1)$, έστω προς άτοπο ότι υπάρχει θετικός ακέραιος b τέτοιος ώστε $\sqrt{2} = \frac{k+1}{b}$.
Τότε, υψώνοντας στο τετράγωνο και απλοποιώντας τα κλάσματα, έχουμε

$$2 = \frac{(k+1)^2}{b^2} \implies 2b^2 = (k+1)^2.$$

Το $k+1$ και το b είναι άρτιοι

Από τη σχέση $2b^2 = (k+1)^2$ προκύπτει ότι το $(k+1)^2$ είναι άρτιος ακέραιος. Άρα και το $k+1$ είναι άρτιος (το τετράγωνο περιττού είναι περιττό).

Επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$k+1 = 2t \quad \text{για κάποιο } t \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Αντικαθιστώντας, } 2b^2 = (2t)^2 = 4t^2 \implies b^2 = 2t^2.$$

Άρα και το b είναι άρτιος, οπότε $b = 2s$ για κάποιο $s \in \mathbb{N}^*$.

Επαγωγικό Βήμα (II)

Παραγωγή μικρότερου κλάσματος

Από τις σχέσεις $k + 1 = 2t$ και $b = 2s$ προκύπτει

$$\sqrt{2} = \frac{k+1}{b} = \frac{2t}{2s} = \frac{t}{s}.$$

Επειδή $k + 1 = 2t$, έχουμε

$$t = \frac{k+1}{2} \leq k,$$

άρα $t \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Αντίφαση με την επαγωγική υπόθεση

Από την υπόθεση ισχυρής επαγωγής ξέρουμε ότι για κάθε j με $1 \leq j \leq k$ και κάθε θετικό ακέραιο s ισχύει η $P(j)$, δηλαδή $\sqrt{2} \neq \frac{j}{s}$.

Ειδικά, για $j = t$ παίρνουμε $\sqrt{2} \neq \frac{t}{s}$, που αντιφάσκει με τη σχέση $\sqrt{2} = \frac{t}{s}$.

Άρα η αρχική υπόθεση ότι $\sqrt{2} = \frac{k+1}{b}$ είναι λανθασμένη, και η $P(k+1)$ είναι αληθής.

Τελικό συμπέρασμα

Με ισχυρή επαγωγή όλες οι $P(n)$ ισχύουν για $n \geq 1$, οπότε ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ίσος με κανέναν ρητό $\frac{n}{b}$ με $n, b \in \mathbb{N}^*$ και συνεπώς είναι **άρρητος αριθμός**.