

Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2025-2026

Απαρίθμηση

Άσκηση 1

- 1 Πόσες συναρτήσεις υπάρχουν από ένα σύνολο $\{1, 2, \dots, n\}$, όπου n θετικός ακέραιος, στο σύνολο $\{0, 1\}$?
- 2 Υπό τη συνθήκη ότι οι συναρτήσεις είναι 1-1.
- 3 Υπό τη συνθήκη ότι απεικονίζουν το 1 και το n στο 0.
- 4 Υπό τη συνθήκη ότι το 1 είναι η εικόνα ακριβώς ενός θετικού ακεραίου μικρότερου από n .

- ❶ Για κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού μπορούμε να επιλέξουμε ανάμεσα σε 2 εικόνες, συνεπώς σύμφωνα με τον κανόνα γινομένου το πλήθος των συναρτήσεων είναι $2 * 2 * \dots * 2 = 2^n$.
- ❷ Αν $n > 2$, προφανώς δεν υπάρχουν συναρτήσεις 1-1. Αν $n = 2$, τότε υπάρχουν 2 συναρτήσεις και αν $n = 1$, επίσης υπάρχουν δύο συναρτήσεις. Το πλήθος των συναρτήσεων στις 2 τελευταίες περιπτώσεις προκύπτει άμεσα, αλλά επαληθεύεται και από τον κανόνα γινομένου.
- ❸ Αν $n \geq 2$ δεδομένου ότι για 2 στοιχεία του πεδίου ορισμού υπάρχει μόνο ένας τρόπος, το πλήθος είναι $1 * 2 * \dots * 2 * 1 = 2^{n-2}$. Αν $n = 1$, υπάρχει μόνο μία συνάρτηση.
- ❹ Αναγκαία $n > 1$. Για την απεικόνιση του n έχουμε 2 επιλογές. Για τους υπόλοιπους $n - 1$ αριθμούς, υπάρχουν ακριβώς $n - 1$ τρόποι να επιλεγθεί ποιος ακέραιος απεικονίζεται στο 1. Συνεπώς, το συνολικό πλήθος των συναρτήσεων είναι $2(n - 1)$

Άσκηση 2

- 1 Πόσα υποσύνολα ενός συνόλου 100 στοιχείων έχουν περισσότερα από ένα στοιχεία;
- 2 Μια δυαδική συμβολοσειρά της οποίας η αντιστροφή είναι όμοια με την ίδια ονομάζεται παλίνδρομη. Πόσες συμβολοσειρές μήκους n είναι παλίνδρομες;

❶ $2^{100} - 101$

- ❷ Μία παλίνδρομη συμβολοσειρά προσδιορίζεται επακριβώς από τα πρώτα $\lceil n/2 \rceil$ bits, εφόσον τα υπόλοιπα $\lfloor n/2 \rfloor$ bits πρέπει να είναι ταυτόσημα των αντίστοιχων πρώτων $\lfloor n/2 \rfloor$. Συνεπώς από τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν $2^{\lceil n/2 \rceil}$ τέτοιες συμβολοσειρές.

Άσκηση 3

Σε έναν γάμο, με πόσους τρόπους μπορεί ένας φωτογράφος να τακτοποιήσει 6 ανθρώπους σε μία σειρά συμπεριλαμβανομένου του γαμπρού και της νύφης, αν:

- 1 η νύφη πρέπει να βρίσκεται δίπλα στον γαμπρό.
- 2 η νύφη δεν βρίσκεται δίπλα στον γαμπρό.
- 3 η νύφη βρίσκεται κάπου αριστερά από τον γαμπρό.

- ❶ Εφόσον η νύφη και ο γαμπρός πρέπει να στέκονται δίπλα-δίπλα ας τους αντιμετωπίσουμε ως ένα στοιχείο. Το ζητούμενο τώρα μετατρέπεται σε πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 5 στοιχεία σε μια σειρά. Από τον κανόνα του γινομένου προκύπτει ότι το πλήθος είναι $5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$. Ωστόσο, πρέπει να συνυπολογίσουμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε τη νύφη και τον γαμπρό που είναι 2. Εφαρμόζοντας τον κανόνα γινομένου προκύπτει ότι έχουμε συνολικά 240 τρόπους.
- ❷ Το 2ο ερώτημα μπορούμε να το απαντήσουμε βάσει του πρώτου. Υπολογίζουμε το συνολικό πλήθος των τρόπων να τοποθετήσουμε 6 ανθρώπους σε μια σειρά που είναι $6! = 720$ και αφαιρούμε το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος. Συνεπώς έχουμε $720 - 240 = 480$ τρόπους.
- ❸ Η νύφη μπορεί να βρίσκεται είτε αριστερά είτε δεξιά από τον γαμπρό. Λόγω συμμετρίας σε ακριβώς τις μισές περιπτώσεις από τους συνολικούς τρόπους τοποθέτησης θα βρίσκεται αριστερά του, συνεπώς με 360 τρόπους.

Άσκηση 4

Σε έναν γάμο, με πόσους τρόπους μπορεί ένας φωτογράφος να τακτοποιήσει 6 ανθρώπους σε μία σειρά μέσα από μια ομάδα 10 ανθρώπων, στην οποία ανήκει ο γαμπρός και η νύφη, αν:

- 1 η νύφη πρέπει να βρίσκεται στη φωτογραφία.
- 2 η νύφη και ο γαμπρός πρέπει να βρίσκονται στη φωτογραφία.
- 3 στη φωτογραφία βρίσκεται είτε η νύφη, είτε ο γαμπρός αλλά όχι και οι δύο.

- ❶ Αρχικά τοποθετούμε τη νύφη σε οποιαδήποτε από τις 6 θέσεις. Στη συνέχεια μπορούμε να επιλέξουμε 5 από τους 9 ανθρώπους για τις υπόλοιπες θέσεις, κάτι που μπορεί να γίνει με $9 * 8 * 7 * 6 * 5 = 15.120$ τρόπους. Από τον κανόνα του γινομένου προκύπτει ότι υπάρχουν συνολικά $6 * 15.120 = 90.720$ τρόποι, πολλαπλασιάζοντας με τους τρόπους που μπορεί να τοποθετηθεί η νύφη.
- ❷ Αντιστοίχως, τοποθετούμε τη νύφη σε οποιαδήποτε από τις 6 θέσεις και τον γαμπρό σε οποιαδήποτε από τις 5 υπολειπόμενες. Μπορούμε να επιλέξουμε 4 από τα 8 άτομα στις εναπομείνουσες θέσεις με $8 * 7 * 6 * 5 = 1680$ τρόπους. Το συνολικό πλήθος, πολλαπλασιάζοντας με τους τρόπους τοποθέτησης της νύφης και του γαμπρού είναι $6 * 5 * 1680 = 50.400$ τρόποι.
- ❸ Από τα πρώτα 2 ερωτήματα προκύπτει ότι υπάρχουν ακριβώς $90.720 - 50.400 = 40.320$ τρόποι για να είναι μόνο η νύφη στη φωτογραφία και αντίστοιχα $90.720 - 50.400 = 40.320$ τρόποι για να είναι μόνο ο γαμπρός στη φωτογραφία. Από τον κανόνα του αθροίσματος προκύπτει ότι υπάρχουν συνολικά $40.320 + 40.320 = 80.640$ τρόποι.

Άσκηση 5

Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να καθίσουν 4 άνθρωποι από ένα σύνολο 10 ανθρώπων γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι, όπου δυο τοποθετήσεις θεωρούνται ίδιες εφόσον κάθε άνθρωπος έχει τον ίδιο γείτονα αμέσως δεξιά και αριστερά του?

Η απάντηση στηρίζεται στην εφαρμογή τόσο του κανόνα του γινομένου, όσο και του κανόνα της διαίρεσης. Αριθμούμε τις θέσεις από το 1 έως το 4. Για την πρώτη θέση υπάρχουν 10 διαφορετικές επιλογές ανθρώπων που μπορούν να καθίσουν. Για την δεύτερη υπάρχουν 9, ενώ για την τρίτη και την τέταρτη 8 και 7 επιλογές αντίστοιχα. Άρα βάση του κανόνα του γινομένου υπάρχουν $m = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5.040$ πιθανές τοποθετήσεις.

Εφόσον υπάρχουν 4 τοποθετήσεις τέτοιες ώστε ο κάθε άνθρωπος να έχει τον ίδιο γείτονα αμέσως δεξιά και αριστερά, χρησιμοποιώντας τον κανόνα της διαίρεσης βρίσκουμε ότι υπάρχουν συνολικά

$$n = \frac{5.040}{4} = 1.260$$

διαφορετικοί τρόποι να καθίσουν οι 4 από τους 10 γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι.

Άσκηση 6

Πόσες συμβολοσειρές bit με μήκος 10 είτε ξεκινούν από 3 μηδενικά είτε τελειώνουν με 2 μηδενικά·

Έστω τα σύνολα A και B που περιλαμβάνουν όλες τις συμβολοσειρές bit με μήκος 10 που ξεκινούν από 3 και τελειώνουν με 2 μηδενικά αντίστοιχα. Το πρώτο σύνολο αριθμεί βάσει του κανόνα του γινομένου $|A| = 2^{10-3} = 128$ στοιχεία, αφού ξεκινώντας με 3 μηδενικά μένει μια συμβολοσειρά bit με 7 στοιχεία. Ομοίως το δεύτερο σύνολο έχει $|B| = 2^{10-2} = 256$ στοιχεία. Η τομή τους αριθμεί $|A \cap B| = 2^{10-3-2} = 32$ στοιχεία. Συνολικά, βάσει της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού το ζητούμενο σύνολο αριθμεί $128 + 256 - 32 = 352$ στοιχεία.

Άσκηση 7

Πόσες συμβολοσειρές bit με μήκος 10 περιέχουν είτε 5 διαδοχικά μηδενικά είτε 5 διαδοχικές μονάδες.

Πρώτα μετράμε τον αριθμό των συμβολοσειρών μήκους 10 που περιέχουν 5 διαδοχικά μηδενικά. Τα μηδενικά μπορεί να ξεκινούν στο 1ο bit, οπότε τα επόμενα 5 bits μπορούν να επιλεγούν ελεύθερα και συνεπώς υπάρχουν $2^5 = 32$ τέτοιες συμβολοσειρές. Αν ξεκινάνε στο 2ο bit, τότε το πρώτο bit πρέπει να είναι 1 και επιλέγονται τυχαία τα 4 τελευταία bits, συνεπώς υπάρχουν $2^4 = 16$ τέτοιες συμβολοσειρές. Αν ξεκινάνε στο 3ο bit, τότε το 2ο bit πρέπει να είναι μονάδα αλλά υπάρχει ελεύθερη επιλογή για το πρώτο και τα 3 τελευταία bits και συνεπώς υπάρχουν $2^4 = 16$ τέτοιες συμβολοσειρές. Ομοίως, υπάρχουν 16 συμβολοσειρές αν τα 5 διαδοχικά μηδενικά ξεκινάνε στο 4ο, 5ο ή 6ο bit. Το συνολικό πλήθος των συμβολοσειρών με 5 διαδοχικά μηδενικά είναι συνεπώς $32 + 5 * 16 = 112$. Κατ' αντιστοιχία το πλήθος των συμβολοσειρών με 5 διαδοχικές μονάδες είναι επίσης 112.

Αν δούμε ως σύνολα τις αντίστοιχες συμβολοσειρές βλέπουμε ότι βάσει της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού για να βρούμε το πλήθος των συμβολοσειρών που περιέρχουν είτε 5 διαδοχικά μηδενικά είτε 5 διαδοχικές μονάδες πρέπει να αφαιρέσουμε το πλήθος των συμβολοσειρών που ανήκουν και στα δύο σύνολα για να μην διπλομετρήσουμε. Υπάρχουν ακριβώς 2 τέτοιες συμβολοσειρές οι 0000011111 και 1111100000. Συνεπώς, το συνολικό πλήθος είναι $112 + 112 - 2 = 222$.

Άσκηση 8

Έστω ότι οι αριθμοί p και q είναι πρώτοι και ότι $n = pq$. Να χρησιμοποιήσετε την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού για να βρείτε το πλήθος των θετικών ακεραίων που δεν υπερβαίνουν το n και είναι σχετικά πρώτοι με το n . Σχετικά πρώτοι είναι οι αριθμοί που δεν έχουν κανέναν κοινό διαιρέτη εκτός από τη μονάδα.

Έστω P το υποσύνολο των αριθμών $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ που διαιρούνται από το p , και αντίστοιχα Q το υποσύνολο των αριθμών που διαιρούνται από το q .

Θέλουμε να μετρήσουμε το πλήθος των αριθμών που δεν διαιρούνται ούτε από το p ούτε το q και είναι μικρότεροι από n . Συνεπώς το πλήθος τους είναι:

$$n - |P \cup Q|.$$

Σύμφωνα με την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, $|P \cup Q| = |P| + |Q| - |P \cap Q|$.

Κάθε πολλαπλάσιο του p διαιρείται από το p , άρα $|P| = \lfloor n/p \rfloor$. Αντίστοιχα, $|Q| = \lfloor n/q \rfloor$. Προφανώς ο n είναι ο μόνος θετικός ακέραιος που δεν ξεπερνά το n και διαιρείται τόσο από το p όσο και από το q , άρα $|P \cap Q| = 1$.

Επομένως, το πλήθος των θετικών ακεραίων που δεν υπερβαίνουν το n και είναι σχετικά πρώτοι με το n είναι $n - (\lfloor n/p \rfloor + \lfloor n/q \rfloor - 1) = n - q - p + 1$.

Άσκηση 9

Να χρησιμοποιήσετε την αρχή του εγκλεισμού-αποκλεισμού για να βρείτε το πλήθος των θετικών ακεραίων που είναι κάτω από 1.000.000 και δεν διαιρούνται από το 4 ή το 6.

Κάθε 4ος αριθμός διαιρείται με το 4 και κάθε 6ος αριθμός διαιρείται με το 6. Συνεπώς, $\lfloor 999.999/4 \rfloor = 249.999$ αριθμοί διαιρούνται με το 4 και $\lfloor 999.999/6 \rfloor = 166.666$ αριθμοί διαιρούνται με το 6. Ωστόσο, πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι υπάρχουν και αριθμοί που διαιρούνται και με το 4 και με το 6. Οι αριθμοί αυτοί διαιρούνται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους και είναι στο πλήθος $\lfloor 999.999/12 \rfloor = 83.333$. Συνεπώς, το πλήθος είναι $999.999 - 249.999 - 166.666 + 83.333 = 666.667$

Άσκηση 10

Πόσες διαγώνιους έχει ένα πολύγωνο με n πλευρές.

Από κάθε κορυφή ξεκινούν $n - 3$ διαγώνιοι αν αφαιρέσουμε την κορυφή και τις γειτονικές του κορυφές. Εφόσον υπάρχουν n κορυφές, από τον κανόνα γινομένου λαμβάνουμε $n * (n - 3)$ διαγώνιους. Ωστόσο, εφόσον μία διαγώνιος ενώνει 2 κορυφές έχουμε μετρήσει 2 φορές κάθε διαγώνιο. Συνεπώς, προκύπτει ότι το συνολικό πλήθος των διαγώνιων πολυγώνου με n κορυφές είναι $n(n - 3)/2$.

Άσκηση 11

Πόσοι θετικοί ακέραιοι μικρότεροι ή ίσοι με 1000 δεν διαιρούνται από το 4, το 6 ή το 9;

Έστω A το σύνολο των αριθμών που διαιρούνται από το 4, B το σύνολο των αριθμών που διαιρούνται από το 6 και C το σύνολο των αριθμών που διαιρούνται από το 9. Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο θα πρέπει να αφαιρέσουμε από το συνολικό πλήθος τον πληθάρημο της ένωσης των παραπάνω συνόλων $|A \cup B \cup C|$.

Εφαρμόζουμε την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Συνεπώς, και δεδομένου ότι το πλήθος των θετικών ακέραιων αριθμών που διαιρούνται με ακέραιο d εντός του διαστήματος $[1, n]$ είναι $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ το πλήθος είναι ίσο με:

$$1000 - \lfloor \frac{1000}{4} \rfloor - \lfloor \frac{1000}{6} \rfloor - \lfloor \frac{1000}{9} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{12} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{36} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{18} \rfloor - \lfloor \frac{1000}{36} \rfloor = 445.$$

Για την εύρεση του πληθάρημου των τομών βασιζόμαστε στην ιδιότητα ότι ένας ακέραιος διαιρείται από δύο άλλους ακέραιους αν και μόνο αν διαιρείται από το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιό τους.

Άσκηση 12

Έστω ότι (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, ένα σύνολο 9 διαφορετικών σημείων με ακέραιες συντεταγμένες στο χώρο $\mathbb{R}^3$. Να δείξετε ότι, το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τουλάχιστον ένα ζεύγος αυτών των σημείων έχει ακέραιες συντεταγμένες.

Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει 2 διακριτά σημεία (x_i, y_i, z_i) και (x_j, y_j, z_j) , είναι το σημείο $((x_i + x_j)/2, (y_i + y_j)/2, (z_i + z_j)/2)$.

Προφανώς, οι συντεταγμένες του μέσου του ευθύγραμμου τμήματος είναι ακέραιες αν και μόνον αν οι συντεταγμένες των άκρων του έχουν την ίδια ισοτιμία (η x_i με την x_j , κ.λπ.).

Από την αρχή του γινομένου προκύπτει ότι υπάρχουν $2^3 = 8$ τριπλέτες ισοτιμιών: (περιττή, περιττή, περιττή), (περιττή, περιττή, άρτια), ... , (άρτια, άρτια, άρτια).

Δεδομένου ότι έχουμε 9 σημεία, βάσει της αρχής του περιστερώνα θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 σημεία με τις ίδιες τριπλέτες ισοτιμιών. Το μέσο αυτών των δύο σημείων θα έχει συνεπώς ακέραιες συντεταγμένες.

Άσκηση 13

Να δείξετε ότι, αν f μια συνάρτηση από το S στο T , όπου S, T είναι μη κενά πεπερασμένα σύνολα και $m = \lceil |S|/|T| \rceil$, τότε υπάρχουν τουλάχιστον m στοιχεία του S , τα οποία αντιστοιχίζονται στην ίδια τιμή του T . Με άλλα λόγια να δείξετε ότι υπάρχουν διαφορετικά στοιχεία $s_1, s_2, \dots, s_m$ του S , τέτοια ώστε $f(s_1) = f(s_2) = \dots = f(s_m)$.

Η συνάρτηση f τοποθετεί όλα τα στοιχεία του συνόλου S στο σύνολο T . Θεωρούμε τα στοιχεία του T ως θέσεις, ώστε να εφαρμόσουμε τη γενικευμένη αρχή του περιστερώνα. Βάσει αυτής, η τοποθέτηση $|S|$ στοιχείων σε $|T|$ θέσεις συνεπάγεται ότι για τουλάχιστον μία θέση $t \in T$ θα υπάρχουν $m = \lceil |S|/|T| \rceil$ στοιχεία του S τέτοια ώστε να απεικονίζονται μέσω της f σε αυτό.

Άσκηση 14

Να δείξετε ότι, αν επιλέξουμε 5 σημεία στην εσωτερική περιοχή ενός τετραγώνου με μήκος πλευράς ίσο με 2, τότε τουλάχιστον δύο από αυτά τα σημεία δεν απέχουν περισσότερο από $\sqrt{2}$.

Το τετράγωνο μπορεί να χωριστεί σε 4 μικρότερα τετράγωνα με μήκος πλευράς ίσο με 1. Από την αρχή του περιστερώνα προκύπτει ότι 2 τουλάχιστον σημεία από τα 5 θα βρίσκονται στο ίδιο εσωτερικό τετράγωνο. Η μέγιστη απόσταση δύο σημείων σε ένα τετράγωνο είναι ίση με το μήκος της διαγωνίου του που στην προκειμένη περίπτωση είναι $\sqrt{2}$.

Συνεπώς υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία τα οποία δεν απέχουν περισσότερο από $\sqrt{2}$.

Άσκηση 15: Ακέραιοι και Υπόλοιπα

Δείξτε ότι σε οποιοδήποτε σύνολο $n + 1$ διαφορετικών ακεραίων, υπάρχουν τουλάχιστον δύο a_i, a_j (με $i \neq j$) τέτοιοι ώστε η διαφορά τους $a_i - a_j$ να είναι πολλαπλάσιο του n .

Λύση Άσκησης 15

Θεωρούμε ως "περιστερώνες" (φωλιές) τα n δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης με το n , δηλαδή το σύνολο $\{0, 1, \dots, n-1\}$.

Θεωρούμε ως "περιστέρια" (αντικείμενα) τους $n+1$ ακέραιους του συνόλου.

Από την Αρχή του Περιστερώνα, αφού έχουμε $n+1$ περιστέρια και n περιστερώνες, τουλάχιστον δύο ακέραιοι, έστω a_i και a_j , πρέπει να ανήκουν στον ίδιο περιστερώνα. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να έχουν το ίδιο υπόλοιπο r όταν διαιρεθούν με το n .

Μπορούμε να γράψουμε: $a_i = q_i \cdot n + r$

$a_j = q_j \cdot n + r$

Αφαιρώντας κατά μέλη, παίρνουμε: $a_i - a_j = (q_i - q_j) \cdot n$

Δεδομένου ότι q_i και q_j είναι ακέραιοι, η διαφορά $(q_i - q_j)$ είναι επίσης ακέραιος. Επομένως, η διαφορά $a_i - a_j$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του n .

Άσκηση 16: Σημεία σε Τρίγωνο

Δείξτε ότι αν επιλέξουμε 5 σημεία στο εσωτερικό ενός ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά μήκους 2, τότε τουλάχιστον δύο από αυτά τα σημεία απέχουν μεταξύ τους απόσταση το πολύ 1.

Λύση Άσκησης 16

Χωρίζουμε το μεγάλο ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 2 σε 4 μικρότερα ισόπλευρα τρίγωνα, ενώνοντας τα μέσα των τριών πλευρών του. Κάθε ένα από αυτά τα 4 μικρά τρίγωνα έχει πλευρά μήκους 1.

Θεωρούμε τα 4 μικρά τρίγωνα ως "περιστερώνες" (οι $k = 4$ φωλιές).

Θεωρούμε τα 5 σημεία ως "περιστέρια" (τα $N = 5$ αντικείμενα).

Από την Αρχή του Περιστερώνα, τουλάχιστον $\lceil 5/4 \rceil = 2$ σημεία πρέπει να βρίσκονται μέσα (ή στα όρια) του ίδιου μικρού τριγώνου.

Η μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων μέσα σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1 είναι ίση με το μήκος της πλευράς του, δηλαδή 1.

Συνεπώς, αυτά τα δύο σημεία που ανήκουν στο ίδιο μικρό τρίγωνο θα απέχουν μεταξύ τους απόσταση το πολύ 1.

Άσκηση 17: Φοιτητές και Τμήματα (Γενικευμένη Αρχή)

Μια σχολή έχει 4 τμήματα. Πόσοι φοιτητές (N) πρέπει να εγγραφούν κατ' ελάχιστον ώστε να είμαστε σίγουροι ότι τουλάχιστον ένα τμήμα έχει 15 φοιτητές;

Λύση Άσκησης 17

Αυτή είναι μια εφαρμογή της Γενικευμένης Αρχής του Περιστερώνα.

Έχουμε $k = 4$ "περιστερώνες" (τα τμήματα). Θέλουμε να βρούμε τον ελάχιστο αριθμό "περιστεριών" N (φοιτητές), ώστε τουλάχιστον ένας περιστερώνας να έχει $m = 15$ περιστέρια.

Η γενικευμένη αρχή λέει ότι $m = \lceil N/k \rceil$. Ψάχνουμε το ελάχιστο N ώστε:
 $15 = \lceil N/4 \rceil$

Αν $N = 4 \times 14 = 56$, τότε $\lceil 56/4 \rceil = 14$. Αυτό δεν είναι αρκετό (θα μπορούσαμε να έχουμε 14 φοιτητές σε κάθε τμήμα). Αν $N = 56 + 1 = 57$, τότε $\lceil 57/4 \rceil = \lceil 14.25 \rceil = 15$.

Εναλλακτικά, με τον τύπο $N = (m - 1)k + 1$:

$$N = (15 - 1) \times 4 + 1 = 14 \times 4 + 1 = 56 + 1 = 57.$$

Χρειάζονται τουλάχιστον 57 φοιτητές.

Άσκηση 18: Άθροισμα Υποακολουθίας

Δείξτε ότι σε οποιαδήποτε ακολουθία n ακεραίων $a_1, a_2, \dots, a_n$, υπάρχει πάντα μια συνεχόμενη (μη κενή) υποακολουθία $a_k, \dots, a_m$ (με $1 \leq k \leq m \leq n$) της οποίας το άθροισμα $a_k + \dots + a_m$ είναι διαιρετό με το n .

Λύση Άσκησης 18

Θεωρούμε τα n μερικά αθροίσματα:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Εξετάζουμε τα υπόλοιπα αυτών των αθροισμάτων modulo n ($S_k \pmod{n}$).

Περίπτωση 1: Αν κάποιο $S_k \equiv 0 \pmod{n}$. Τότε το άθροισμα

$S_k = a_1 + \dots + a_k$ είναι διαιρετό με το n και βρήκαμε την υποακολουθία (από το 1 έως το k).

Περίπτωση 2: Αν κανένα $S_k \not\equiv 0 \pmod{n}$. Τότε τα n αθροίσματα $S_1, \dots, S_n$ παίρνουν τιμές (υπόλοιπα) από το σύνολο $\{1, 2, \dots, n-1\}$, το οποίο έχει $n-1$ στοιχεία.

Έχουμε n "περιστέρια" (τα n αθροίσματα S_k) και $n-1$ "περιστερώνες" (τα $n-1$ δυνατά υπόλοιπα). Από την Αρχή του Περιστερώνα, τουλάχιστον δύο αθροίσματα, έστω S_j και S_m με $j < m$, πρέπει να έχουν το ίδιο υπόλοιπο:

$$S_m \equiv S_j \pmod{n}$$

Αυτό σημαίνει ότι $S_m - S_j \equiv 0 \pmod{n}$. Όμως

$S_m - S_j = (a_1 + \dots + a_m) - (a_1 + \dots + a_j) = a_{j+1} + \dots + a_m$. Αυτό είναι το άθροισμα της συνεχόμενης υποακολουθίας από το $k = j+1$ έως το m , και είναι διαιρετό με το n .

Άσκηση 19: Κάλτσες στο Συρτάρι (Γενικευμένη Αρχή)

Σε ένα συρτάρι υπάρχουν κόκκινες, μπλε και πράσινες κάλτσες. Πόσες κάλτσες πρέπει να τραβήξουμε (στο σκοτάδι) για να είμαστε σίγουροι ότι έχουμε τουλάχιστον 5 κάλτσες του ίδιου χρώματος;

Λύση Άσκησης 19

Εφαρμόζουμε τη Γενικευμένη Αρχή του Περιστερώνα.

"Περιστερώνες" (φωλιές) $k = 3$ (τα διαθέσιμα χρώματα: κόκκινο, μπλε, πράσινο).

"Περιστέρια" (αντικείμενα) N (ο αριθμός των κάλτσων που ψάχνουμε).

Θέλουμε $m = 5$ (τουλάχιστον 5 κάλτσες του ίδιου χρώματος).

Χρησιμοποιούμε τον τύπο $N = (m - 1)k + 1$.

$$N = (5 - 1) \times 3 + 1$$

$$N = 4 \times 3 + 1$$

$$N = 12 + 1 = 13$$

Χρειάζεται να τραβήξουμε τουλάχιστον 13 κάλτσες. (Σκεπτικό: Στη χειρότερη περίπτωση, τραβάμε 4 κόκκινες, 4 μπλε και 4 πράσινες. Η 13η κάλτσα θα συμπληρώσει υποχρεωτικά την πεντάδα σε ένα από τα χρώματα).

Άσκηση 20

Αποδείξτε ότι σε ένα πάρτι όπου υπάρχουν τουλάχιστον δύο άτομα, υπάρχουν δύο άτομα που γνωρίζουν τον ίδιο αριθμό από άλλα άτομα εκεί.

Έστω $K(x)$ ο αριθμός άλλων ανθρώπων στο πάρτι που γνωρίζει το άτομο x . Οι πιθανές τιμές για το $K(x)$ είναι $0, 1, \dots, n-1$, αν $n \geq 2$ είναι το πλήθος των ανθρώπων στο πάρτι. Ωστόσο είναι αδύνατο τόσο το 0 όσο και το $n-1$ να ανήκουν στην εικόνα της K καθώς αν ένας άνθρωπος γνωρίζει όλους τους υπόλοιπους, δεν είναι δυνατό να υπάρχει κάποιος που να μην γνωρίζει κανέναν άλλο. Συνεπώς η εικόνα της συνάρτησης K έχει το πολύ $n-1$ στοιχεία, ενώ το πεδίο ορισμού έχει n στοιχεία, οπότε υπάρχουν δύο τουλάχιστον άτομα για τα οποία η τιμή της K είναι ίδια, δηλαδή γνωρίζουν το ίδιο πλήθος ατόμων (αρχή του περιστερώνα).

Άσκηση 21: Αθροίσματα Υποσυνόλων

Έστω S ένα σύνολο 10 διαφορετικών ακεραίων αριθμών, επιλεγμένων από το σύνολο $\{1, 2, \dots, 100\}$. Δείξτε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαφορετικά, μη κενά και ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του S , των οποίων τα στοιχεία έχουν το ίδιο άθροισμα.

1. **"Περιστέρια"**: Τα μη κενά υποσύνολα του S . Αφού $|S| = 10$, ο αριθμός των μη κενών υποσυνόλων είναι $N = 2^{10} - 1 = 1023$.

2. **"Περιστερώνες"**: Τα δυνατά αθροίσματα.

- Ελάχιστο άθροισμα: ≥ 1 .
- Μέγιστο άθροισμα: Το πολύ $100 + 99 + \dots + 91 = 955$.

Άρα, ο αριθμός των δυνατών αθροισμάτων (φωλιές) είναι $k \leq 955$.

3. **Εφαρμογή της Αρχής**: Έχουμε $N = 1023$ υποσύνολα (περιστέρια) και $k \leq 955$ αθροίσματα (φωλιές). Επειδή $N > k$, από την Αρχή του Περιστερώνα, πρέπει τουλάχιστον δύο διαφορετικά υποσύνολα, έστω X και Y , να έχουν το ίδιο άθροισμα: $Sum(X) = Sum(Y)$.

4. **Εξασφάλιση ότι είναι Ξένα**: Για να βρούμε ξένα σύνολα, αφαιρούμε την κοινή τομή τους $K = X \cap Y$ και από τα δύο: Έστω $A = X \setminus K$ και $B = Y \setminus K$. (Τα A, B είναι ξένα).

Από $Sum(X) = Sum(Y) \Rightarrow Sum(A) + Sum(K) = Sum(B) + Sum(K) \Rightarrow Sum(A) = Sum(B)$.

Επειδή $X \neq Y$, τα A και B δεν μπορεί να είναι και τα δύο κενά. Επειδή τα στοιχεία είναι θετικοί ακέραιοι, αν

$A = \emptyset \Rightarrow Sum(A) = 0 \Rightarrow Sum(B) = 0 \Rightarrow B = \emptyset$, που οδηγεί σε $X = Y$ (άτοπο).

Άρα τα A, B είναι μη κενά.

Άσκηση 22: Ανάθεση Ρόλων (Casting)

Σε μια θεατρική παραγωγή υπάρχουν 6 ηθοποιοί και 6 διαφορετικά θεατρικά έργα. Ένας «ρόλος» είναι ο συνδυασμός ενός ηθοποιού με το συγκεκριμένο έργο στο οποίο παίζει.

Μια ανάθεση ρόλων ονομάζεται **πλήρης** αν κάθε ηθοποιός παίζει σε τουλάχιστον ένα έργο ΚΑΙ κάθε έργο έχει στο καστ του τουλάχιστον έναν ηθοποιό.

Ερώτημα

Έστω X αριθμός τέτοιος ώστε να ισχύει ότι:

- α. Υπάρχει** πλήρης ανάθεση X ρόλων, που **όποιος** ρόλος αφαιρεθεί η ανάθεση **δεν** είναι πλήρης.
- β. Για κάθε** πλήρη ανάθεση $X + 1$ ρόλων, **υπάρχει** ρόλος που αν αφαιρεθεί η ανάθεση παραμένει πλήρης.

Πόσο είναι το X ; Αποδείξτε και τα δύο σκέλη (α) και (β).

Απόδειξη του (α): Ύπαρξη για $X=10$

Στόχος

Πρέπει να κατασκευάσουμε μια πλήρη ανάθεση 10 ρόλων όπου κάθε ρόλος είναι "κρίσιμος" (δηλ. ο ηθοποιός του ρόλου παίζει μόνο 1 φορά, ή το έργο του ρόλου παίζεται μόνο 1 φορά).

Κατασκευή

- Αναθέτουμε 5 ρόλους στον **Ηθοποιό 1** (H_1), για τα **Έργα 1 έως 5** ($E_1...E_5$).
- Αναθέτουμε 5 ρόλους στο **Έργο 6** (E_6), για τους **Ηθοποιούς 2 έως 6** ($H_2...H_6$).

Σύνολο ρόλων: $5 + 5 = 10$.

- **Πλήρης ανάθεση;** Καλύπτονται οι H_1-H_6 και τα E_1-E_6 . **Ναι.**
- **Ελάχιστη;**
 - Οι ρόλοι $(H_1, E_1)...(H_1, E_5)$ είναι κρίσιμοι (τα E_1-E_5 έχουν 1 ηθοποιό).
 - Οι ρόλοι $(H_2, E_6)...(H_6, E_6)$ είναι κρίσιμοι (οι H_2-H_6 έχουν 1 ρόλο).

Ναι, όλοι οι 10 ρόλοι είναι κρίσιμοι.

Απόδειξη του (β): Βήμα 1 - Η Στρατηγική

Στόχος

Θέλουμε να δείξουμε ότι **κάθε** πλήρης ανάθεση $X + 1 = 11$ ρόλων έχει τουλάχιστον έναν "πλεονάζοντα" ρόλο.

Ορισμός

"Πλεονάζων" ρόλος (H, E) είναι αυτός όπου (ο H παίζει σε ≥ 2 έργα) ΚΑΙ (το E έχει ≥ 2 ηθοποιούς).

Μέθοδος: Εις Άτοπον Απαγωγή

ΥΠΟΘΕΣΗ (προς άτοπο): Έστω ότι υπάρχει μια πλήρης ανάθεση 11 ρόλων όπου **ΚΑΝΕΝΑΣ** ρόλος δεν είναι πλεονάζων.

Αυτό σημαίνει ότι **ΟΛΟΙ** οι 11 ρόλοι είναι "κρίσιμοι".

Απόδειξη του (β): Βήμα 2 - Οι Συνέπειες της Υπόθεσης

Αν όλοι οι 11 ρόλοι είναι "κρίσιμοι", τότε: Κάθε ρόλος (H , E) πρέπει να ικανοποιεί: (ο H παίζει 1 ρόλο) $\mathbf{H}$ (το E έχει 1 ηθοποιό).

Έστω H_1 οι ηθοποιοί με 1 ρόλο ($|H_1| = h_1$) Έστω E_1 τα έργα με 1 ηθοποιό ($|E_1| = e_1$)

Η υπόθεσή μας σημαίνει ότι **δεν** υπάρχει ρόλος που να ανήκει ταυτόχρονα σε ηθοποιό $H \notin H_1$ ΚΑΙ σε έργο $E \notin E_1$.

Ας μετρήσουμε τους ρόλους: $N = (\text{Ρόλοι σε } H_1) + (\text{Ρόλοι σε } H \setminus H_1)$
 $11 = (h_1 \times 1) + (\text{Ρόλοι που παίζονται από ηθοποιούς με } \geq 2 \text{ ρόλους})$

Οι Ρόλοι σε $H \setminus H_1$ πρέπει να είναι κρίσιμοι. Αφού οι ηθοποιοί τους δεν είναι στο H_1 , τα έργα τους πρέπει να είναι στο E_1 .

Απόδειξη του (β): Βήμα 3 - Η Ανισότητα

Από το προηγούμενο slide: Οι ρόλοι που παίζονται από ηθοποιούς $H \setminus H_1$ πρέπει όλοι να ανήκουν σε έργα E_1 .

Ο συνολικός αριθμός ρόλων που ανήκουν στα έργα του E_1 είναι ακριβώς $e_1 \times 1 = e_1$.

Άρα, (Ρόλοι σε $H \setminus H_1$) $\leq e_1$.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση $11 = h_1 + (\text{Ρόλοι σε } H \setminus H_1)$, παίρνουμε:

$$11 \leq h_1 + e_1$$

Η Υπόθεσή μας (όλοι οι 11 ρόλοι είναι κρίσιμοι) μας οδήγησε αναγκαστικά στο συμπέρασμα ότι $h_1 + e_1 \geq 11$.

Απόδειξη του (β): Βήμα 4 - Το Άτοπο

Το συμπέρασμα $h_1 + e_1 \geq 11$ πρέπει να ελεγχθεί.

Γνωρίζουμε ότι: $h_1 =$ αριθμός ηθοποιών με 1 ρόλο. $\implies h_1 \leq 6$ (αφού έχουμε 6 ηθοποιούς). $e_1 =$ αριθμός έργων με 1 ηθοποιό. $\implies e_1 \leq 6$ (αφού έχουμε 6 έργα).

Οι μόνες περιπτώσεις για να ισχύει $h_1 + e_1 \geq 11$ είναι: (1) $h_1 = 5, e_1 = 6$ (2) $h_1 = 6, e_1 = 5$ (3) $h_1 = 6, e_1 = 6$

Ας εξετάσουμε την περίπτωση $h_1 = 6$:

- $h_1 = 6$ σημαίνει: "Και οι 6 ηθοποιοί παίζουν ακριβώς 1 ρόλο".
- Συνολικός αριθμός ρόλων $= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$.
- Η Υπόθεσή μας μας οδήγησε στο ότι έχουμε 6 ρόλους.
- Αυτό είναι **ΑΤΟΠΟ**, γιατί τα δεδομένα μας λένε ότι έχουμε **11 ρόλους** ($6 \neq 11$).

Ας εξετάσουμε την περίπτωση $e_1 = 6$:

- $e_1 = 6$ σημαίνει: "Και τα 6 έργα έχουν ακριβώς 1 ηθοποιό".
- Συνολικός αριθμός ρόλων $= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$.
- Και πάλι, $6 \neq 11$. **ΑΤΟΠΟ**.

Απόδειξη του (β): Βήμα 5 - Συμπέρασμα

Όλες οι δυνατές περιπτώσεις ($h_1 = 6$ ή $e_1 = 6$) που προκύπτουν από το συμπέρασμα $h_1 + e_1 \geq 11$ οδηγούν σε Άτοπο.

Το Άτοπο προέκυψε επειδή η αρχική μας Υπόθεση ήταν λανθασμένη.

Η Υπόθεση ήταν: "Όλοι οι 11 ρόλοι είναι κρίσιμοι".

Αφού η υπόθεση είναι ψευδής, η αλήθεια είναι το ακριβές αντίθετό της:

Συμπέρασμα

"Τουλάχιστον ένας ρόλος ΔΕΝ είναι κρίσιμος"
(δηλαδή, είναι πλεονάζων).

Αυτό αποδεικνύει το (β).

Άσκηση 23

Πόσα πιθανά αποτελέσματα υπάρχουν σε έναν αγώνα ταχύτητας με 3 άλογα, αν είναι δυνατή η ισοπαλία? [Παρατήρηση: Δύο ή τρία άλογα μπορεί να είναι ισόπαλα.]

Αν δεν υπάρχουν ισοπαλίες υπάρχουν $3! = 6$ μεταθέσεις του συνόλου των τριών αλόγων που αντιστοιχούν σε 6 πιθανά αποτελέσματα.

Αν δύο άλογα είναι ισόπαλα, υπάρχουν 3 διαφορετικοί τρόποι να επιλεγεί πιο άλογο δεν θα είναι ισόπαλο. Για καθέναν από αυτούς τους τρόπους, υπάρχουν δύο τρόποι να επιλεγεί αν αυτό το άλογο θα είναι πρώτο ή δεύτερο. Συνεπώς, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου έχουμε $3 \cdot 2 = 6$ τρόπους.

Τέλος υπάρχει η περίπτωση και τα τρία άλογα να είναι ισόπαλα. Συνεπώς τα πιθανά αποτελέσματα είναι σύμφωνα με τον κανόνα του αθροίσματος $6 + 6 + 1 = 13$.

Άσκηση 24

Μια ομάδα περιέχει n άνδρες και n γυναίκες. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να τοποθετήσουμε τα άτομα αυτά σε μια σειρά, όπου οι άνδρες και οι γυναίκες εναλλάσσονται;

Υπάρχουν $n!$ μεταθέσεις των ανδρών και $n!$ μεταθέσεις (διατεταγμένες τοποθετήσεις) των γυναικών.

Για κάθε τρόπο τοποθέτησης των ανδρών και των γυναικών, υπάρχουν δύο δυνατότητες: είτε κάθε γυναίκα θα έπεται του αντίστοιχου άνδρα $MWMWMW....MW$, είτε κάθε άνδρας θα έπεται της αντίστοιχης γυναίκας $WMWMW....WM$.

Συνεπώς, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου και εφόσον η τοποθέτηση των ατόμων σε μια εναλλασσόμενη σειρά αναλύεται στις 3 παραπάνω διαδικασίες, υπάρχουν $2 * n! * n! = 2(n!)^2$ τρόποι.

Άσκηση 25

Πόσοι τρόποι υπάρχουν έτσι ώστε 8 άνδρες και 5 γυναίκες να σταθούν σε μία γραμμή χωρίς μία γυναίκα να στέκεται δίπλα σε μία άλλη; [Υπόδειξη: Πρώτα τοποθετήστε τους άνδρες και μετά εξετάστε πιθανές θέσεις για τις γυναίκες]

Καταρχάς υπάρχουν $P(8, 8) = 8!$ μεταθέσεις, δηλαδή διατεταγμένες τοποθετήσεις των ανδρών. Όπως φαίνεται, υπάρχουν 9 θέσεις στις οποίες μπορούν να σταθούν οι γυναίκες χωρίς να βρίσκονται η μία δίπλα στην άλλη: -M-M-M-M-M-M-M-M-.

Υπάρχουν $P(9, 5) = 9!/4!$ τρόποι να τοποθετηθούν διατεταγμένα 5 γυναίκες σε αυτές τις 9 θέσεις.

Συνεπώς, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν συνολικά $8! \cdot 9!/4! = 609.638.400$ τρόποι.

Άσκηση 26

Πόσες συμβολοσειρές bit μήκους 10 περιέχουν

- 1 ακριβώς τέσσερις μονάδες;
- 2 το πολύ τέσσερις μονάδες;
- 3 το λιγότερο τέσσερις μονάδες;
- 4 ίσο αριθμό μηδενικών και μονάδων;

- ❶ Για να προσδιορίζουμε μια συμβολοσειρά μήκους 10 με ακριβώς 4 μονάδες αρκεί να προσδιορίσουμε τις θέσεις όπου θα βρίσκονται οι μονάδες. Έχουμε λοιπόν να επιλέξουμε έναν συνδυασμό 4 θέσεων από τις 10 συνολικά θέσεις, εφόσον δεν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία θα τις επιλέξουμε. Συνεπώς υπάρχουν $C(10, 4) = 210$ τρόποι επιλογής των θέσεων και ίσο πλήθος συμβολοσειρών.
- ❷ Σε αυτή την περίπτωση η συμβολοσειρά περιέχει είτε 0, είτε 1, είτε 2, είτε 3, είτε 4 μονάδες. Από τον κανόνα αθροίσματος προκύπτει ότι υπάρχουν $C(10, 4) + C(10, 3) + C(10, 2) + C(10, 1) + C(10, 0) = 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 386$ τέτοιες συμβολοσειρές.
- ❸ Αντιστοίχως, σε αυτή την περίπτωση η συμβολοσειρά περιέχει 4, 5, 6, 7, 8, 9 ή 10 μονάδες. Επομένως υπάρχουν $C(10, 10) + \dots + C(10, 4) = 1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 = 848$ τέτοιες συμβολοσειρές. Ένας δεύτερος τρόπος θα ήταν να αφαιρέσουμε από το συνολικό πλήθος συμβολοσειρών, τις συμβολοσειρές που έχουν μέχρι 3 μονάδες.

- ❖ Οι συμβολοσειρές έχουν σε αυτή την περίπτωση 5 ακριβώς μονάδες οπότε το πλήθος τους είναι $C(10, 5) = 252$.

Εδώ προκύπτει και ένας διαφορετικός τρόπος απάντησης του ερωτήματος 2. Όταν δεν έχουμε ίσο πλήθος μηδενικών και μονάδων τότε έχουμε είτε το πολύ 4 είτε τουλάχιστον 6 μονάδες. Λόγω συμμετρίας των συνδυασμών έχουμε το πολύ 4 μονάδες στις μισές από αυτές τις περιπτώσεις. Επομένως, η απάντηση σε αυτή την περίπτωση είναι $(2^{10} - C(10, 5))/2 = (1024 - 252)/2 = 386$.

Άσκηση 27

Υπάρχουν 6 δρομείς σε έναν αγώνα 100 μέτρων. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να απονεμηθούν μετάλλια αν είναι δυνατή η ισοπαλία; (ο δρομέας ή οι δρομείς που τερματίζουν ταχύτερα λαμβάνουν χρυσά μετάλλια, ο δρομέας ή οι δρομείς που τερματίζουν πίσω ακριβώς από έναν δρομέα λαμβάνουν ασημένια μετάλλια και ο δρομέας ή οι δρομείς που τερματίζουν πίσω ακριβώς από δύο δρομείς, λαμβάνουν χάλκινα μετάλλια).

Η επίλυση αυτού του προβλήματος απαιτεί την ανάλυσή του σε περιπτώσεις:

1. Αν υπάρχουν μοναδικοί νικητές του χρυσού και του ασημένιου μετάλλιου, υπάρχουν $P(6, 2) = 6 \cdot 5 = 30$ τρόποι επιλογής τους. Το χάλκινο μετάλλιο μπορεί να δοθεί σε οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο S των 4 δρομέων που απομένουν. Τα μη κενά υποσύνολα είναι στο πλήθος $2^{|S|} - 1 = 15$. Επομένως, υπάρχουν συνολικά $30 \cdot 15 = 450$ τρόποι σε αυτή την περίπτωση.
2. Αν υπάρχει μια ισοπαλία 2 ατόμων για την πρώτη θέση τότε προφανώς υπάρχουν $C(6, 2) = 15$ τρόποι να επιλεγούν οι δρομείς που θα λάβουν το χρυσό. Το χάλκινο μετάλλιο (εφόσον σε αυτή την περίπτωση δεν απονέμεται ασημένιο) μπορεί να δοθεί σε οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο των υπόλοιπων 4 δρομέων, που είναι στο πλήθος 15. Συνεπώς υπάρχουν $15 \cdot 15 = 225$ τρόποι απονομής των μεταλλίων σε αυτή την περίπτωση.

3. Αν k δρομείς τερματίσουν πρώτοι με $k \geq 3$, τότε υπάρχουν $C(6, k)$ τρόποι απονομής του χρυσού μετάλλιου. Σε αυτή την περίπτωση δεν δίνονται άλλα μετάλλια συνεπώς σύμφωνα με τον κανόνα αθροίσματος υπάρχουν

$$C(6, 3) + C(6, 4) + C(6, 5) + C(6, 6) = 20 + 15 + 6 + 1 = 42 \text{ τρόποι απονομής του χρυσού.}$$

4. Η μόνη άλλη περίπτωση είναι να υπάρχει μοναδικός νικητής του χρυσού και k δρομείς να τερματίσουν δεύτεροι, όπου $k \geq 2$. Σε αυτή την περίπτωση δεν απονέμονται χάλκινα μετάλλια. Ο νικητής μπορεί να επιλεγεί με 6 τρόπους ενώ στη δεύτερη θέση μπορεί να βρίσκονται οι δρομείς σε οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο των υπόλοιπων 5 δρομέων εκτός από τα υποσύνολα που έχουν μόνο ένα στοιχείο, καθώς $k \geq 2$. Το πλήθος αυτών των υποσυνόλων είναι $2^5 - 5 - 1 = 26$. Συνεπώς υπάρχουν συνολικά $6 * 26 = 156$ τρόποι απονομής μεταλλίων σε αυτή την περίπτωση.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα αθροίσματος, υπάρχουν συνολικά

$$450 + 225 + 42 + 156 = 873 \text{ τρόποι απονομής μεταλλίων.}$$

Άσκηση 28

Πόσοι τρόποι υπάρχουν έτσι ώστε 20 άνδρες και 4 γυναίκες να σταθούν σε μία γραμμή χωρίς μία γυναίκα να στέκεται δίπλα σε μία άλλη και το πλήθος των ανδρων σε διαδοχικές θέσεις να είναι άρτιο;

Καταρχάς υπάρχουν $P(20, 20) = 20!$ μεταθέσεις, δηλαδή διατεταγμένες τοποθετήσεις των ανδρών. Όπως φαίνεται, υπάρχουν 11 θέσεις στις οποίες μπορούν να σταθούν οι γυναίκες χωρίς να βρίσκονται η μία δίπλα στην άλλη και το πλήθος των ανδρών σε διαδοχικές θέσεις να είναι άρτιο:

-MM-MM-MM-MM-MM-MM-MM-MM-MM-.

Υπάρχουν $P(11, 4) = 11!/(11 - 4)! = 11!/7!$ τρόποι να τοποθετηθούν διατεταγμένα 4 γυναίκες σε αυτές τις 11 θέσεις.

Συνεπώς, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν συνολικά $20! \cdot 11!/7!$ τρόποι (πολύ μεγάλος αριθμός).

Άσκηση 29

Αποδείξτε ότι $\binom{2n}{2} = 2 \binom{n}{2} + n^2$ συνδυαστικά και αλγεβρικά.

Συνδυαστικά

Μπορούμε να σκεφτούμε τον συνδυασμό $2n$ ατόμων ανά 2 ως εξής: έστω ότι έχουμε ένα σύνολο με n άνδρες και n γυναίκες και θέλουμε να επιλέξουμε 2 άτομα από αυτό. Τότε μπορούμε να επιλέξουμε είτε 2 άτομα από το σύνολο των ανδρών, είτε 2 άτομα από το σύνολο των γυναικών είτε 1 άνδρα και 1 γυναίκα. Από τον κανόνα του αθροίσματος προκύπτει ότι το συνολικό πλήθος είναι $\binom{n}{2} + \binom{n}{2} + n \times n$ (στην περίπτωση που επιλέξουμε 1 άνδρα με n τρόπους και 1 γυναίκα με άλλους n τρόπους). ΟΕΔ.

Αλγεβρικά

$$\binom{2n}{2} + n^2 = 2 \frac{n!}{2!(n-2)!} + n^2 = n(n-1) + n^2 = n(2n-1) = \frac{2n(2n-1)}{2} = \binom{2n}{2}$$

Άσκηση 30 (Ταυτότητα Επιτροπής-Προέδρου)

Αποδείξτε ότι για $1 \leq k \leq n$:

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

Άσκηση 30: Συνδυαστική Απόδειξη

Συνδυαστικά

Θα μετρήσουμε με δύο τρόπους το πλήθος των τρόπων για να επιλέξουμε μια επιτροπή k ατόμων από μια ομάδα n ατόμων, και ταυτόχρονα να ορίσουμε έναν **πρόεδρο** από αυτή την επιτροπή.

- **1ος Τρόπος (Αριστερό Μέλος):** Πρώτα επιλέγουμε την k -μελή επιτροπή ($\binom{n}{k}$ τρόποι) και μετά τον πρόεδρο από αυτήν (k τρόποι).

$$\text{Σύνολο: } k \binom{n}{k}.$$

- **2ος Τρόπος (Δεξιό Μέλος):** Πρώτα επιλέγουμε τον 1 πρόεδρο από τα n άτομα (n τρόποι) και μετά τα υπόλοιπα $k - 1$ μέλη της επιτροπής από τα εναπομείναντα $n - 1$ άτομα ($\binom{n-1}{k-1}$ τρόποι).

$$\text{Σύνολο: } n \binom{n-1}{k-1}.$$

Αφού μετράμε το ίδιο αντικείμενο με δύο διαφορετικούς τρόπους, οι ποσότητες πρέπει να είναι ίσες.

Άσκηση 30: Συνδυαστική Απόδειξη

Συνδυαστικά

Θα μετρήσουμε με δύο τρόπους το πλήθος των τρόπων για να επιλέξουμε μια επιτροπή k ατόμων από μια ομάδα n ατόμων, και ταυτόχρονα να ορίσουμε έναν **πρόεδρο** από αυτή την επιτροπή.

- **1ος Τρόπος (Αριστερό Μέλος):** Πρώτα επιλέγουμε την k -μελή επιτροπή ($\binom{n}{k}$ τρόποι) και μετά τον πρόεδρο από αυτήν (k τρόποι).

$$\text{Σύνολο: } k \binom{n}{k}.$$

- **2ος Τρόπος (Δεξιό Μέλος):** Πρώτα επιλέγουμε τον 1 πρόεδρο από τα n άτομα (n τρόποι) και μετά τα υπόλοιπα $k - 1$ μέλη της επιτροπής από τα εναπομείναντα $n - 1$ άτομα ($\binom{n-1}{k-1}$ τρόποι).

$$\text{Σύνολο: } n \binom{n-1}{k-1}.$$

Αφού μετράμε το ίδιο αντικείμενο με δύο διαφορετικούς τρόπους, οι ποσότητες πρέπει να είναι ίσες.

Άσκηση 30: Συνδυαστική Απόδειξη

Συνδυαστικά

Θα μετρήσουμε με δύο τρόπους το πλήθος των τρόπων για να επιλέξουμε μια επιτροπή k ατόμων από μια ομάδα n ατόμων, και ταυτόχρονα να ορίσουμε έναν **πρόεδρο** από αυτή την επιτροπή.

- **1ος Τρόπος (Αριστερό Μέλος):** Πρώτα επιλέγουμε την k -μελή επιτροπή ($\binom{n}{k}$ τρόποι) και μετά τον πρόεδρο από αυτήν (k τρόποι).

$$\text{Σύνολο: } k \binom{n}{k}.$$

- **2ος Τρόπος (Δεξιό Μέλος):** Πρώτα επιλέγουμε τον 1 πρόεδρο από τα n άτομα (n τρόποι) και μετά τα υπόλοιπα $k - 1$ μέλη της επιτροπής από τα εναπομείναντα $n - 1$ άτομα ($\binom{n-1}{k-1}$ τρόποι).

$$\text{Σύνολο: } n \binom{n-1}{k-1}.$$

Αφού μετράμε το ίδιο αντικείμενο με δύο διαφορετικούς τρόπους, οι ποσότητες πρέπει να είναι ίσες.

Άσκηση 30: Συνδυαστική Απόδειξη

Συνδυαστικά

Θα μετρήσουμε με δύο τρόπους το πλήθος των τρόπων για να επιλέξουμε μια επιτροπή k ατόμων από μια ομάδα n ατόμων, και ταυτόχρονα να ορίσουμε έναν **πρόεδρο** από αυτή την επιτροπή.

- **1ος Τρόπος (Αριστερό Μέλος):** Πρώτα επιλέγουμε την k -μελή επιτροπή ($\binom{n}{k}$ τρόποι) και μετά τον πρόεδρο από αυτήν (k τρόποι).

$$\text{Σύνολο: } k \binom{n}{k}.$$

- **2ος Τρόπος (Δεξιό Μέλος):** Πρώτα επιλέγουμε τον 1 πρόεδρο από τα n άτομα (n τρόποι) και μετά τα υπόλοιπα $k - 1$ μέλη της επιτροπής από τα εναπομείναντα $n - 1$ άτομα ($\binom{n-1}{k-1}$ τρόποι).

$$\text{Σύνολο: } n \binom{n-1}{k-1}.$$

Αφού μετράμε το ίδιο αντικείμενο με δύο διαφορετικούς τρόπους, οι ποσότητες πρέπει να είναι ίσες.

Άσκηση 30: Αλγεβρική Απόδειξη

Αλγεβρικά

Ξεκινάμε από το αριστερό μέλος:

$$\begin{aligned}
 k \binom{n}{k} &= k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
 &= k \cdot \frac{n!}{k \cdot (k-1)!(n-k)!} \\
 &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
 &= \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\
 &= n \cdot \left[\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \right] \\
 &= n \binom{n-1}{k-1} \quad (\text{ΟΕΔ})
 \end{aligned}$$

Άσκηση 30: Αλγεβρική Απόδειξη

Αλγεβρικά

Ξεκινάμε από το αριστερό μέλος:

$$\begin{aligned}
 k \binom{n}{k} &= k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
 &= k \cdot \frac{n!}{k \cdot (k-1)!(n-k)!} \\
 &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
 &= \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\
 &= n \cdot \left[\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \right] \\
 &= n \binom{n-1}{k-1} \quad (\text{ΟΕΔ})
 \end{aligned}$$

Άσκηση 30: Αλγεβρική Απόδειξη

Αλγεβρικά

Ξεκινάμε από το αριστερό μέλος:

$$\begin{aligned}
 k \binom{n}{k} &= k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
 &= k \cdot \frac{n!}{k \cdot (k-1)!(n-k)!} \\
 &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
 &= \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\
 &= n \cdot \left[\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \right] \\
 &= n \binom{n-1}{k-1} \quad (\text{ΟΕΔ})
 \end{aligned}$$

Άσκηση 30: Αλγεβρική Απόδειξη

Αλγεβρικά

Ξεκινάμε από το αριστερό μέλος:

$$\begin{aligned}
 k \binom{n}{k} &= k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
 &= k \cdot \frac{n!}{k \cdot (k-1)!(n-k)!} \\
 &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
 &= \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\
 &= n \cdot \left[\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \right] \\
 &= n \binom{n-1}{k-1} \quad (\text{ΟΕΔ})
 \end{aligned}$$

Άσκηση 30: Αλγεβρική Απόδειξη

Αλγεβρικά

Ξεκινάμε από το αριστερό μέλος:

$$\begin{aligned}
 k \binom{n}{k} &= k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
 &= k \cdot \frac{n!}{k \cdot (k-1)!(n-k)!} \\
 &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
 &= \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\
 &= n \cdot \left[\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \right] \\
 &= n \binom{n-1}{k-1} \quad (\text{ΟΕΔ})
 \end{aligned}$$

Άσκηση 30: Αλγεβρική Απόδειξη

Αλγεβρικά

Ξεκινάμε από το αριστερό μέλος:

$$\begin{aligned}
 k \binom{n}{k} &= k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
 &= k \cdot \frac{n!}{k \cdot (k-1)!(n-k)!} \\
 &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
 &= \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\
 &= n \cdot \left[\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \right] \\
 &= n \binom{n-1}{k-1} \quad (\text{ΟΕΔ})
 \end{aligned}$$

Άσκηση 31 (Ταυτότητα Υπο-επιτροπής)

Αποδείξτε ότι για $0 \leq m \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}$$

Άσκηση 31: Συνδυαστική Απόδειξη

Συνδυαστικά

Θα μετρήσουμε το πλήθος των τρόπων για να επιλέξουμε από n άτομα, μια "επιτροπή" k ατόμων και μια "ηγετική υπο-ομάδα" m ατόμων από αυτή την επιτροπή.

• 1ος Τρόπος (Αριστερό Μέλος):

- ❶ Επιλέγουμε την επιτροπή των k ατόμων ($\binom{n}{k}$ τρόποι).
- ❷ Επιλέγουμε την m -μελή ηγεσία από τα k μέλη ($\binom{k}{m}$ τρόποι).

Σύνολο: $\binom{n}{k} \binom{k}{m}$.

• 2ος Τρόπος (Δεξιό Μέλος):

- ❶ Επιλέγουμε πρώτα την m -μελή ηγεσία από τα n άτομα ($\binom{n}{m}$ τρόποι).
- ❷ Συμπληρώνουμε την επιτροπή επιλέγοντας τα υπόλοιπα $k - m$ μέλη από τα εναπομείναντα $n - m$ άτομα ($\binom{n-m}{k-m}$ τρόποι).

Σύνολο: $\binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}$.

Άσκηση 31: Συνδυαστική Απόδειξη

Συνδυαστικά

Θα μετρήσουμε το πλήθος των τρόπων για να επιλέξουμε από n άτομα, μια "επιτροπή" k ατόμων και μια "ηγετική υπο-ομάδα" m ατόμων από αυτή την επιτροπή.

• 1ος Τρόπος (Αριστερό Μέλος):

- ❶ Επιλέγουμε την επιτροπή των k ατόμων ($\binom{n}{k}$ τρόποι).
- ❷ Επιλέγουμε την m -μελή ηγεσία από τα k μέλη ($\binom{k}{m}$ τρόποι).

Σύνολο: $\binom{n}{k} \binom{k}{m}$.

• 2ος Τρόπος (Δεξιό Μέλος):

- ❶ Επιλέγουμε πρώτα την m -μελή ηγεσία από τα n άτομα ($\binom{n}{m}$ τρόποι).
- ❷ Συμπληρώνουμε την επιτροπή επιλέγοντας τα υπόλοιπα $k - m$ μέλη από τα εναπομείναντα $n - m$ άτομα ($\binom{n-m}{k-m}$ τρόποι).

Σύνολο: $\binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}$.

Άσκηση 31: Αλγεβρική Απόδειξη

Αλγεβρικά

Αριστερό Μέλος:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \binom{k}{m} &= \left[\frac{n!}{k!(n-k)!} \right] \cdot \left[\frac{k!}{m!(k-m)!} \right] \\ &= \frac{n!}{(n-k)!m!(k-m)!} \end{aligned}$$

Δεξιό Μέλος:

$$\begin{aligned} \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m} &= \left[\frac{n!}{m!(n-m)!} \right] \cdot \left[\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-m-(k-m))!} \right] \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{m!(k-m)!(n-k)!} \end{aligned}$$

Άσκηση 31: Αλγεβρική Απόδειξη

Αλγεβρικά

Αριστερό Μέλος:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \binom{k}{m} &= \left[\frac{n!}{k!(n-k)!} \right] \cdot \left[\frac{k!}{m!(k-m)!} \right] \\ &= \frac{n!}{(n-k)!m!(k-m)!} \end{aligned}$$

Δεξιό Μέλος:

$$\begin{aligned} \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m} &= \left[\frac{n!}{m!(n-m)!} \right] \cdot \left[\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-m-(k-m))!} \right] \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{m!(k-m)!(n-k)!} \end{aligned}$$

Άσκηση 31: Αλγεβρική Απόδειξη

Αλγεβρικά

Αριστερό Μέλος:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} \binom{k}{m} &= \left[\frac{n!}{k!(n-k)!} \right] \cdot \left[\frac{k!}{m!(k-m)!} \right] \\ &= \frac{n!}{(n-k)!m!(k-m)!}\end{aligned}$$

Δεξιό Μέλος:

$$\begin{aligned}\binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m} &= \left[\frac{n!}{m!(n-m)!} \right] \cdot \left[\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-m-(k-m))!} \right] \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{m!(k-m)!(n-k)!}\end{aligned}$$

Άσκηση 31: Αλγεβρική Απόδειξη

Αλγεβρικά

Αριστερό Μέλος:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \binom{k}{m} &= \left[\frac{n!}{k!(n-k)!} \right] \cdot \left[\frac{k!}{m!(k-m)!} \right] \\ &= \frac{n!}{(n-k)!m!(k-m)!} \end{aligned}$$

Δεξιό Μέλος:

$$\begin{aligned} \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m} &= \left[\frac{n!}{m!(n-m)!} \right] \cdot \left[\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-m-(k-m))!} \right] \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{m!(k-m)!(n-k)!} \end{aligned}$$

Άσκηση 31: Αλγεβρική Απόδειξη

Αλγεβρικά

Αριστερό Μέλος:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} \binom{k}{m} &= \left[\frac{n!}{k!(n-k)!} \right] \cdot \left[\frac{k!}{m!(k-m)!} \right] \\ &= \frac{n!}{(n-k)!m!(k-m)!}\end{aligned}$$

Δεξιό Μέλος:

$$\begin{aligned}\binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m} &= \left[\frac{n!}{m!(n-m)!} \right] \cdot \left[\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-m-(k-m))!} \right] \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{m!(k-m)!(n-k)!}\end{aligned}$$

Άσκηση 31: Αλγεβρική Απόδειξη

Αλγεβρικά

Αριστερό Μέλος:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} \binom{k}{m} &= \left[\frac{n!}{k!(n-k)!} \right] \cdot \left[\frac{k!}{m!(k-m)!} \right] \\ &= \frac{n!}{(n-k)!m!(k-m)!}\end{aligned}$$

Δεξιό Μέλος:

$$\begin{aligned}\binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m} &= \left[\frac{n!}{m!(n-m)!} \right] \cdot \left[\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-m-(k-m))!} \right] \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{m!(k-m)!(n-k)!}\end{aligned}$$

Άσκηση 32 (Σταθμισμένο Άθροισμα 2ου Βαθμού)

Αποδείξτε ότι για $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

Άσκηση 32: Συνδυαστική Απόδειξη

Συνδυαστικά

Θα μετρήσουμε τους τρόπους επιλογής επιτροπής (μεγέθους $k \geq 1$), ενός Προέδρου (Π) και ενός Γραμματέα (Γ) από την επιτροπή, όπου $\Pi = \Gamma$ είναι επιτρεπτό.

- **1ος Τρόπος (Αριστερό Μέλος):** Αθροίζουμε ως προς k : Επιλέγουμε επιτροπή $\binom{n}{k}$, μετά Πρόεδρο (k) και μετά Γραμματέα (k).

$$\text{Σύνολο: } \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}.$$

- **2ος Τρόπος (Δεξιό Μέλος):** Χωρίζουμε περιπτώσεις:
 - $\Pi = \Gamma$: Επιλέγουμε το 1 άτομο (n τρόποι) και τα υπόλοιπα μέλη από τα $n-1$ (2^{n-1} τρόποι). **Σύνολο 1:** $n2^{n-1}$.
 - $\Pi \neq \Gamma$: Επιλέγουμε Πρόεδρο (n), Γραμματέα ($n-1$) και τα υπόλοιπα μέλη από τα $n-2$ (2^{n-2} τρόποι). **Σύνολο 2:** $n(n-1)2^{n-2}$.

Συνολικά (1+2):

$$n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(2 \cdot 2^{n-2}) + n(n-1)2^{n-2}$$

Άσκηση 32: Συνδυαστική Απόδειξη

Συνδυαστικά

Θα μετρήσουμε τους τρόπους επιλογής επιτροπής (μεγέθους $k \geq 1$), ενός Προέδρου (Π) και ενός Γραμματέα (Γ) από την επιτροπή, όπου $\Pi = \Gamma$ είναι επιτρεπτό.

- **1ος Τρόπος (Αριστερό Μέλος):** Αθροίζουμε ως προς k : Επιλέγουμε επιτροπή $\binom{n}{k}$, μετά Πρόεδρο (k) και μετά Γραμματέα (k).

$$\text{Σύνολο: } \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}.$$

- **2ος Τρόπος (Δεξιό Μέλος):** Χωρίζουμε περιπτώσεις:

- $\Pi = \Gamma$: Επιλέγουμε το 1 άτομο (n τρόποι) και τα υπόλοιπα μέλη από τα $n-1$ (2^{n-1} τρόποι). **Σύνολο 1:** $n2^{n-1}$.
- $\Pi \neq \Gamma$: Επιλέγουμε Πρόεδρο (n), Γραμματέα ($n-1$) και τα υπόλοιπα μέλη από τα $n-2$ (2^{n-2} τρόποι). **Σύνολο 2:** $n(n-1)2^{n-2}$.

Συνολικά (1+2):

$$n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(2 \cdot 2^{n-2}) + n(n-1)2^{n-2}$$

Άσκηση 32: Συνδυαστική Απόδειξη

Συνδυαστικά

Θα μετρήσουμε τους τρόπους επιλογής επιτροπής (μεγέθους $k \geq 1$), ενός Προέδρου (Π) και ενός Γραμματέα (Γ) από την επιτροπή, όπου $\Pi = \Gamma$ είναι επιτρεπτό.

- **1ος Τρόπος (Αριστερό Μέλος):** Αθροίζουμε ως προς k : Επιλέγουμε επιτροπή $\binom{n}{k}$, μετά Πρόεδρο (k) και μετά Γραμματέα (k).

$$\text{Σύνολο: } \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}.$$

- **2ος Τρόπος (Δεξιό Μέλος):** Χωρίζουμε περιπτώσεις:
 - $\Pi = \Gamma$: Επιλέγουμε το 1 άτομο (n τρόποι) και τα υπόλοιπα μέλη από τα $n-1$ (2^{n-1} τρόποι). **Σύνολο 1:** $n2^{n-1}$.
 - $\Pi \neq \Gamma$: Επιλέγουμε Πρόεδρο (n), Γραμματέα ($n-1$) και τα υπόλοιπα μέλη από τα $n-2$ (2^{n-2} τρόποι). **Σύνολο 2:** $n(n-1)2^{n-2}$.

Συνολικά (1+2):

$$n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(2 \cdot 2^{n-2}) + n(n-1)2^{n-2}$$

Άσκηση 32: Συνδυαστική Απόδειξη

Συνδυαστικά

Θα μετρήσουμε τους τρόπους επιλογής επιτροπής (μεγέθους $k \geq 1$), ενός Προέδρου (Π) και ενός Γραμματέα (Γ) από την επιτροπή, όπου $\Pi = \Gamma$ είναι επιτρεπτό.

- **1ος Τρόπος (Αριστερό Μέλος):** Αθροίζουμε ως προς k : Επιλέγουμε επιτροπή $\binom{n}{k}$, μετά Πρόεδρο (k) και μετά Γραμματέα (k).

$$\text{Σύνολο: } \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}.$$

- **2ος Τρόπος (Δεξιό Μέλος):** Χωρίζουμε περιπτώσεις:

- $\Pi = \Gamma$: Επιλέγουμε το 1 άτομο (n τρόποι) και τα υπόλοιπα μέλη από τα $n-1$ (2^{n-1} τρόποι). **Σύνολο 1:** $n2^{n-1}$.
- $\Pi \neq \Gamma$: Επιλέγουμε Πρόεδρο (n), Γραμματέα ($n-1$) και τα υπόλοιπα μέλη από τα $n-2$ (2^{n-2} τρόποι). **Σύνολο 2:** $n(n-1)2^{n-2}$.

Συνολικά (1+2):

$$n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(2 \cdot 2^{n-2}) + n(n-1)2^{n-2}$$

Άσκηση 32: Αλγεβρική Απόδειξη

Αλγεβρικά

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $k^2 = k(k-1) + k$:

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k(k-1) \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$$

(Ο όρος για $k=1$ στο πρώτο άθροισμα είναι 0, άρα ξεκινά από $k=2$)

- **Υπολογισμός 1:** $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$
Από Άσκηση 30: $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$

$$\sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n 2^{n-1}$$

Άσκηση 32: Αλγεβρική Απόδειξη

Αλγεβρικά

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $k^2 = k(k-1) + k$:

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k(k-1) \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$$

(Ο όρος για $k=1$ στο πρώτο άθροισμα είναι 0, άρα ξεκινά από $k=2$)

- **Υπολογισμός 1:** $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$
Από Άσκηση 30: $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$

$$\sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n 2^{n-1}$$

• Υπολογισμός 2: $\sum_{k=2}^n k(k-1)\binom{n}{k}$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^n k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} &= \sum_{k=2}^n \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} \\
 &= \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \\
 &= n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} \\
 &= n(n-1)2^{n-2}
 \end{aligned}$$

Τελικό Άθροισμα (1+2):

$$\begin{aligned}
 n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} &= n(n-1)2^{n-2} + n \cdot (2 \cdot 2^{n-2}) \\
 &= (n^2 - n + 2n)2^{n-2} \\
 &= (n^2 + n)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}
 \end{aligned}$$

• Υπολογισμός 2: $\sum_{k=2}^n k(k-1)\binom{n}{k}$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^n k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} &= \sum_{k=2}^n \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} \\
 &= \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \\
 &= n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} \\
 &= n(n-1)2^{n-2}
 \end{aligned}$$

Τελικό Άθροισμα (1+2):

$$\begin{aligned}
 n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} &= n(n-1)2^{n-2} + n \cdot (2 \cdot 2^{n-2}) \\
 &= (n^2 - n + 2n)2^{n-2} \\
 &= (n^2 + n)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}
 \end{aligned}$$

Ασκηση 33

Ο πλούσιος θείος μας έχει και εργοστάσιο με σοκολάτες. Παρασκευάζει 3 είδη σοκολάτας: γάλακτος, λευκή και με αμύγδαλα. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε:

1. 10 σοκολάτες;
2. 10 σοκολάτες, έτσι ώστε να έχω τουλάχιστον 1 γάλακτος, τουλάχιστον 2 αμυγδάλου και τουλάχιστον 1 με λευκή σοκολάτα;
3. 14 σοκολάτες, έτσι ώστε να έχω το πολύ 4 γάλακτος, το πολύ 5 αμυγδάλου και το πολύ 6 με λευκή σοκολάτα;

1. Σε αυτή την άσκηση παρατηρούμε ότι έχουμε να επιλέξουμε από ένα σύνολο τριών στοιχείων (τα είδη της σοκολάτας) 10 αντικείμενα, όπου επιτρέπεται η επανάληψη. Συνεπώς το πλήθος των λύσεων είναι ίσο με το πλήθος των συνδυασμών των 3 στοιχείων ανά 10 με επανάληψη = $\binom{3+10-1}{10} = (3+10-1)!/(2! * 10!) = 12 \cdot 11/2 = 66$.

2. Σε αυτή την περίπτωση επιλέγονται αρχικά αυτές που πρέπει τουλάχιστον να υπάρχουν, που είναι 4. Οι υπόλοιπες 6 επιλέγονται από το σύνολο 3 στοιχείων, συνεπώς το πλήθος των τρόπων επιλογής είναι $\binom{3+6-1}{6} = 8!/(6! * 2!) = 28$.

Το πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί ως εξής: έστω x_1 σοκολάτες γάλακτος, x_2 αμυγδάλου και x_3 με λευκή σοκολάτα. Μπορούμε να εκφράσουμε το πρόβλημα επιλογής σαν την εύρεση του πλήθους των λύσεων όπου $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ και $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 1$. Έστω x'_i το πλήθος των σοκολάτων πλέον των αναγκαίων. Τότε ισχύει $x_1 = x'_1 + 1$, $x_2 = x'_2 + 2$, $x_3 = x'_3 + 1$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση προκύπτει $x'_1 + x'_2 + x'_3 = 6$, οπότε η λύση προκύπτει όπως στο ερώτημα 1 (επιλογή 6 αντικειμένων από σύνολο τριών στοιχείων).

3. Το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση του πλήθους των λύσεων της εξίσωσης: $x_1 + x_2 + x_3 = 14$, όπου $x_1 \leq 4$, $x_2 \leq 5$, $x_3 \leq 6$. Το πλήθος των λύσεων αυτής της εξίσωσης μπορεί να βρεθεί αν αφαιρεθεί από το συνολικό πλήθος των λύσεων της εξίσωσης χωρίς περιορισμούς, το πλήθος των λύσεων που τους παραβιάζουν. Οι περιορισμοί παραβιάζονται είτε όταν $x_1 \geq 5$, είτε όταν $x_2 \geq 6$, είτε όταν $x_3 \geq 7$. Ωστόσο, αυτές οι τρεις περιπτώσεις δεν είναι ξένες, δηλαδή αν τις εκφράσουμε ως σύνολα A , B και C έχουν κοινά στοιχεία.

Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού προκύπτει ότι:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

$$\begin{aligned} \text{Σύμφωνα με το ερώτημα 2: } |A| &= \binom{3+9-1}{9} = 55, |B| = \binom{3+8-1}{8} = 45, \\ |C| &= \binom{3+7-1}{7} = 36, |A \cap B| = \binom{3+3-1}{3} = 10, |A \cap C| = \binom{3+2-1}{2} = 6, \\ |B \cap C| &= \binom{3+1-1}{1} = 3, |A \cap B \cap C| = 0. \end{aligned}$$

Επομένως το πλήθος των λύσεων είναι:

$$\binom{3+14-1}{14} - |A \cup B \cup C| = 120 - 55 - 45 - 36 + 10 + 6 + 3 = 3.$$

Άσκηση 34

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε:

1. 40 διακεκριμένα βιβλία σε 4 διακεκριμένα ράφια, έτσι ώστε σε κάθε ράφι να έχω 10 βιβλία (δεν μας ενδιαφέρουν οι θέσεις των βιβλίων στα ράφια);
2. 40 διακεκριμένα βιβλία σε 4 όμοια ράφια, έτσι ώστε σε κάθε ράφι να έχω 10 βιβλία (δεν μας ενδιαφέρουν οι θέσεις των βιβλίων στα ράφια);
3. 40 όμοια βιβλία σε 4 διακεκριμένα ράφια;
4. 40 διακεκριμένα βιβλία σε 4 διακεκριμένα ράφια, αν η θέση των βιβλίων στα ράφια έχει σημασία;

1. Από τη θεωρία προκύπτει ότι το πλήθος των τρόπων είναι:

$$\frac{40!}{10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10!} = \frac{40!}{(10!)^4}$$

2. Δεδομένου ότι τα ράφια είναι πλέον όμοια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα διαίρεσης. Οι διαφορετικές μεταθέσεις των τεσσάρων ραφιών αντιστοιχούν στην ίδια τοποθέτηση των βιβλίων. Το πλήθος των μεταθέσεων είναι $4!$, συνεπώς το πλήθος των τρόπων είναι:

$$\frac{40!}{(10!)^4 \cdot 4!}$$

3. Από τη θεωρία προκύπτει ότι το πλήθος των τρόπων είναι:

$$\binom{4 + 40 - 1}{40} = 12.341$$

Υπάρχει αντιστοιχία 1-1 άναμεσα στους τρόπους τοποθέτησης 40 όμοιων βιβλίων σε 4 διακεκριμένα ράφια και τους τρόπους να πάρουμε 40 αντικείμενα από ένα σύνολο 4 στοιχείων, δηλαδή τους συνδυασμούς των 4 στοιχείων ανά 40 με επανάληψη. Βάζω ένα βιβλίο στο ράφι i κάθε φορά που συμπεριλαμβάνω το i στοιχείο του συνόλου στον συνδυασμό.

4. Μπορούμε να χωρίσουμε τη διαδικασία τοποθέτησης σε δύο επιμέρους διαδικασίες: α) Την τοποθέτηση των 40 βιβλίων στα 4 διακεκριμένα ράφια σαν να μη διακρίνονταν μεταξύ τους και β) τη διάταξή τους. Το πλήθος των τρόπων για την πραγματοποίηση της α) διαδικασίας υπολογίστηκε στο ερώτημα 3. Το πλήθος των διαφορετικών διατεταγμένων τοποθετήσεων των 40 βιβλίων είναι ίσο με το πλήθος των μεταθέσεών τους. Από τον κανόνα γινομένου προκύπτει ότι το συνολικό πλήθος των τρόπων είναι:

$$\binom{4 + 40 - 1}{40} \cdot 40! = 12.341 \cdot 40!$$

Ασκηση 35

Με πόσους τρόπους μπορούμε να αναθέσουμε 7 εργασίες σε 4 φοιτητές ώστε κάθε φοιτητής να έχει τουλάχιστον μία εργασία;

Στόχος: Να μετρήσουμε τις επί-συναρτήσεις από 7 εργασίες σε 4 φοιτητές, δηλαδή αναθέσεις όπου **κανείς δεν μένει χωρίς εργασία**.

Ορισμός συνόλων

- Το σύμπαν Ω : όλες οι αναθέσεις.

$$|\Omega| = 4^7.$$

- Για κάθε φοιτητή i :

$$A_i = \{\text{αναθέσεις όπου ο } i \text{ δεν παίρνει εργασία}\}.$$

- Θέλουμε:

$$N = |\Omega \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)|.$$

Όμως:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \binom{4}{1} 3^7 - \binom{4}{2} 2^7 + \binom{4}{3} 1^7.$$

$$N = 4^7 - \binom{4}{1} 3^7 + \binom{4}{2} 2^7 - \binom{4}{3} 1^7$$

Εγκλεισμός–Αποκλεισμός

- $|A_i| = 3^7$ (οι εργασίες πάνε μόνο στους άλλους 3).
- $|A_i \cap A_j| = 2^7$
- $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 1^7$

Ασκηση 36

Πόσοι διαφορετικοί όροι υπάρχουν στο ανάπτυγμα $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$ όταν προστεθούν όλοι οι όροι με όμοια σύνολα εκθετών.

Κάθε όρος του αθροίσματος έχει τη μορφή $Cx_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_m^{n_m}$ όπου τα n_i είναι μη αρνητικοί ακέραιοι που έχουν άθροισμα n .

Συνεπώς, το πλήθος των όρων είναι ίσο με το πλήθος των μη αρνητικών λύσεων της εξίσωσης $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$.

Παρατηρούμε ότι μια λύση αυτής της εξίσωσης αντιστοιχεί σε έναν τρόπο επιλογής n αντικειμένων από ένα σύνολο m στοιχείων, όπου επιτρέπεται η επανάληψη, έτσι ώστε να επιλεγθούν n_1 αντικείμενα του πρώτου τύπου, n_2 του δεύτερου και ούτω καθεξής.

Άρα το πλήθος των λύσεων είναι ίσο με το πλήθος των συνδυασμών- m στοιχείων ανά n , όπου επιτρέπεται η επανάληψη, το οποίο είναι ίσο με

$$\binom{n+m-1}{m-1} = \binom{n+m-1}{n}$$

Ασκηση 37

Πόσες μεταθέσεις των 26 γραμμάτων του Λατινικού αλφαβήτου δεν περιέχουν καμία από τις συμβολόσειρές fish, bird, ή rat;

Υπάρχουν συνολικά $26!$ μεταθέσεις όλου του αλφαβήτου. Για να αποκλείσουμε τις περιπτώσεις που περιέχουν τη λέξη fish, τοποθετούμε μαζί αυτά τα 4 γράμματα και τα μεταθέτουμε μαζί με τα άλλα 22 γράμματα, άρα υπάρχουν συνολικά $23!$ μεταθέσεις για αυτήν την επιλογή. Ομοίως υπάρχουν $23!$ μεταθέσεις που να περιέχουν τη λέξη bird και $24!$ που να περιέχουν τη λέξη rat.

Ωστόσο για να μη μετρήσουμε διπλά τις μεταθέσεις που αφαιρούμε εφαρμόζουμε την αρχή του εγκλεισμού αποκλεισμού. Έστω A , B και C τα αντίστοιχα σύνολα μεταθέσεων που δεν περιέχουν τις παραπάνω λέξεις. Τότε ισχύει: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Στην περίπτωση που οι μεταθέσεις περιέχουν και την λέξη fish και τη λέξη rat, μένουν 19 γράμματα που μαζί με τις 2 λέξεις που τοποθετούνται μαζί, συνιστούν 21 στοιχεία που μετατίθενται. Συνεπώς $|A \cap C| = 21!$.

Δεν υπάρχουν μεταθέσεις που να περιέχουν ταυτόχρονα τη λέξη bird και τη λέξη fish, ούτε τη λέξη bird και τη λέξη rat, γιατί και στις δύο περιπτώσεις οι λέξεις έχουν κοινούς χαρακτήρες που μπορούν να εμφανίζονται μόνο μία φορά (i και r αντίστοιχα). Προφανώς, δεν υπάρχουν μεταθέσεις που να περιέχουν ταυτόχρονα και τις 3 λέξεις.

Συνεπώς, $|A \cap B| = 0$, $|B \cap C| = 0$, $|A \cap B \cap C| = 0$ και το συνολικό πλήθος των μεταθέσεων είναι $26! - 23! - 23! - 24! + 21!$.

Ασκηση 38

Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 = 13$, όπου οι x_1, x_2 και x_3 είναι μη αρνητικοί ακέραιοι μικρότεροι του 6?

Αρχικά θα βρούμε πόσες είναι οι συνολικές λύσεις χωρίς περιορισμό. Αυτές είναι $C(3 + 13 - 1, 13) = C(15, 2) = 105$. Στην συνέχεια θα βρούμε πόσες είναι οι λύσεις εφόσον 1 μεταβλητή παραβιάζει τον περιορισμό.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $x_1 \geq 6$ και θέτουμε $x'_1 = x_1 - 6$. Οι μη αρνητικές ακέραιες λύσεις του αθροίσματος $x'_1 + x_2 + x_3 = 7$ είναι $C(3 + 7 - 1, 7) = C(9, 2) = 36$.

Βάσει συμμετρίας για κάθε μεταβλητή συμβαίνει το ίδιο και άρα υπάρχουν $3 \cdot 36 = 108$ λύσεις που να παραβιάζουν τον περιορισμό.

Έπειτα απαριθμούμε τις περιπτώσεις κατά τις οποίες 2 μεταβλητές παραβιάζουν τον περιορισμό.

Υπάρχουν $C(3, 2) = 3$ τέτοιες περιπτώσεις που είναι ισοδύναμες λόγω συμμετρίας. Πάλι χωρίς βλάβη της γενικότητας έχουμε $x_1, x_2 \geq 6$ και θέτουμε $x'_1 = x_1 - 6$ και $x'_2 = x_2 - 6$. Άρα θέλουμε να βρούμε τον αριθμό μη αρνητικών λύσεων για την εξίσωση $x'_1 + x'_2 + x_3 = 1$. Υπάρχουν $C(1 + 3 - 1, 1) = 3$ τέτοιες λύσεις και συνολικά $3 \cdot 3 = 9$ λύσεις για όλα τα ζευγάρια μεταβλητών.

Από την στιγμή που $3 \cdot 6 = 18 > 13$, δεν υπάρχει καμία λύση τέτοια ώστε και οι τρεις μεταβλητές να παραβιάζουν τον περιορισμό. Συνολικά, εφαρμόζοντας την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, (βλ. άσκηση 12) βρίσκουμε ότι υπάρχουν $105 - 108 + 9 = 6$ λύσεις που για το αρχικό μας πρόβλημα.

Ασκηση 39

Πόσοι θετικοί αριθμοί μικρότεροι από 1.000.000 έχουν ακριβώς ένα ψηφίο ίσο με 9 και το άθροισμα των ψηφίων τους είναι ίσο με 13?

Έστω $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$ τα ψηφία ενός αριθμού μικρότερου από 1.000.000. Για κάθε ψηφίο ισχύει $0 \leq d_i \leq 9$ (θεωρούμε ότι οι πρώτοι όροι μπορούν να είναι μηδενικά). Συνεπώς, αναζητούμε το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 = 13$ που υπόκεινται στις προαναφερθείσες ανισότητες, όταν ένα ακριβώς ψηφίο είναι ίσο με 9.

Χωρίς βλάβη στη γενικότητα, μπορούμε να θέσουμε το $d_6 = 9$ οπότε αναζητούμε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 4$. Για να μετρήσουμε τον αριθμό των λύσεων, παρατηρούμε ότι η λύση αντιστοιχεί στην επιλογή 4 αντικειμένων από ένα σύνολο 5 στοιχείων με τους περιορισμούς που θέτουν οι ανισότητες, με επανάληψη. Αν δεν λάβουμε υπόψιν μας τον περιορισμό του άνω ορίου (δηλαδή ότι $d_i \leq 9$), υπάρχουν ακριβώς $C(5 + 4 - 1, 4) = C(8, 4) = 70$ λύσεις της εξίσωσης.

Δεδομένου ότι οι αριθμοί διαφοροποιούνται ανάλογα με το που βρίσκεται το 9 και ότι υπάρχουν 6 δυνατές θέσεις για αυτό, το συνολικό πλήθος των λύσεων είναι $6 \cdot 70 = 420$.

Άσκηση 40

Έχουμε 12 διακεκριμένα αντικείμενα και θέλουμε να τα χωρίσουμε σε 3 όμοια κουτιά, καθένα με 4 αντικείμενα. Με πόσους τρόπους μπορούμε να το κάνουμε;

Τι σημαίνει “όμοια κουτιά”;

Σκεφτείτε τα κουτιά ως **ανώνυμες ομάδες ποδοσφαίρου** που δημιουργούνται επί τούτου για ένα τουρνουά 4x4: Και ότι τα αντικείμενα είναι οι φοιτητές/τριες που έχουν δηλώσει συμμετοχή.

- μας ενδιαφέρει μόνο **ποιοι παίκτες/τριες βρίσκονται μαζί**.
- αν υπήρχαν συγκεκριμένες ονοματισμένες διακεκριμένες προϋπάρχουσες ομάδες, προφανώς θα μας ενδιέφερε και σε ποια ομάδα θα εντάσσονταν.

Αν τα περιεχόμενα είναι:

$$\{A, B, C, D\}, \{E, Z, H, \Theta\}, \{I, K, L, M\},$$

το αποτέλεσμα δεν αλλάζει αν αλλάξει η σειρά των συνόλων.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο που γνωρίζουμε από τη θεωρία για τα διακεκριμένα αντικείμενα σε διακεκριμένα κουτιά και να διαιρέσουμε με $3!$

$$\frac{12!}{(4!) * (4!) * (4!)}$$

Γιατί διαιρούμε με $3!$;

Αν οι συσκευασίες είχαν ετικέτες, κάθε κατανομή θα μπορούσε να εμφανιστεί με $3! = 6$ διαφορετικές ονομασίες κουτιών.

Στις όμοιες συσκευασίες αυτές οι 6 μορφές είναι *η ίδια* λύση.

$$\frac{12!}{(4!)^3} \bigg/ 3! = \frac{12!}{(4!)^3 3!}.$$

Άσκηση 41

Αναθέτουμε 8 διακεκριμένες εργασίες σε 4 φοιτητές ώστε:

- κάθε φοιτητής να πάρει τουλάχιστον μία εργασία, και
- ο Φοιτητής 1 να πάρει το πολύ 3 εργασίες.

Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Βήμα 1: Μετράμε το πλήθος των τρόπων ώστε όλοι οι φοιτητές να πάρουν τουλάχιστον μία εργασία.

Αυτό είναι το πλήθος των **επί-συναρτήσεων** από 8 εργασίες σε 4 φοιτητές.

Έστω A_i το σύνολο των αναθέσεων όπου ο φοιτητής i δεν παίρνει καμία εργασία.

$$S = |\text{επί-συναρτήσεις}| = 4^8 - \binom{4}{1}3^8 + \binom{4}{2}2^8 - \binom{4}{3}1^8.$$

- 4^8 : χωρίς περιορισμούς,
- $-\binom{4}{1}3^8$: ένας φοιτητής χωρίς εργασία,
- $+\binom{4}{2}2^8$: δύο φοιτητές χωρίς εργασία,
- $-\binom{4}{3}1^8$: τρεις φοιτητές χωρίς εργασία.

Αυτό είναι το αρχικό σύνολο S που ικανοποιεί τον πρώτο περιορισμό:

“κάθε φοιτητής 1 εργασία”.

Βήμα 2: Θέλουμε τώρα να αφαιρέσουμε από το S όλες τις αναθέσεις όπου ο Φοιτητής 1 παίρνει k εργασίες με $k > 3$.

(α) Επιλογή των k εργασιών που πάνε στον Φοιτητή 1

$$\binom{8}{k}.$$

(β) Οι υπόλοιπες $8 - k$ εργασίες πρέπει να μοιραστούν στους φοιτητές 2,3,4, όλοι με 1 εργασία. Αυτό είναι πλήθος επί-συναρτήσεων από $8 - k$ εργασίες σε 3 φοιτητές:

$$3^{8-k} - \binom{3}{1}2^{8-k} + \binom{3}{2}1^{8-k}.$$

- 3^{8-k} : χωρίς περιορισμό,
- $-\binom{3}{1}2^{8-k}$: ένας από τους 2,3,4 μένει χωρίς εργασία,
- $+\binom{3}{2}1^{8-k}$: δύο μένουν χωρίς εργασία.

Άρα το πλήθος των αναθέσεων όπου ο Φοιτητής 1 παίρνει k εργασίες

είναι:
$$\boxed{\binom{8}{k} \cdot \left(3^{8-k} - \binom{3}{1}2^{8-k} + \binom{3}{2}1^{8-k} \right)} \quad (k = 4, 5, 6, 7)$$

Και οι αναθέσεις αυτές αωαιρούνται από το S . (37968).

Άσκηση 42

Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 30 όμοια αντικείμενα σε 6 διακεκριμένα κουτιά έτσι ώστε κάθε κουτί να πάρει τουλάχιστον 2;

Θέτουμε x_i τα αντικείμενα στο κουτί i :

$$x_1 + \cdots + x_6 = 30, \quad x_i \geq 2.$$

Θέτουμε $x_i = y_i + 2$, $y_i \geq 0$:

$$y_1 + \cdots + y_6 = 18.$$

Άρα:

$$\binom{18+6-1}{5} = \binom{23}{5}.$$