Σύνολα

π.χ. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$

Ορισμός: Σύνολο είναι μια συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων (δηλ. διαφορετικών)

π.χ. $\{a, b\}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$

$[0, 1]$, $\mathbb{R}$

Το σύνολο των δυνάμεων του 2

$\{1, 2, 4, 8, 16, \dots\} = \{2^k : k \in \mathbb{N}\}$

Τα αντικείμενα ενός συνόλου ονομάζονται στοιχεία ή μέλη του συνόλου

$a \in \{a, b\}$ — $\in$: ανήκει

$\gamma \notin \{a, b\}$ — $\notin$: δεν ανήκει

Περιγραφή Συνόλου

Για οποιοδήποτε αντικείμενο πρέπει να ξέρω αν ανήκει ή δεν ανήκει στο σύνολο (ποτέ και τα 2)

Ένα σύνολο ορίζεται

- Με απαρίθμηση όλων των στοιχείων

  π.χ. $A = \{1, 2, 3\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

- Με περιγραφή των στοιχείων

  π.χ. $A = \{a \in \mathbb{Z} : \underbrace{1 \leq a \leq 3}_{\text{συνθήκη}}\}$

  A = "οι ακέραιοι από 1 έως και 3"

- Μέσω πράξεων με άλλα σύνολα

  π.χ. $A = \mathbb{Z} \cap [0.5, 3.14]$

Τα στοιχεία ενός συνόλου

- Δεν επαναλαμβάνονται

$$\{a, a, b\} = \{a, b\}$$

δεν έχει νόημα (πολυσύνολο)

- Δεν είναι ταξινομημένα

δηλ $\{3, 2, 1\} = \{1, 2, 3\}$

$$[0,1] = \{1-x : x \in [0,1]\}$$

- Μπορεί να είναι διαφορετικού είδους ακόμα και σύνολα

$$P = \{\underbrace{a}, \underbrace{1}, \underbrace{\tfrac{3}{4}}, \underbrace{\pi}, \underbrace{\text{"Περσεφόνη"}}, \underbrace{\{1,2\}}\}$$

$1 \in P$ $\quad$ $2 \notin P$ $\quad$ $1 \in \{1,2\}$

$\{1,2\} \in P$ $\quad$ $\{1\} \notin P \Leftarrow$

$\{2,1\} \in P$ $\quad$ $\{1+1, 1\} \in P$

$\{1\} \not\subseteq \{1\}$ $\qquad$ $\{1\} \in \{\{1\}\}$

$\{\{1,2\}\} \subseteq P$

$\{1\} \neq 1$ $\qquad$ $\{1,2\} \not\subseteq P$

$1 \in P$

Ορισμός (Υποσύνολο) $\qquad$ $2 \in P$

Ένα σύνολο P είναι υποσύνολο του συνόλου Q

και συμβολίζεται $P \subseteq Q$

αν $\forall p \in P \; : \; p \in Q$

δηλαδή $\forall p \; : \; (p \in P) \rightarrow (p \in Q)$

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$

$\{1,5\} \subseteq \{1,2,5\}$ $\leftarrow$ $\{1,5\} \subset \{1,2,5\}$

$\{1,5\} \not\subset \{1,2,5\}$

$\{1,5\} \not\subset \{1,5\}$

$\{1,5\} \subseteq \{1,5\}$

Κάθε σύνολο A είναι υποσύνολο του εαυτού του

$A \subseteq A$

Αλλά το A δεν είναι γνήσιο υποσύνολο του A

$A \not\subset A \qquad \neg(A \subset A)$

Γνήσιο υποσύνολο $A \subset B$

ανν

$A \subseteq B$

και

$A \neq B$

Ορισμός

$P = Q$ ανν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία

$\Leftrightarrow (P \subseteq Q) \wedge (Q \subseteq P)$

$\Leftrightarrow \forall x : (x \in P \Leftrightarrow x \in Q)$

π.χ. $\{a \in \mathbb{R} : 0 \leq a \leq 1\} = [0, 1]$

Ερώτηση : Υπάρχουν σύνολα A, B τ.ω. $A \subseteq B$ και $A \in B$

Ναι

$$B = \{ A , \{A\}\}$$

$A \in B$

$A \subseteq B$ ×

$A = \{1\}$ $\quad B = \{ \{1\}, \{\{1\}\} \}$

$A \in B$

$A \not\subseteq B$

$\boxed{A = \{1\} \quad B = \{ \{1\}, \{\{1\}\}, 1 \}}$

$A \in B$

$A \subseteq B$

Πιο γενικά για κάθε A

$$B = \{A\} \cup A$$

Για κάθε σύνολο A υπάρχει σύνολο B τέτοιο ώστε $A \in B$ και $A \subseteq B$

Κενό σύνολο

Κενό είναι το σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο

Συμβολισμός $\{\}$, $\emptyset$

Θεώρημα: $\emptyset \subseteq P$ για κάθε σύνολο P

$A \subseteq B$ ανν $\forall x : x \in A \to x \in B$

$\forall x : x \in \emptyset \to x \in P$

F $\to$ $x \in P$ T

Ερώτηση: Γίνεται $\emptyset \in A$ για κάποιο σύνολο A

Ναι

$\emptyset \notin \{1, 2\}$ $\emptyset \in \{1, 2, \emptyset\}$

Το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου A καλείται το μέγεθος ή πληθικός αριθμός και συμβολίζεται με $|A|$

π.χ.

$$|\{a, b\}| = 2$$

$$|\emptyset| = 0$$

$$|\{\emptyset\}| = 1$$

$$|\{\emptyset, \{\emptyset\}\}| = 2$$

$$|\{\underbrace{\emptyset}, \underbrace{\{1, 2\}}\}| = 2$$

$$|[0, 1]| = \infty$$

$$|\{[0, 1]\}| = 1$$

Αν για ένα σύνολο A

$|A| < \infty$ τότε το A είναι "πεπερασμένο"

$|A| = \infty$ τότε το A είναι μη πεπερασμένο

$\mathbb{R}$ είναι μη πεπερασμένο

$\{\mathbb{R}\}$ είναι πεπερασμένο

$$\emptyset \subseteq \{1, 2, \{\emptyset\}, 10\}$$
$$\emptyset \notin \{1, 2, \{\emptyset\}, 10\}$$

$$\{\emptyset\} \not\subseteq \{1, 2, \{\emptyset\}, 10\}$$
$$\{\emptyset\} \in \{1, 2, \{\emptyset\}, 10\}$$

$$\{\emptyset\} \subseteq \{1, 2, \emptyset, 10\}$$
$$\{\emptyset\} \notin \{1, 2, \emptyset, 10\}$$

Πράξεις συνόλων

- Δυναμοσύνολο (powerset)

  Το δυναμοσύνολο ενός συνόλου A είναι το σύνολο που περιέχει όλα τα υποσύνολα του A

  Συμβολίζεται 2^A ή $P(A)$

$$2^A = \{ B : B \subseteq A \}$$

π.χ. $A = \{a, b\} \Rightarrow$

$$2^A = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\} \}$$

$$\boxed{|2^A| = 2^{|A|}}$$

$A = \{ a, b, c \}$

8 στοιχεία του 2^A

a	b	c	
0	0	0	$\emptyset$
0	0	1	$\{c\}$
0	1	0	$\{b\}$
1	0	0	$\{a\}$
1	1	0	$\{a,b\}$

0	1	1	$\{b,c\}$
1	0	1	$\{a,c\}$
1	1	1	$\{a,b,c\}$

– Καρτεσιανό Γινόμενο δύο συνόλων A, B

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$$

διατεταγμένα ζεύγη
(όχι διάστημα!)

π.χ. $A = \{1, 2\}$
$B = \{2, 4\}$

$$A \times B = \{(1,2), (1,4), (2,2), (2,4)\}$$

$$\neq$$

$$B \times A = \{(2,1), (2,2), (4,1), (4,2)\}$$

$|A| = n_A$ $\quad |B| = n_B$ $\quad |A \times B| = n_A \cdot n_B$

- Ένωση $A \cup B = \{p : (p \in A) \vee (p \in B)\}$
- Τομή $A \cap B = \{p : (p \in A) \wedge (p \in B)\}$

$$\cup \longleftrightarrow \vee$$
$$\cap \longleftrightarrow \wedge$$

π.χ. $\{a, b\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\}$
$\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\}$

Προσεταιριστική ιδιότητα

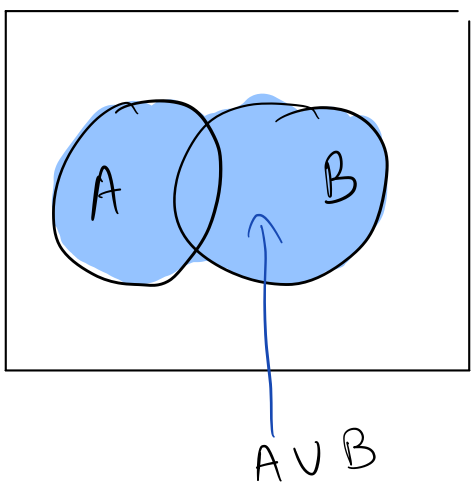
$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

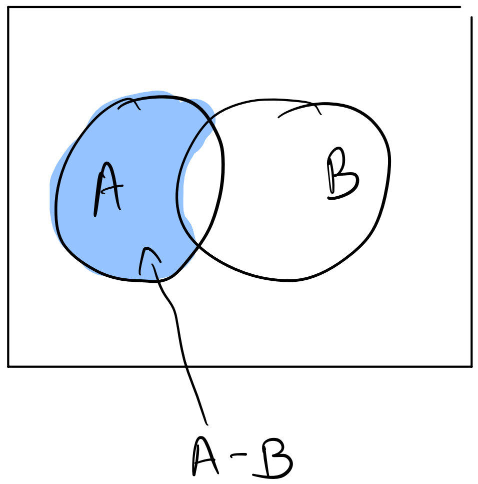
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

Διάγραμμα Venn



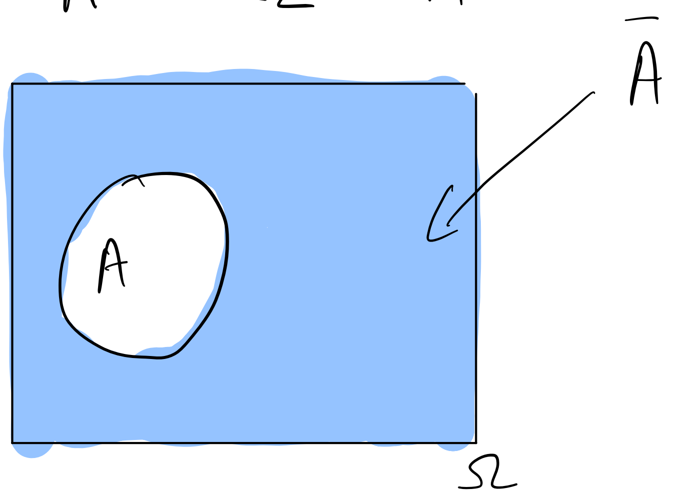
Διαφορά συνόλων

$$A - B = \{a \in A : a \notin B\}$$



Συμπλήρωμα $\bar{A}$ ως προς ένα σύνολο αναφοράς Ω

$$\bar{A} = \Omega - A$$



$\Omega = \{1,2,3,4\}$

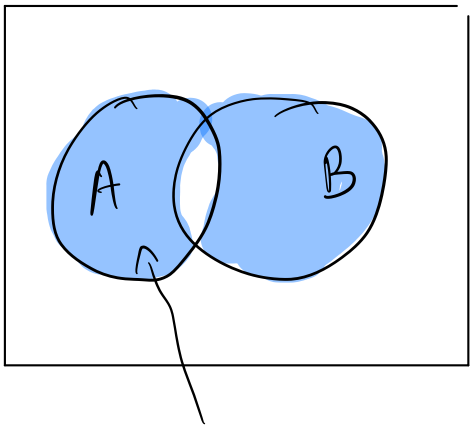
$A = \{2,4\} \rightarrow \bar{A} = \{1,3\}$

π.χ. $\overline{\{0,2,4,6,8,10,\dots\}} = \{1,3,5,7,9,\dots\}$ ως προς σύνολο αναφοράς τους φυσικούς $\mathbb{N}$

$$\bar{\bar{A}} = A$$

Συμμετρική διαφορά

$$A \oplus B = \{p : (p \in A) \oplus (p \in B)\}$$
$$= \{p : (p \in A \cup B) \land (p \notin A \cap B)\}$$



$A \oplus B$

Ιδιότητες

- Η ένωση, η τομή και η συμμετρική διαφορά είναι προσεταιριστικές

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Αντίθετα

$$A - B - C = (A - B) - C$$

$$\neq A - (B - C)$$

$A = \{1, 2\}$

$B = \{2\}$

$C = \{1, 2, 3\}$

$\overbrace{A - B}^{\{1\}} - C = \emptyset$

$A - (B - C) = A = \{1, 2\}$

$A - \underbrace{(C - B)}_{\{1, 3\}} = \{2\}$

- Η ένωση, η τομή και η συμμετρική διαφορά είναι αντιμεταθετικές

$A \cup B = B \cup A$

αλλά $A - B \neq B - A$

- Έχουν ουδέτερο στοιχείο

$\Big(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ουδέτερο στοιχείο} \\ \text{για πρόσθεση}}}{a + 0 = a} \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ουδέτερο στοιχείο} \\ \text{για πολλαπλ/σμό}}}{a \cdot 1 = a} \Big)$

$A \cup \emptyset = A$

$A \cap \Omega = A$

$A \oplus \emptyset = A$

$$\boxed{\begin{aligned} A \oplus \overline{A} &= \Omega \\ A \oplus \Omega &= \overline{A} \\ A \oplus A &= \emptyset \end{aligned}}$$

- Η ένωση και η τομή είναι επιμεριστικές μεταξύ τους

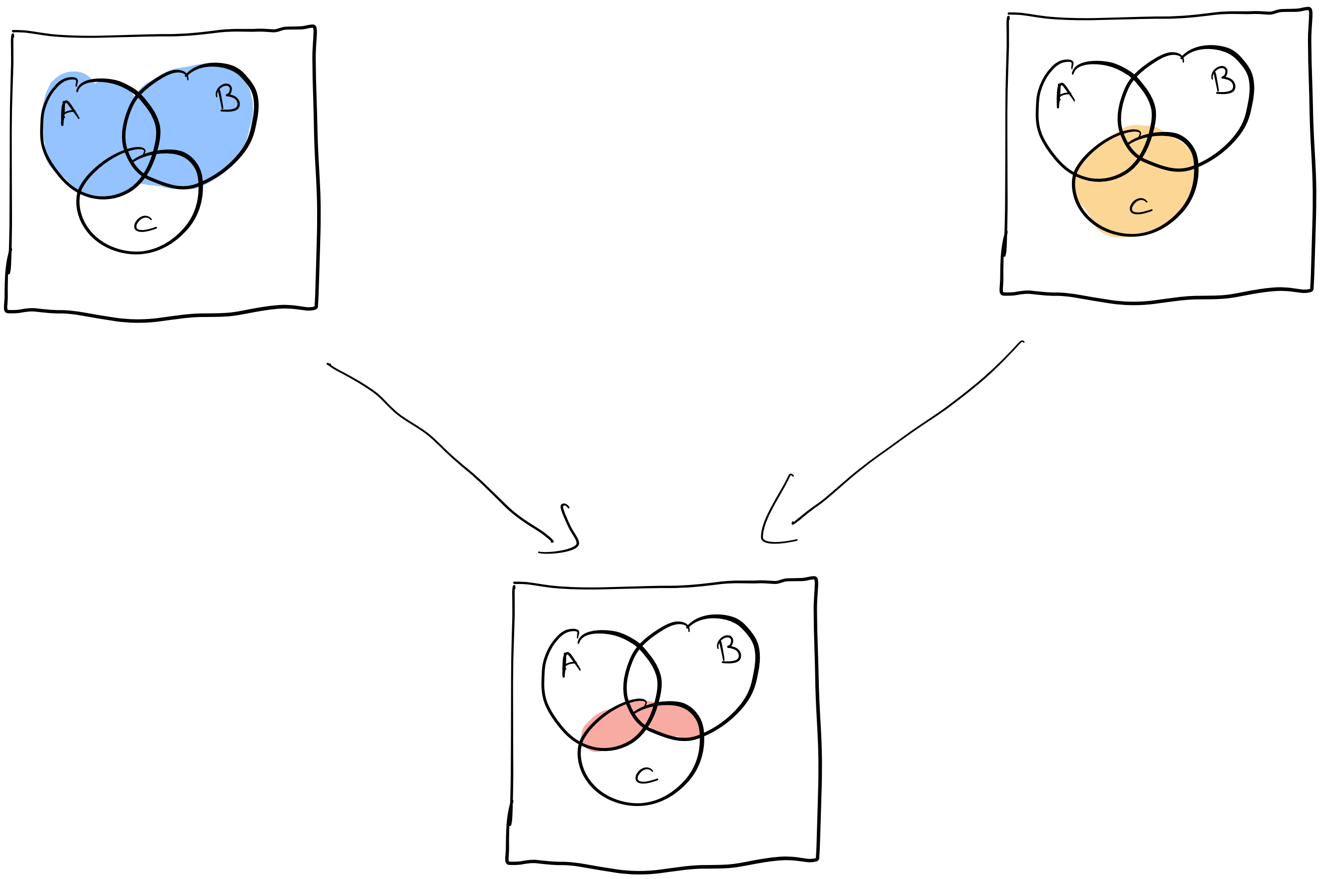
$\boxed{(\alpha+\beta)\cdot\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma}$ Επιμεριστική ιδιότητα

$(\alpha\cdot\beta)+\gamma \neq (\alpha+\gamma)\cdot(\beta+\gamma)$

- $(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$
- $(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$

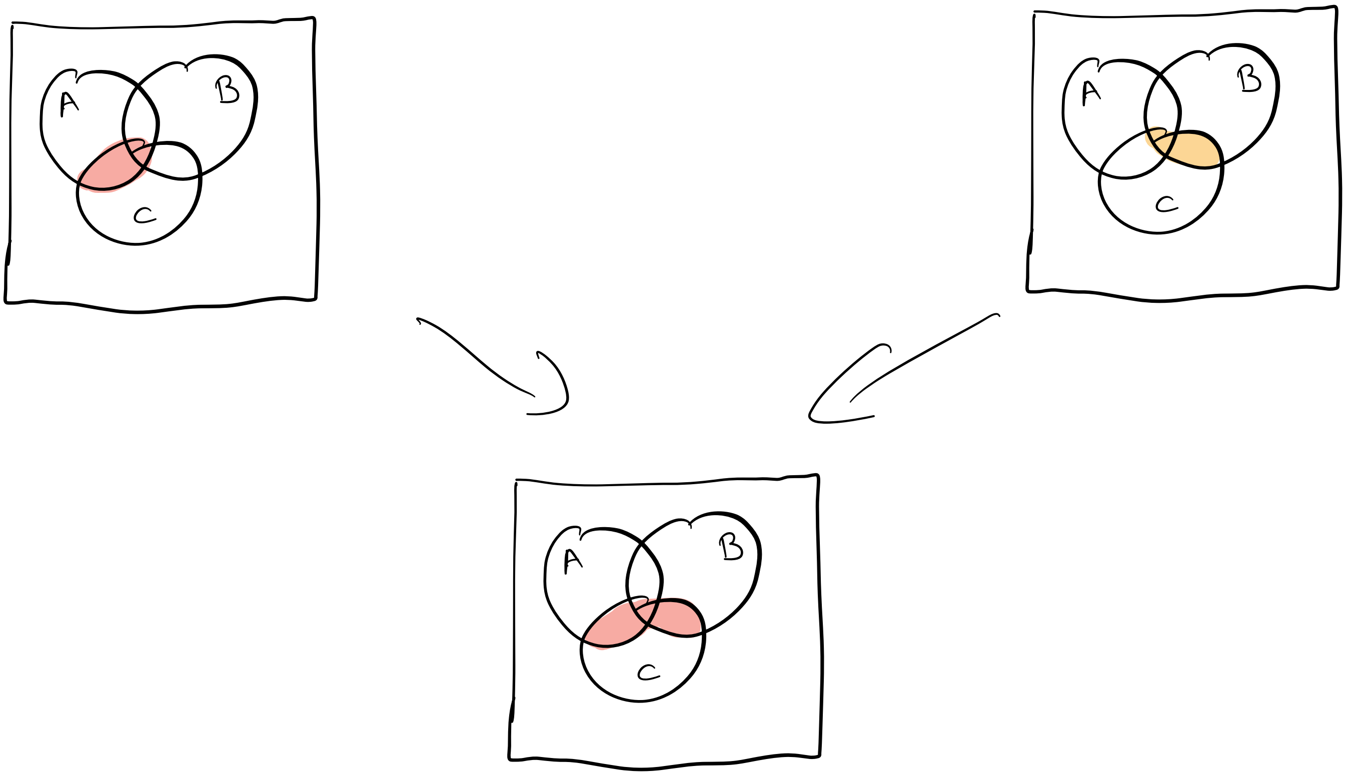
Απόδειξη με διάγραμμα Venn

$(A\cup B)$ $\qquad\cap\qquad$ C



$(A\cup B)\cap C$

$(A \cap C) \quad \cup \quad (B \cap C)$



$(A \cap C) \cup (B \cap C)$

Με πίνακα αλήθειας

	A	B	C	$(A \cup B) \cap C$	$(A \cap C) \cup (B \cap C)$
x	0	0	0	0	0
	0	0	1	0	0
	0	1	0	0	0
	0	1	1	1	1
	1	0	0	0	0

1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Απόδειξη με ιδιότητες

Θεώρημα: $\underbrace{(A \cup B) \cap C}_{P} = \underbrace{\overbrace{(A \cap C)}^{Q_1} \cup \overbrace{(B \cap C)}^{Q_2}}_{Q}$

Απόδειξη Θέλω να δείξω ότι
$P = Q$

- $Q \subseteq P$

$Q_1 \subseteq A \Rightarrow Q_1 \subseteq A \cup B$

$Q_1 \subseteq C$

$\Downarrow$

$Q_1 \subseteq \underbrace{(A \cup B) \cap C}_{P}$

Αντίστοιχα $Q_2 \subseteq (A \cup B) \cap C$

$Q = Q_1 \cup Q_2 \subseteq P$

- $P \subseteq Q$: Έστω $p \in P$

$\Downarrow$

$p \in A \cup B$

και $p \in C$

- Αν $p \in A$ επειδή $p \in C$

$\Rightarrow p \in A \cap C = Q_1$

- Αν $p \in B$ επειδή $p \in C$

$\Rightarrow p \in B \cap C = Q_2$

Άρα σε κάθε περίπτωση

$p \in Q_1 \cup Q_2 = Q$ $\square$

- Κανόνες De Morgan για σύνολα

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Θ.δ.ο. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$$\overline{A \cap B} = \{x : x \notin A \cap B\}$$

$$= \{x : \neg (x \in A \cap B)\}$$

$$= \{x : \neg (x \in A \wedge x \in B)\}$$

$$= \{x : \overline{(x \in A)} \vee \overline{(x \in B)}\}$$

DeMorgan για λογικές προτάσεις

$$= \{x : (x \notin A) \vee (x \notin B)\}$$

$$= \{x : (x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{B})\}$$

$$= \{x : x \in \overline{A} \cup \overline{B}\}$$

$$= \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \square$$

Αναπαράσταση συνόλων στον υπολογιστή

Έστω $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$

Μπορώ να αναπαραστήσω κάθε υποσύνολο $A \subseteq \Omega$ ως μια συμβολοσειρά από bits

Π.Χ. $n=5$ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A = \{1, 3, 4\} \longleftrightarrow \underbrace{1\ 0\ 1\ 1\ 0}$

$\{2, 3\} \longleftrightarrow 0\ 1\ 1\ 0\ 0$

$\cancel{\emptyset} \longleftrightarrow 0\ 0\ 0\ 0\ 0$

$10110_{(2)} = 22_{(10)}$

$0 \ldots 2^5 - 1$

$01100 = 12_{(10)}$

$A \in 2^{\Omega}$

$00000 = 0_{(10)}$

$|2^{\Omega}| = 2^{|\Omega|}$

$22 \,\&\, 12 = 4 = (00100)_{(2)}$

$22 \mid 12 = 30 = (11110)_{(2)}$

$22 \wedge 12 = 26 = (11010)_{(2)}$

$0 \ldots 51$

Π.Χ. $\{4\diamondsuit, 5\heartsuit\}$

$A\heartsuit \quad 2\heartsuit \qquad\qquad K\spadesuit$

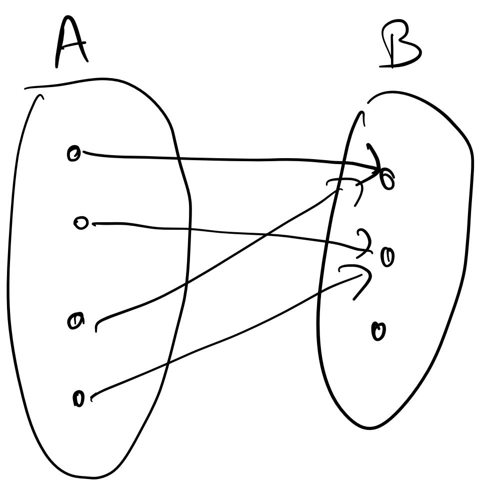
$\Omega = \{1, 2, \ldots, 52\}$

$0 \quad 0 \quad \ldots 1 \ldots 1 \quad 0$

Συναρτήσεις

Συνάρτηση $A \to B$ καλείται μια ανάθεση σε κάθε στοιχείο του A ακριβώς ενός στοιχείου του B

A πεδίο ορισμού
B πεδίο τιμών



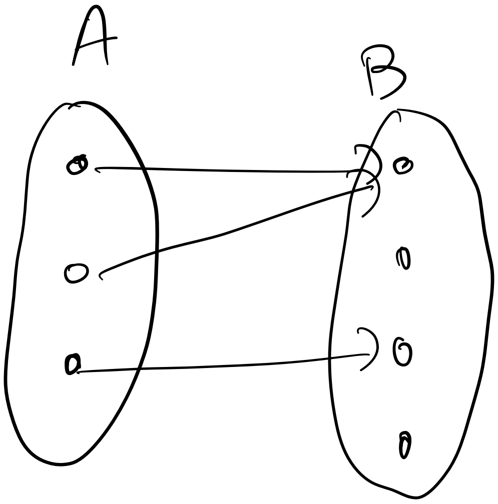
π.χ. A = σύνολο των φοιτητών του 1ου έτους
B = βαθμός της τελικής εξέτασης στα διακριτά

Η συνάρτηση πρέπει να είναι μονοσήμαντη δηλαδή για κάθε $a \in A$ να υπάρχει μοναδικό $b \in B$ τέτοιο ώστε $b = f(a)$

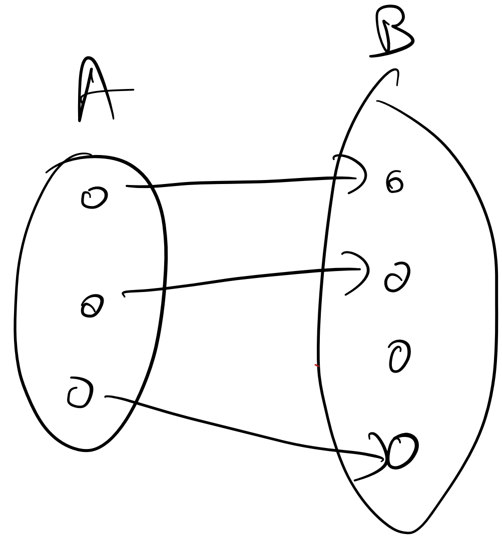
εικόνα του a

Ορισμος 1-1 συνάρτηση f ανν

Για κάθε $a, a' \in A$, $a \neq a'$ ισχύει $f(a) \neq f(a')$ $\qquad |B| \geq |A|$



όχι 1-1

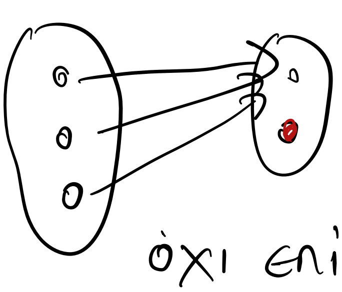


1-1

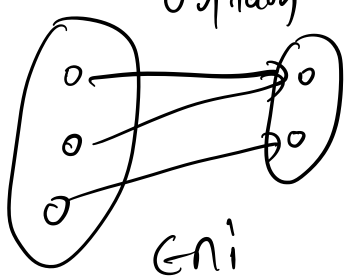
Ορισμός επί συνάρτηση $f: A \to B$ ανν

$\forall b \in B \quad \exists a \in A : \quad f(a) = b$

δηλαδή $B = f(A) = \{f(a) : a \in A\}$



όχι επί



επί

π.χ. $f(x) = x^2$ όπου $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

όχι επί γιατί

για $y = -1$

δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ $x^2 = -1$

- $f(x) = x^2$ όπου $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

επί γιατί για κάθε

$y \geq 0$ υπάρχει $x = \sqrt{y}$

που δίνει $f(x) = y$

Ορισμός

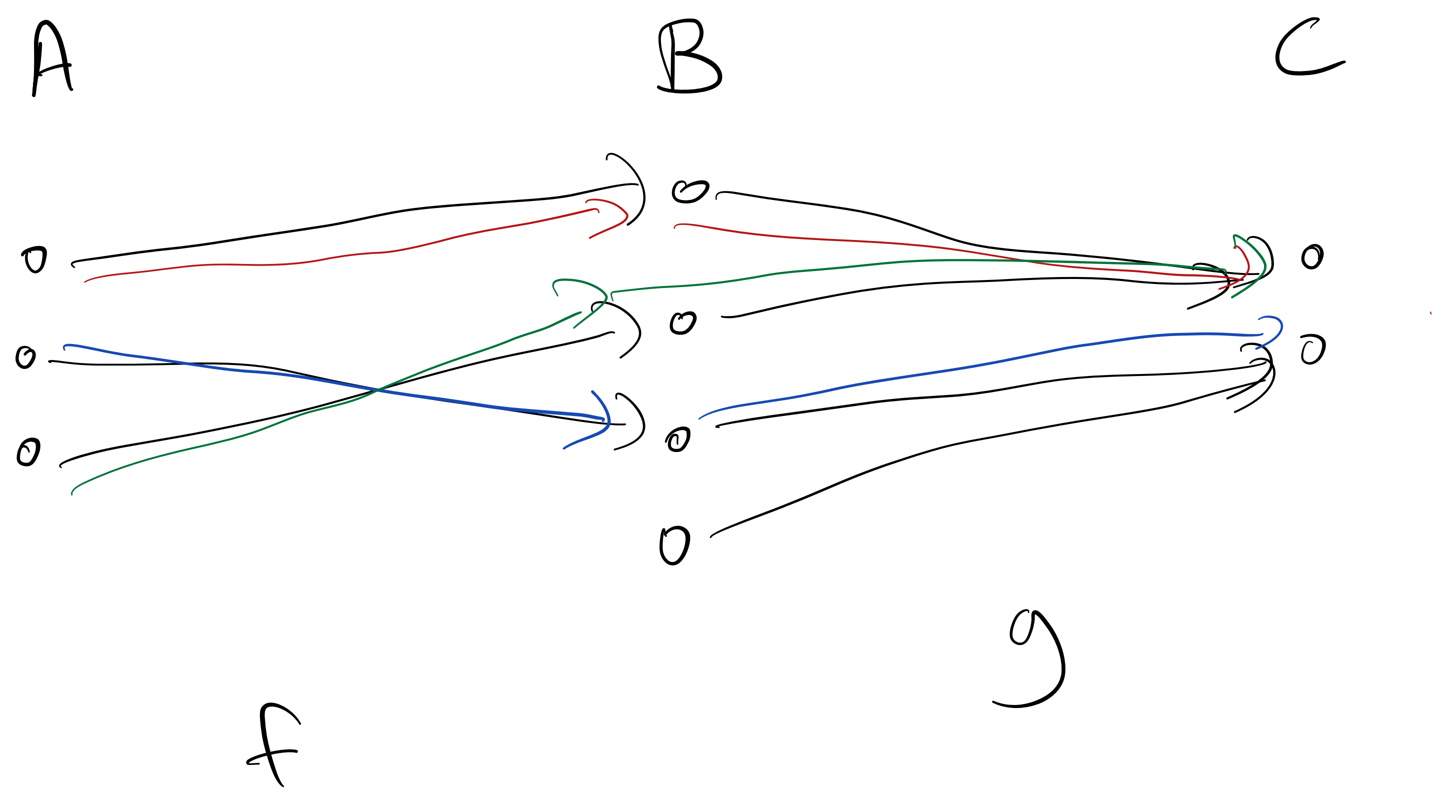
Έστω συναρτήσεις $f: A \to B$ και $g: B \to C$

Η σύνθεση της f με τη g είναι

μια συνάρτηση $g \circ f: A \to C$

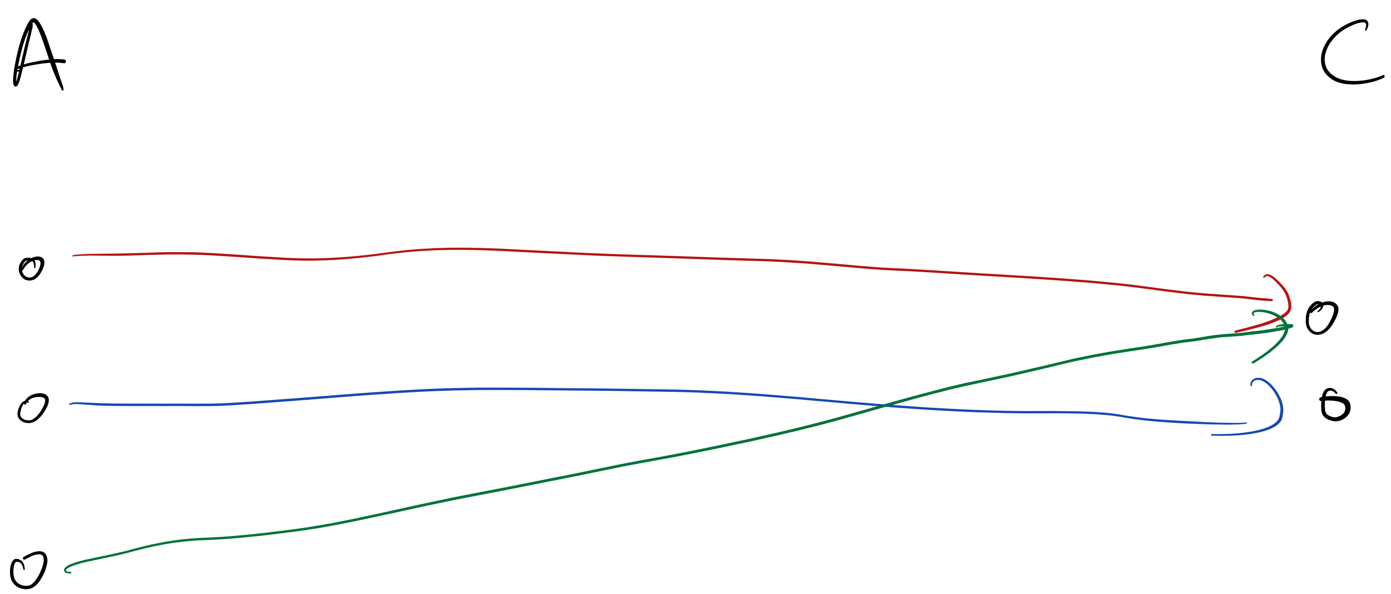
$\forall a \in A$

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$



$\downarrow$

$g \circ f$

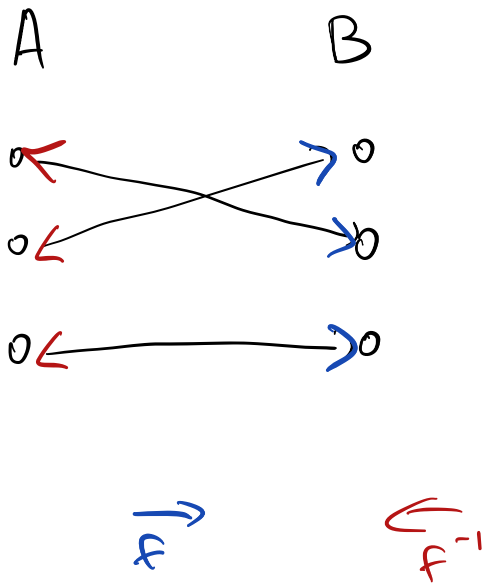


Μια συνάρτηση που είναι 1-1 και επί ονομάζεται αμφιμονοσήμαντη

Ορίζεται και η αντίστροφη

$f: A \to B$ $\qquad$ $f^{-1}: B : A$

$$f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$$



$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

Ενδιαφέρουσες συναρτήσεις

- Παραγοντικό $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to$

$\forall \; n \in \mathbb{N} \to n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$

$0! = 1$ $\quad 1! = 1$ $\quad 2! = 2$ $\quad 3! = 6$ $\quad 4! = 24 \dots$

Stirling προσέγγιση $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

- Ακέραιο μέρος ή Δάπεδο (Floor) $\lfloor \ \rfloor$

$x \in \mathbb{R} \to \lfloor x \rfloor = a \in \mathbb{Z}$ ανν ο a είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος με $a \leq x$

π.χ. $\lfloor 3.7 \rfloor = 3$ $\lfloor -0.5 \rfloor = -1$

- Οροφή (ceil)

$x \in \mathbb{R} \to \lceil x \rceil = a \in \mathbb{Z}$ ανν a είναι ο μικρότερος ακέραιος με $a \geq x$

π.χ. $\lceil 3.7 \rceil = 4$, $\lceil -0.5 \rceil = 0$

$-\lceil 0.5 \rceil = -1$

Ακολουθίες

Ακολουθία είναι μια συνάρτηση η οποία έχει ως πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο των φυσικών αριθμών (ή ακεραίων)

$$f : A \subseteq \mathbb{N} \to S$$

Συχνα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $a_n = f(n)$ ή b_n

π.χ. $a_1 = 1$ $a_2 = \frac{1}{2}$ $a_3 = \frac{1}{3}$, ... , $a_n = \frac{1}{n}$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ $\boxed{a_{-1}}$

- Αριθμητική πρόοδος

$\underset{a_0}{\underset{\uparrow}{a}}$, $\underset{a_1}{\underset{\uparrow}{a + d}}$, $\underset{a_2}{\underset{\uparrow}{a + 2d}}$, $a + 3d$, $a + 4d$

$a_n = a + n \cdot d$ $\xleftrightarrow{\text{γραμμική συνάρτηση}}$ $f(x) = dx + a$

π.χ. $a = 1$, $d = 2$: $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

Πολυωνυμική

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\updownarrow$$

$$a_n = an^2 + bn + c$$

Πολυωνυμική 2ου βαθμού

?

1, 3, 7 ...

a_0, a_1, a_2

1ου βαθμού

1 3 5

2 2 ....

0

1	3	7	13	21
2	4	6	8 ...	
2	2	...		
0	0 ...			

- Εκθετικές $f(x) = ar^x$

$$\updownarrow$$

Γεωμετρική πρόοδος

$a_n = ar^n$

$a, ar, ar^2, ar^3 \ldots$

$\uparrow a_0$ $\uparrow a_1$

$a_n = r \cdot a_{n-1}$

π.χ. $a=1$, $r=2$: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64...

Ακολουθίες ορίζονται ως

- Με κλειστό τύπο πχ. $a_n = 5n+2$
- Περιγραφικά :- Η ακολουθία των δυνάμεων του 2
  - 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...
  - $a_i = \begin{cases} 0 & \text{αν χάνω με } i \text{ κομμάτια} \\ 1 & \text{αν κερδίζω με } i \text{ κομμάτια} \end{cases}$

  παιχνίδι σοκολάτας
- Αναδρομική σχέση

  Π.χ. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ με $a_0=1$, $a_1=1$

  1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... (Fibonacci)

Αναδρομικά

$$\underbrace{a_n} = \underbrace{a_{n-1}} + 1 \qquad \text{με} \quad a_0 = 0$$

$0, 1, 2, 3, \underset{a_{n-1}}{4}, \underset{a_n}{5}, \ldots$

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 1 \\ &= a_{n-2} + 2 \\ &= a_{n-3} + 3 \\ &\ldots \\ &= a_{n-n} + n = a_0 + n = n \end{aligned}$$

$a_n = n$

Π.χ. $a_n = a_{n-1} + 3$ με $a_1 = 2$

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 3 \\ &= a_{n-2} + 6 \\ &= a_{n-(n-1)} + 3\cdot(n-1) \\ &= a_1 + 3(n-1) = 2 + 3(n-1) = 3n-1 \end{aligned}$$

Π.χ. Παιχνίδι με σοκολάτα (2, 5 ή 7 κομμάτια)

Περιγραφικά

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{αν χάνω με } i \text{ κομμάτια} \\ 1 & \text{αν κερδίζω με } i \text{ κομμάτια} \end{cases}$$

Αναδρομικά

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0 \\ a_n &= 1 - a_{n-2}\cdot a_{n-5}\cdot a_{n-7} \end{aligned}$$

Κλειστός τύπος

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{αν } n \bmod 22 \in \{0, 1, 4, 10, 13, 14\} \\ 1 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Πληθικότητα Συνόλων

Ορισμός: Δυο σύνολα A και B έχουν την ίδια πληθικότητα αν υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $f: A \to B$
$|A| = |B|$

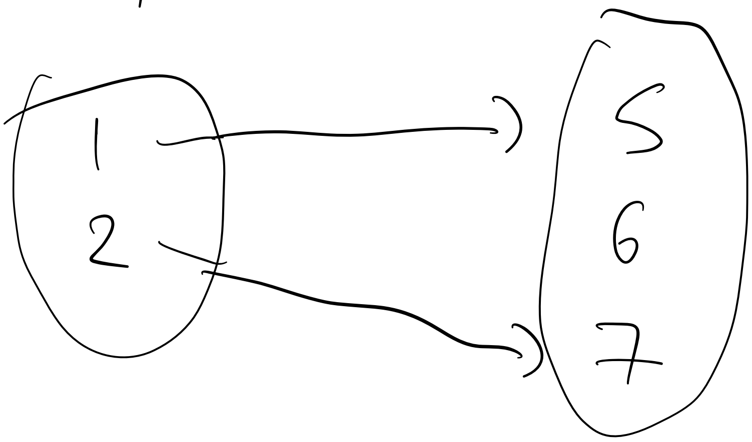
Ορισμός: Αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f: A \to B$
$|A| \le |B|$

$$|A| = |B|$$
$$|\{1, 2, 3\}| = |\{5, 6, 7\}|$$

$$1 \longleftrightarrow 5$$
$$2 \longleftrightarrow 6$$
$$3 \longleftrightarrow 7$$

$$|A| \leq |B|$$

$$|\{1,2\}| \leq |\{5,6,7\}|$$



Ορισμός: Ένα σύνολο A είναι <u>αριθμήσιμο</u> ή <u>μετρήσιμο</u> αν $|A| \leq |\mathbb{N}|$ δηλαδή αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f: A \to \mathbb{N}$

Πχ. $A = \{-3, \pi, \sqrt{2}\}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = -3 \\ 2 & \text{αν } x = \pi \\ 3 & \text{αν } x = \sqrt{2} \end{cases}$$

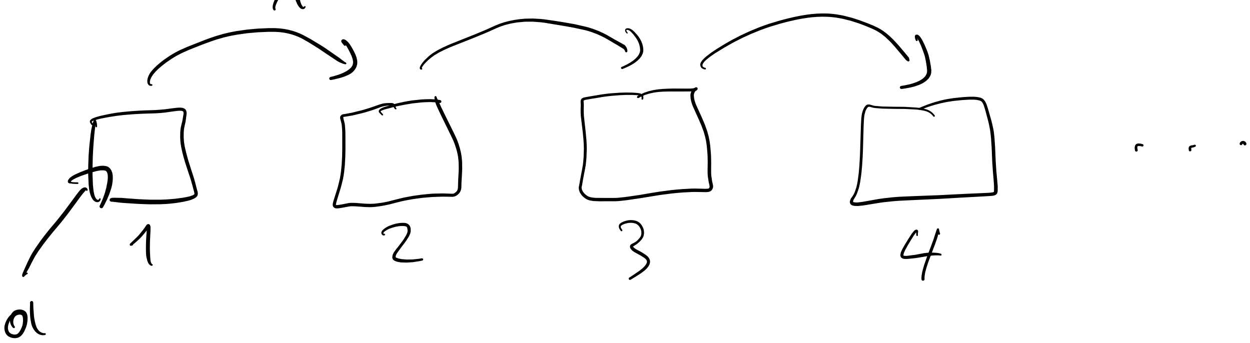
$f: A \to \mathbb{N}$

$$|\underbrace{\{2i : i \in \mathbb{N}\}}_{\text{Άρτιοι}}| \le |\mathbb{N}|$$

$$f(x) = \frac{x}{2} \qquad f: \text{Άρτιοι} \to \mathbb{N}$$

$$\mathbb{N} \cup \{a\} \quad ?$$

Ξενοδοχείο του Hilbert



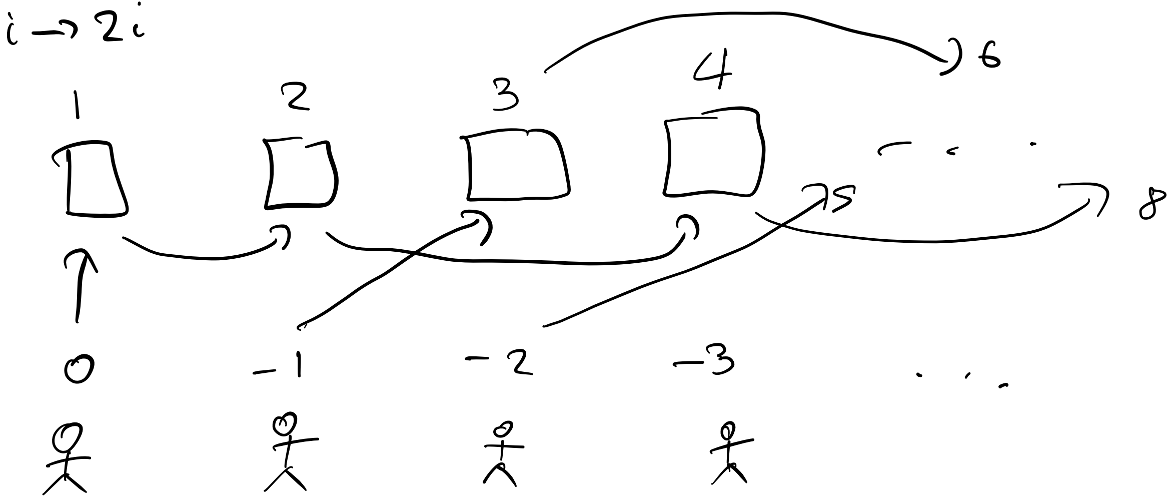
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = \alpha \\ x+1 & x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1-1 συνάρτηση

$$f: \mathbb{N} \cup \{a\} \to \mathbb{N}$$

$$|\mathbb{N} \cup \{a\}| \le |\mathbb{N}|$$

$$|\mathbb{N} \cup \{a\}| = |\mathbb{N}|$$



Υπάρχει 1-1 συνάρτηση
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in \mathbb{N} \\ 2|x|+1 & x \in \mathbb{Z} - \mathbb{N} \end{cases} \qquad 1\text{-}1$$

$|\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{N}|$ αλλά και $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$(1,1) \to$
$(1,2)$
$(2,1)$

$\underbrace{a}_{32}\ \underbrace{b}_{32}$

Υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$;

$(a,b) \to a+b$ όχι 1-1

$(a,b) \to 2^a 3^b \in \mathbb{N}$ 1-1

$$\longrightarrow \begin{array}{ccccc} \overset{1}{(1,1)} & \overset{2}{(1,2)} & \overset{4}{(1,3)} & \overset{7}{(1,4)} & \cdots \\ \overset{3}{(2,1)} & \overset{5}{(2,2)} & (2,3) & (2,4) & \cdots \\ \overset{6}{(3,1)} & (3,2) & (3,3) & (3,4) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$

$$\frac{a}{b} \xrightarrow[f:\,1-1]{\text{ελαχίστων όρων}} (a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \xrightarrow[1-1]{} \mathbb{N}$$

$$|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}|$$

Υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$

$k=4$

$$(\underbrace{a, b}_{\downarrow}, \underbrace{c, d}_{\downarrow})$$

$$\underbrace{(x, y)}_{\downarrow}$$

$$z$$

$(a, b, c, d) \to 2^a 3^b 5^c \cdot 7^d$

1-1 αλλά όχι επί

$|\mathbb{N}^4| \leq |\mathbb{N}|$

Θεώρημα Schroder - Bernstein

Αν $|A| \leq |B|$ και $|B| \leq |A|$

$|A| = |B|$

Αν υπάρχει 1-1 $f : A \to B$

και 1-1 $g : B \to A$

τότε υπάρχει 1-1 και επί $\underbrace{h : A \to B}$

$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad (a, b) \to 2^a 3^b$

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\quad a \to (a, a)$

$\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Υπάρχει ακολουθία $a_1, a_2, \dots$ που να περιέχει κάθε στοιχείο του $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ ακριβώς μια φορά;

$$a_3 = \left(5, \frac{7}{8}\right)$$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ $\quad i \to \left(i, \frac{1}{2}\right)$

$g: \mathbb{N} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ $\quad$ γιατί το $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ αριθμήσιμο

$$|\mathbb{N} \times \mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}|$$

άρα υπάρχει $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ που είναι 1-1 και επί

$$a_i = h(i)$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{N}^k \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}$$

$$(a, b, c, d \dots) \to 2^a 3^b 5^c 7^d 11^e 13^0 17^0$$

$B = \{A : A \subseteq \mathbb{N}$ με A πεπερασμένο$\}$ αριθμήσιμο

$$B \xrightarrow{1-1} \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{N}^{k}$$

$\{1, 7, 9, 18\} \searrow (1, 7, 9, 18)$

Λεωφορείο όπου υπάρχουν όλες οι πιθανές ακολουθίες χαρακτήρων a, b

$a\,b\,b\,a\,b\,a\,a\;\;a$

$a\,a\,a \ldots$

$b\,b\,b \ldots$

$$A = \{ c \;:\; \underset{\text{ακολουθία}}{c} : \mathbb{N} \to \{a, b\} \quad \text{με} \quad c_i \in \{a, b\} \}$$

Είναι το A αριθμήσιμο;

Όχι

Απόδειξη με άτοπο

Έστω ότι υπάρχει τρόπος να χωρέσω όλο το A στο $\mathbb{N}$ δηλ. υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f: A \to \mathbb{N}$

Τεχνική της διαγωνοποίησης (Cantor)

$$
\begin{array}{c|cccccc}
\mathbb{N} \backslash A & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
\hline
1 & a & b & a & a & b & a \ \ldots \\
2 & b & a & b & b & b & a \ \ldots \\
3 & a & b & b & a & a & b \ \ldots \\
4 & \vdots & & & & & \\
5 & & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
\infty & & & & & &
\end{array}
$$

Θα δείξω ότι υπάρχει μια ακολουθία x που δεν μπήκε

$$
x_i = \begin{cases} a & \text{αν ο } i\text{-οστός χαρακτήρας της } i\text{-οστής ακολουθίας είναι } b \\ b & \text{διαφορετικά} \end{cases}
$$

Αν το $f(x) = j$ δηλαδή το x βρίσκεται στη θέση j τότε καταλήγω σε άτοπο γιατί θα έπρεπε $x_j \neq x_j$

Άρα το A είναι υπεραριθμήσιμο

$$|A| > |\mathbb{N}|$$

• $|A| \leq |\mathbb{R}|$

$f : A \to \mathbb{R}$

a b a
0.01 000

a b b a b a b ... a a ...

$\updownarrow$ $\updownarrow$ $\updownarrow$ $\updownarrow$

$0.4\,5\,5\,4\,5 \in [0,1]$

$\mathbb{R}$, $[0,1]$ είναι υπεραριθμήσιμα

$\mathbb{Q}$ ρητοί είναι αριθμήσιμοι

$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ είναι υπεραριθμήσιμοι

$A \cup B$

$\uparrow$ $\uparrow$

αριθμήσιμα

$\aleph_0$

$\parallel$

$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

$|2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}| = \aleph_1$

$|2^{\mathbb{R}}| > |\mathbb{R}|$

$|A| < |2^A|$

$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \quad \ldots$

πολυώνυμο 3ου βαθμού

$a_n = x n^3 + y n^2 + z n + w \cdot 1$

$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = 8$

$a_5 = ;$

$d_n = a_{n+1} - a_n$ πολυώνυμο 2ου βαθμού

$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$

$(n+1)^k - n^k =$ πολυωνύμου $k-1$ βαθμού

$a^k - b^k = (a-b)\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \ldots + b^{k-1}\right)$

1	2	4	8	15	26	42	64	3ου βαθμού
1	2	4	7	11	16	22		2ου βαθμού
1	2	3	4	5	6			1ου βαθμού
1	1	1	1	1	…			0ου βαθμού

Αθροίσματα (Σειρά)

$$\underbrace{\sum_{i=m}^{n} a_i}\; = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$\left[\bigvee_{i=m}^{n} a_i = a_m \vee a_{m+1} \vee \dots \vee a_n \right]$$

$$\sum_{i \in S} a_i = a_3 + a_5 + a_{12}$$

$$S = \{3, 5, 12\}$$

Κλειστός τύπος

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = n \qquad \text{όπου} \qquad a_i = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

π.χ. Άθροισμα γεωμετρικής προόδου

$$a_n = a r^n$$

$$\sum_{j=0}^{n} a r^j = \begin{cases} a(n+1) & r=1 \\ \dfrac{ar^{n+1} - a}{r-1} & r \neq 1 \end{cases}$$

π.χ. $a_n = 2^n$

$$\begin{array}{ccccc} n=0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+ & 2+ & 4+ & 8+ & 16 \end{array} = 31$$

$a=1 \quad r=2$

$$\sum_{i=0}^{4} a_i = 31$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \frac{2^{n+1} - 1}{2-1} = 2^{n+1} - 1$$

Απόδειξη

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} a r^j$$

$$\Rightarrow \quad r \cdot S_n = \sum_{j=0}^{n} a r^{j+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} a r^{i} \qquad \boxed{i = j+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a r^{i} + a r^{n+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a r^{i} + a r^{n+1} - a r^{0}$$

$$= S_n + a r^{n+1} - a$$

$$\Rightarrow \quad r S_n = S_n + a r^{n+1} - a$$

$$\Rightarrow \quad (r-1) S_n = a r^{n+1} - a$$

$$\Rightarrow \quad S_n = \frac{a r^{n+1} - a}{r-1}$$

Άθροισμα αριθμητικής προόδου

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \dots + n$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = S_{100}$$

$$100 + 99 + 98 + \dots + 1 = S_{100}$$

$$2S_{100} = \underbrace{101 + 101 + \cdots 101}_{100 \text{ φορές}}$$
$$= 100 \cdot 101$$

$$\Rightarrow S_{100} = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n$$
$$S_n = n + (n-1) + \cdots + 1$$
$$2S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)$$
$$= n(n+1)$$

άρα $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{n} (ai + b) = a \sum_{i=1}^{n} i + b \sum_{i=1}^{n} 1$$
$$= a \frac{n(n+1)}{2} + b \cdot n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ 3ου βαθμού

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{(n(n+1))^2}{4}$$

$$= (1+2+3+\dots+n)^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

Αθροίσματα με άπειρους όρους

Έστω x με $|x|<1$

τότε $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$

$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$

$$a_i = x^i$$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

$$= \frac{0 - 1}{x - 1} = \frac{1}{1 - x}$$

$$\lim_{n \to \infty} x^{n+1} = 0$$ όταν $|x| < 1$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1}$$ για $|x| < 1$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}$$

Απόδειξη

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\, x^{i-1} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x^{i} \right)'$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^{i} \right)'$$

$$= \left(\frac{1}{1-x} \right)'$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}$$

- $\sum i(i-1)\, x^{i-2} = \left(\frac{1}{(1-x)^2} \right)' = \frac{2}{(1-x)^3}$

- $\sum_{i=1}^{\infty} i\, x^{i} = x \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i\, x^{i-1}$

$$= \frac{x}{(1-x)^2}$$

- $$\int_0^t \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right) dx = \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^t x^i \, dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{i+1}}{i+1} = \boxed{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j}}$$

$$\| $$

$$\int_0^t \frac{1}{1-x} \, dx = -\ln(1-t) = \ln \frac{1}{1-t}$$

- $$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$$

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(i \cdot \frac{x^{i-1}}{i!} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{i-1}}{(i-1)!}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = f(x)$$

- $$f(x) = e^x$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$