Σύνολα π.χ. $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$

(δηλ. διαφορετικών)

Ορισμός: Σύνολο είναι μια συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων

π.χ. $\{a, b\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2 \dots\}$

$[0, 1]$, $\mathbb{R}$

Το σύνολο των δυνάμεων του 2

$\{1, 2, 4, 8, 16, \dots\} = \{2^k : k \in \mathbb{N}\}$

Τα αντικείμενα ενός συνόλου ονομάζονται στοιχεία ή μέλη του συνόλου

$a \in \{a, b\}$ $\qquad \gamma \notin \{a, b\}$

ανήκει

Για οποιοδήποτε αντικείμενο πρέπει να ξέρω αν ανήκει ή δεν ανήκει στο σύνολο (ποτέ και τα 2)

Ένα σύνολο ορίζεται:

- Με απαρίθμηση όλων των στοιχείων

  π.χ. $A = \{1, 2, 3\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

- Με περιγραφή των στοιχείων

  π.χ. $A = \{a \in \mathbb{Z} : \underbrace{1 \leq a \leq 3}_{\text{συνθήκη}}\}$

- Μέσω πράξεων με άλλα σύνολα

π.χ. $A = \mathbb{Z} \cap [0.5, 3.14]$

Τα στοιχεία ενός συνόλου:

δεν έχει νόημα

- Δεν επαναλαμβάνονται $\{a, a, b\}$

(εκτός από πολυσύνολα) $\{a, b\}$

- Δεν είναι ταξινομημένα δηλ. $\{a, b\} = \{b, a\}$

- Μπορεί να είναι διαφορετικού είδους ακόμα και σύνολα

$P = \{ a, 1, \frac{3}{4}, \pi, \text{"Περσεφόνη"}, \{1, 2\}\}$

$1 \in P$ $\qquad 2 \notin P$

$\{1, 2\} \in P$ $\qquad \{1\} \notin P$

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$

$\{1,5\} \subseteq \{1,2,5\}$

Ορισμός (Υποσύνολο)

$\{1,5\} \not\subseteq \{1,2,5\}$

Ένα σύνολο P είναι υποσύνολο του Q

και συμβολίζεται $P \subseteq Q$

αν $\forall\, p \in P$ ισχύει ότι $p \in Q$

$$\forall p : (p \in P \Rightarrow p \in Q)$$

Κάθε σύνολο A $\quad A \subseteq A$

είναι υποσύνολο του εαυτού του

αλλα όχι γνήσιο υποσύνολο $\neg(A \subset A)$

$A \not\subset A$

Γνήσιο υποσύνολο $\quad A \subset B$ ανν $\left[\begin{array}{c} A \subseteq B \\ \text{και} \\ A \neq B \end{array}\right]$

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ✓ $\qquad$ $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}$ ✗

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ✓ $\qquad$ $\mathbb{Q} \notin \mathbb{R}$ ✓

Ερωτηση : υπάρχου συνολα A, B

τ.ω. $A \subseteq B$ και $A \in B$

$A = \{1\}$ $\qquad$ $B = \{0, 1, \{1\}\}$

$A \in B$ ✓ $\qquad$ $A \subseteq B$

Ορισμός

$P = Q$ ανν περιέχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία

$\Leftrightarrow \quad (P \subseteq Q) \wedge (Q \subseteq P)$

$\Leftrightarrow \quad \forall x : (x \in P \leftrightarrow x \in Q)$

π.χ. $\{a \in \mathbb{R} : 0 \leq a \leq 1\} = [0,1]$

$[0,1] \in \{[0,1], 5\}$

Κενό σύνολο

Κενο είναι το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Συμβολίζουμε $\emptyset = \{\}$

Θεώρημα : $\emptyset \subseteq P$ για κάθε σύνολο P

αλλά $\emptyset \notin \{a, b\}$ $\qquad \emptyset \in \{a, b, \emptyset\}$

Το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου καλείται μέγεθος ή πληθικός αριθμός και συμβολίζεται με $|A|$ για ενα σύνολο A

πχ. $|\{a,b\}| = 2$ $\quad$ $|[0,1]| = \infty$

$|\emptyset| = 0$ $\quad$ $|\{0,[0,1]\}| = 2$

$|\{\emptyset\}| = 1$

$|\{\underbrace{\emptyset}, \underbrace{\{\emptyset\}}\}| = 2$ $\quad$ $|\{\emptyset, \emptyset\}| = 1$

Αν για ένα σύνολο A

$|A| < \infty$ τότε A <u>πεπερασμένο</u>

$|A| = \infty$ τότε A <u>μη πεπερασμένο</u>

$\mathbb{R}$ είναι μη πεπερασμένο

$\{\mathbb{R}\}$ είναι πεπερασμένο

Πράξεις συνόλων

- <u>Δυναμοσύνολο</u> (powerset)

Το δυναμοσύνολο του A είναι το σύνολο των υποσυνόλων του

συμβολίζεται με 2^A ή $P(A)$

$$2^A \overset{\text{ορισμός}}{=} \{B : B \subseteq A\}$$

π.χ. $A = \{a, b\} \Rightarrow$

$$2^A = \{ \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset \}$$

$$|2^A| = 2^{|A|}$$

$A = \{a, b, c\}$

a	b	c	
0	0	0	$\emptyset$
1	0	0	$\{a\}$
0	1	0	$\{b\}$
0	0	1	$\{c\}$
1	1	0	$\{a, b\}$
1	0	1	$\{a, c\}$
0	1	1	$\{b, c\}$
1	1	1	$\{a, b, c\}$

- Καρτεσιανό Γινόμενο δυο συνόλων A, B

$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A, \ b \in B \}$$

π.χ. $\{1, 2\} \times \{2, 4\} =$

$\{ (1,2), (1, 4), (2, 2), (2,4) \}$

$\neq$

$\{2, 4\} \times \{1, 2\} =$

$\{ (2, 1), (2, 2), (4, 1), (4, 2) \}$

$|A| = n_A$ $\qquad$ $|B| = n_B$

$$|A \times B| = n_A n_B$$

- Ένωση $A \cup B = \{p : (p \in A) \vee (p \in B)\}$
- Τομή $A \cap B = \{p : (p \in A) \wedge (p \in B)\}$

π.χ. $\{a, b\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\}$

$\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\}$

$\{0, 2, 4, 6 \ldots\} \cap \{a : a = 2k+1, k \in \mathbb{N}\} = \emptyset$

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$$
$$= A \cup (B \cup C)$$

Προσεταιριστική ιδιότητα

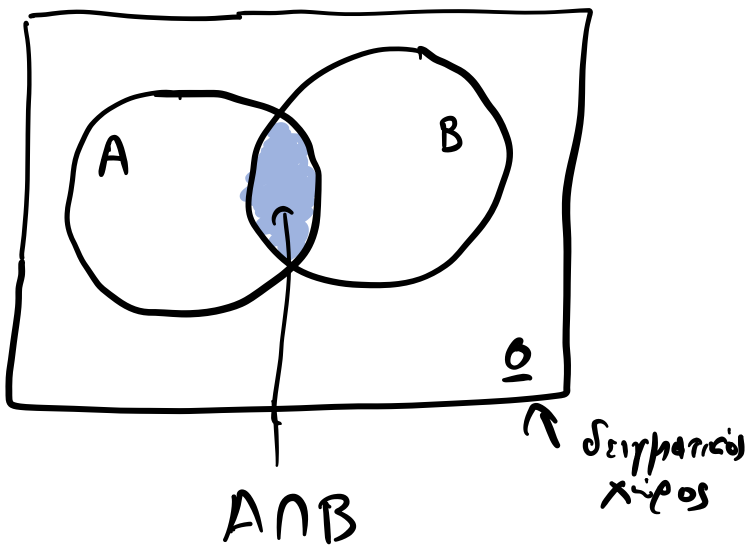
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$$
$$= \{p : \bigvee_{i=1}^{n} (p \in A_i)\}$$

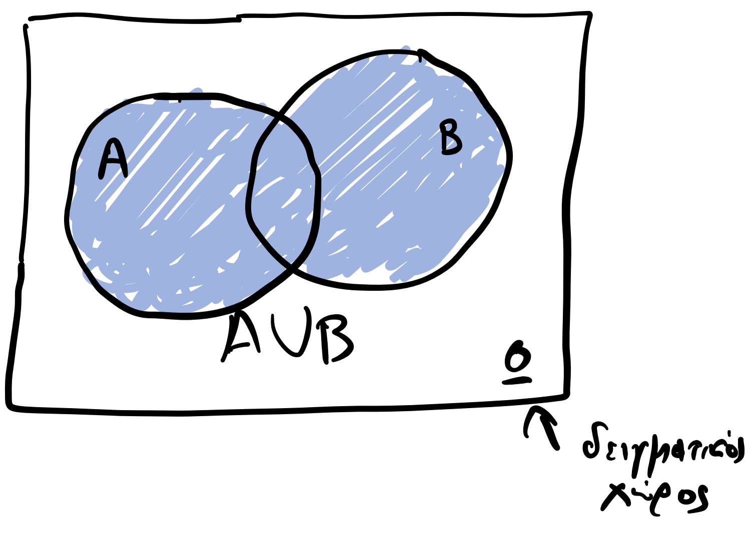
$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C$$
$$= A \cap (B \cap C)$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

$$= \left\{ p : \bigwedge_{i=1}^{n} (p \in A_i) \right\}$$

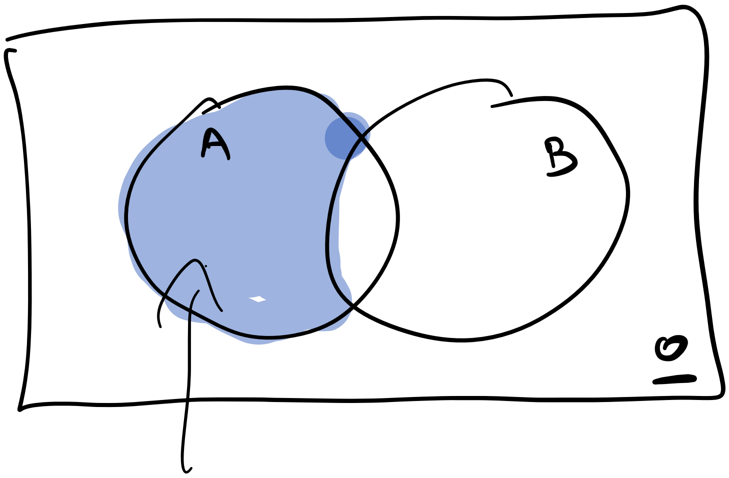
Διάγραμμα Venn





Διαφορά συνόλων

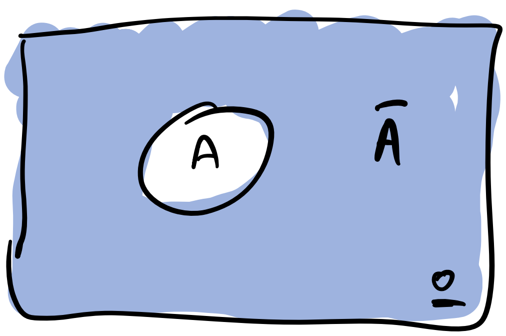
$$A - B = \{ a \in A : a \notin B \}$$



$A - B$

Συμπλήρωμα $\bar{A}$ ως προς σύνολο αναφοράς $\underline{\Omega}$

$$\bar{A} = \underline{\Omega} - A$$



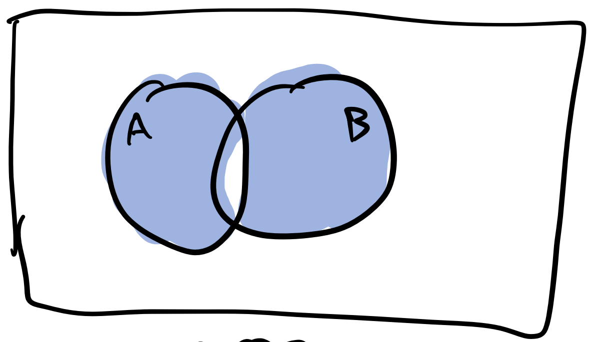
Π.χ. $\overline{\{0, 2, 4, \ldots\}} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

ως προς σύνολο αναφοράς $\mathbb{N}$

Συμμετρική διαφορά

$$A \oplus B = \{ p \in A \cup B : p \notin A \cap B \}$$

$$= \{ p : (p \in A) \oplus (p \in B) \}$$



$A \oplus B$

Ιδιότητες

- Η ένωση και η τομή είναι <u>προσεταιριστικές</u>

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

- Είναι αντιμεταθετικές

$$A \cup B = B \cup A$$

- Έχουν ουδέτερο στοιχείο

$$a + \underset{\text{ουδέτερο για πρόσθεση}}{\underset{\uparrow}{0}} = a \qquad a \cdot \underset{\text{ουδέτερο για πολ/σμο}}{\underset{\uparrow}{1}} = a$$

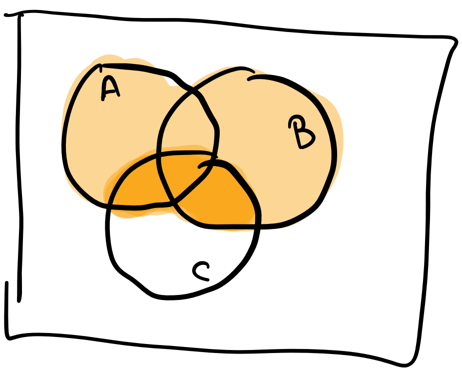
$$A \cup \underbrace{\emptyset}_{\text{ουδέτερο για } \cup} = A \qquad A \cap \underbrace{\Omega}_{\text{ουδέτερο για } \cap} = A$$

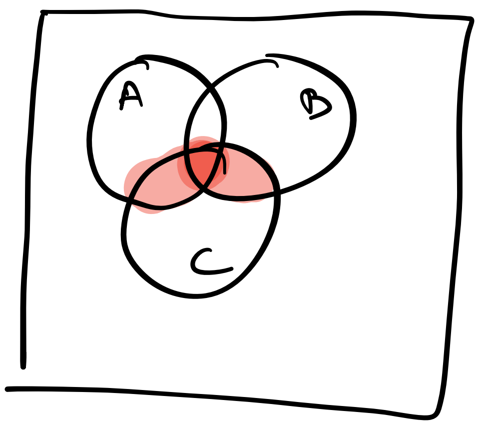
- Είναι επιμεριστικές μεταξύ τους

$$(a+\beta)\cdot\gamma = a\cdot\gamma + \beta\cdot\gamma$$

- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Απόδειξη με διάγραμμα Venn





$A \cup B$

$(A \cup B) \cap C$

$A \cap C$, $B \cap C$

Απόδειξη με ιδιότητες

Θεώρημα : $\underbrace{(A \cup B) \cap C}_{P} = \underbrace{\overbrace{(A \cap C)}^{Q_1} \cup \overbrace{(B \cap C)}^{Q_2}}_{Q}$

Απόδειξη

Θ.δ.ο.

- $Q \subseteq P$: $Q_1 \subseteq A \Rightarrow Q_1 \subseteq A \cup B$

  $Q_1 \subseteq C$

  $\Downarrow$

  $Q_1 \subseteq (A \cup B) \cap C$

Αντίστοιχα $Q_2 \subseteq (A \cup B) \cap C = P$

$$Q = Q_1 \cup Q_2 \subseteq P$$

Για την ανάποδη κατεύθυνση έχουμε

- $P \subseteq Q$: Έστω $p \in P$

$$\Downarrow \quad p \in A \cup B$$

και $p \in C$

- Αν $p \in A$ επειδή $p \in C$

$\Rightarrow p \in A \cap C = Q_1$

- Αν $p \in B$ επειδή $p \in C$

$\Rightarrow p \in B \cap C = Q_2$

Άρα πάντα $p \in Q_1 \cup Q_2 = Q$ $\square$

- Κανόνες De Morgan για σύνολα

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Ν.δ.ο. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$$\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \{ x : x \notin A \cap B \} \\
&= \{ x : \neg (x \in A \cap B) \} \\
&= \{ x : \neg (x \in A \wedge x \in B) \} \\
&= \{ x : (x \notin A) \vee (x \notin B) \} \quad \text{De Morgan για λογική} \\
&= \{ x : (x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{B}) \} \\
&= \{ x : x \in \overline{A} \cup \overline{B} \} \\
&= \overline{A} \cup \overline{B}
\end{aligned}$$

$\square$

Αναπαράσταση συνόλων στον υπολογιστή

Έστω $\underline{\Omega} = \{1, \ldots, n\}$

Μπορώ να αναπαραστήσω κάθε σύνολο $A \subseteq \underline{\Omega}$

ως μια συμβολοσειρά από bit

π.χ. $n=5$ $\underline{\Omega} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A = \{1, 3, 4\} \to 10110$

$22_{(10)} = 10110_{(2)} = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$

$12_{(10)} = 1100_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$

$7_{(10)} = 0111_{(2)}$

$4_{(10)} = 0100_{(2)}$

$\{1,2\} \cap \{2,3,4\}$

$12 \underset{\text{and}}{\&} 7 = 4$

$12 \underset{\text{or}}{|} 7 = 15 = 1111_{(2)}$

$\{1,2\} \cup \{2,3,4\}$

$= \{1,2,3,4\}$

п.х. $\{4\diamondsuit, 5\heartsuit\}$

$$\begin{array}{ccccc} A\heartsuit & 2\heartsuit & & K\spadesuit & \\ \underline{\Omega} = \{1, & 2, & \ldots, & 52\} & |\underline{\Omega}| = 52 \end{array}$$

$0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1 \quad 0$

$\downarrow$

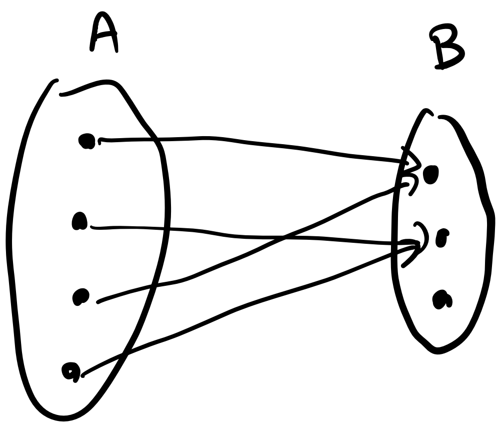
$$\begin{array}{ccccc} 0, & 1, & 2, & \ldots, & 2^{52}-1 \\ \uparrow & \uparrow & & & \uparrow \\ \varnothing & \{K\spadesuit\} & & & \underline{\Omega} \end{array}$$

Συναρτήσεις

Συνάρτηση $A \to B$ καλείται μια ανάθεση ακριβώς ενός στοιχείου σε κάποιο στοιχείο του B

A πεδίο ορισμού

B πεδίο τιμών



π.χ. A = σύνολο των φοιτητών

B = βαθμός τελικής εξέτασης

Η συνάρτηση πρέπει να είναι μονοσήμαντη

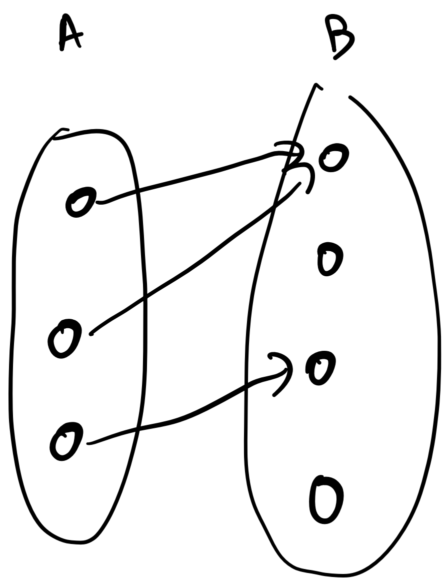
δηλαδή για κάθε $a \in A$ να υπάρχει

μοναδικό $b \in B$ τ.ω. $f(a) = b$ εικόνα του a

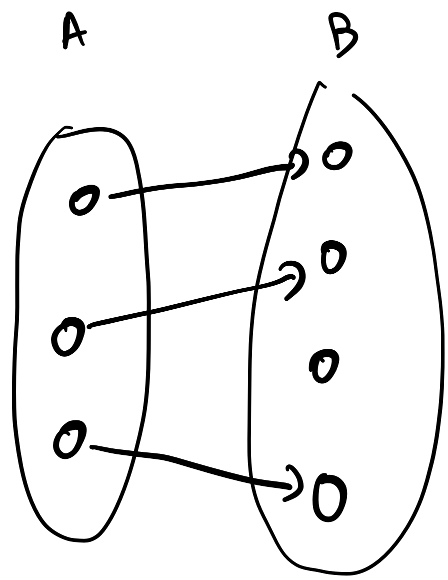
Ορισμός 1-1 συνάρτηση f ανν

$$\forall a, a' \in A \text{ με } a \neq a' : f(a) \neq f(a')$$

$|B| \geq |A|$



όχι 1-1



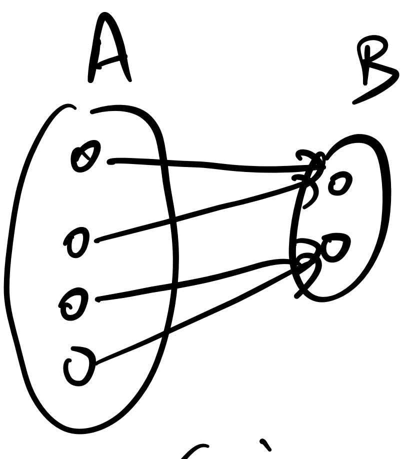
1-1

<u>Επί</u> συνάρτηση αν

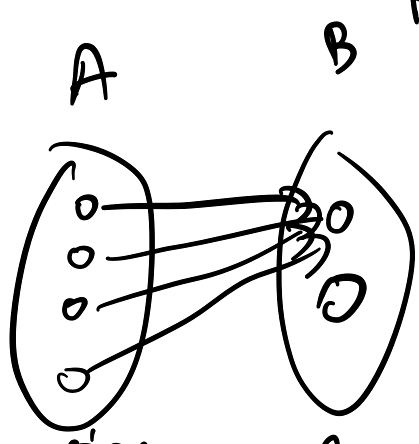
$$\forall b \in B \quad \exists a \in A : f(a) = b$$

δηλαδή $B = f(A) = \{f(a) : \forall a \in A\}$

$|B| \leq |A|$



Επί



όχι επί

Η συνάρτηση
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

π.χ. $f(x) = x^2$

δεν είναι επί γιατί $\nexists a : f(a) = -1$

δεν είναι 1-1 γιατί $f(1) = f(-1) = 1$

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(x) = x^2$

είναι επί

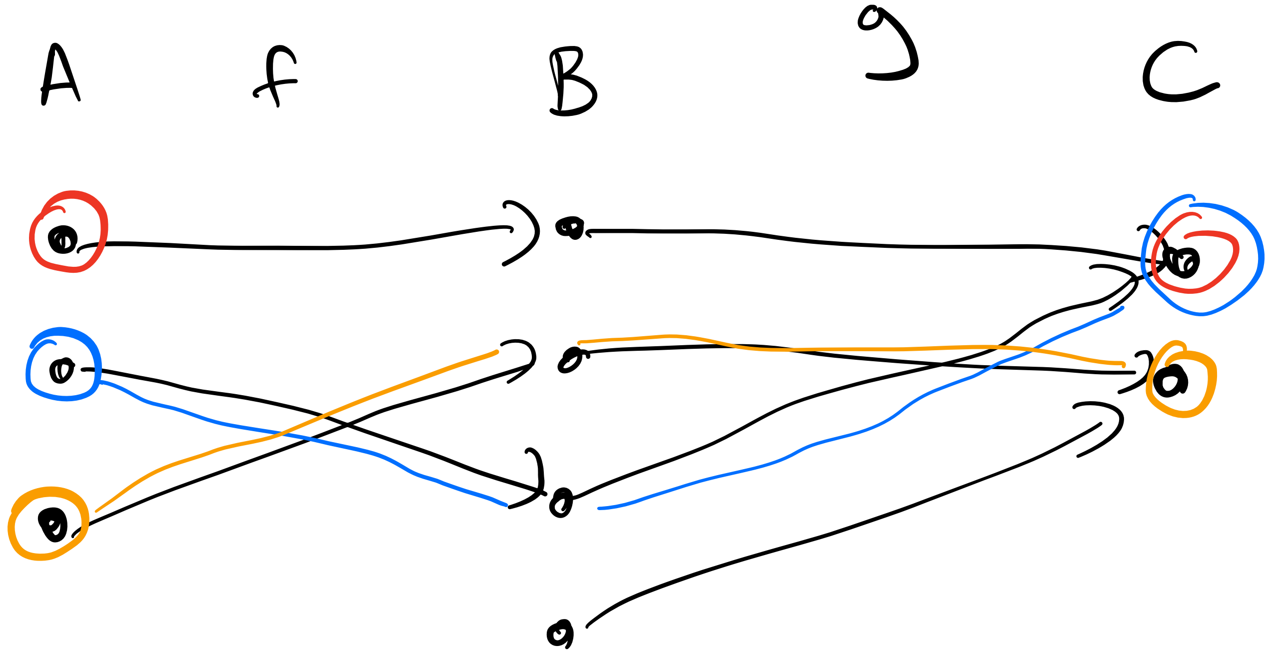
Ορισμός

Έστω συναρτήσεις $f : A \to B$ και $g : B \to C$

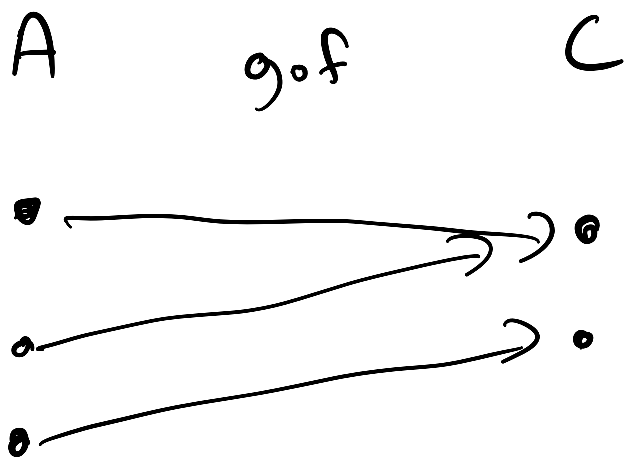
Η σύνθεση της f με τη g είναι

μια νέα συνάρτηση $g \circ f : A \to C$

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \quad \forall a \in A$$



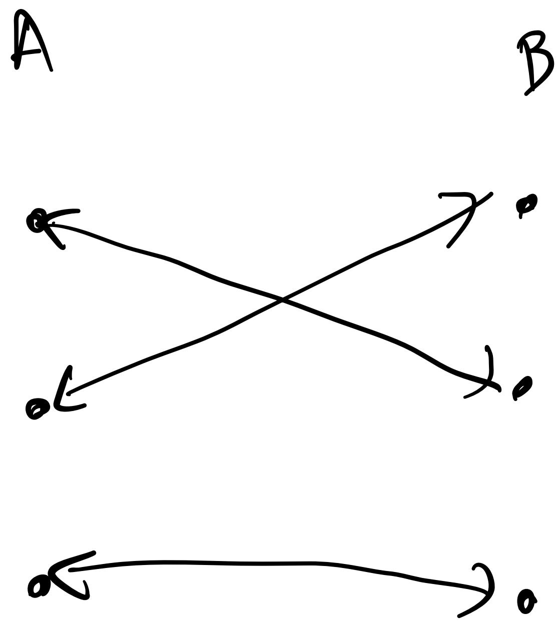
$\Downarrow$



Οι συναρτήσεις που είναι 1-1 και επί λέγονται αμφιμονοσήμαντες $(|A|=|B|)$

Ορίζεται και η αντίστροφη

$f^{-1} : B \to A$, $f^{-1}(b) = a \iff b = f(a)$



$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

Ενδιαφέρουσες συναρτήσεις

- Παραγοντικό $n \in \mathbb{N} \to n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

  Stirling προσέγγιση $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

  3,14   2,718

- Ακέραιο μέρος ή Δάπεδο (Floor) $\lfloor\ \rfloor$

  $x \in \mathbb{R} \to \lfloor x \rfloor = a \in \mathbb{Z}$ ανν

  ο a είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος με $a \leq x$

π.χ. $\lfloor 3{,}7 \rfloor = 3$ $\lfloor -0{,}5 \rfloor = -1$

- Οροφή (ceil)

$x \in \mathbb{R} \to \lceil x \rceil = a \in \mathbb{Z}$ αν

ο a είναι ο μικρότερος

ακέραιος με $a \geq x$

π.χ. $\lceil 3.7 \rceil = 4$, $\lceil -0,5 \rceil = 0$

$-\lceil 0,5 \rceil = -1$

Ακολουθίες

Ακολουθία είναι μια συνάρτηση η οποία

έχει ως πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο

των φυσικών αριθμών (ή ακεραίων)

$f : A \subseteq \mathbb{N} \to S$

Συχνά χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $a_n = f(n)$

ή b_n

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

π.χ. $a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = \frac{1}{3} \quad \dots$

$a_n = \frac{1}{n}$

- Αριθμητική πρόοδος

$a, \quad a+d, \quad a+2d, \quad a+3d, \quad a+4d, \dots$

$a_n = a + n \cdot d$ δηλ. $a_0 = a$

$a_n = a_{n-1} + d$

γραμμική

$a_1 = a + d$

$f(x) = dx + a$

$a_2 = a + 2d$

$\vdots$

$a=1, \ d=2$

π.χ. $1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$a_n = an^2 + bn + c$ (πολυωνυμική)

- Εκθετική $f(x) = a\, r^x$

Γεωμετρική πρόοδος

$a_n = ar^n$ $\qquad a, a \cdot r, a \cdot r^2, a \cdot r^3, \ldots$

$a_n = r \cdot a_{n-1}$ $\qquad a_0 \quad a_1$

π.χ. $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$

$a = 1 \quad r = 2$

Ακολουθίες ορίζονται ως

- με κλειστό τύπο
- Περιγραφικά $\quad 1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{αν χάνω με } i \text{ πέτρες} \\ 1 & \text{αν κερδίζω με } i \text{ πέτρες} \end{cases}$$

- Αναδρομική σχέση

π.χ. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ με $a_0 = 1, a_1 = 1$

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ (Fibonacci) αναδρομικά $\quad a_n = a_{n-1} + 1 \quad$ με $\quad a_0 = 0$

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

κλειστή σχέση

$$a_n = n$$

$$\left[\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 1 \\ &= a_{n-2} + 2 \\ &= a_{n-3} + 3 \\ &\ \vdots \\ &= a_{n-n} + n = a_0 + n = n \end{aligned}\right.$$

$a_0 = 0$

$a_1 = a_0 + 1 = 1$

$a_n = n$

π.χ. $\quad a_n = a_{n-1} + 3 \quad$ με $\quad a_1 = 2$

$a_1 = 2$

$a_2 = a_1 + 3$

$a_3 = a_2 + 3 = a_1 + 3 \cdot 2$

$a_4 = a_3 + 3 = a_1 + 3 \cdot 3$

$\vdots$

$a_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$

Π.χ. Παιχνίδι με πέτρες $2, 5, 7$

$a_0 = 0$

$a_1 = 0$

$a_i = 1 - a_{i-2} \cdot a_{i-5} \cdot a_{i-7}$

Αθροίσματα (Σειρά)

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n$$

$$\left[\bigvee_{i=m}^{n} a_i = a_m \vee a_{m+1} \vee \dots \vee a_n \right]$$

$$\sum_{i \in S} a_i = a_3 + a_5 + a_{12}$$

$$S = \{3, 5, 12\}$$

Κλειστοί τύποι

$$a_n = 1 \quad \forall n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = n$$

Π.χ. Αθροισμα γεωμετρικής προόδου

$$\sum_{j=0}^{n} a r^{j} = \begin{cases} (n+1)a & r=1 \\ \dfrac{a r^{n+1} - a}{r-1} & r \neq 1 \end{cases}$$

Απόδειξη

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} a r^{j}$$

$$\Rightarrow \quad r S_n = \sum_{j=0}^{n} a r^{j+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} a r^{i}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a r^{i}} + a r^{n+1}$$

$$\rightarrow \quad = \sum_{i=0}^{n} a r^{i} + a r^{n+1} - a r^{0}$$

$$= S_n + a r^{n+1} - a$$

$$\Rightarrow \quad r S_n = S_n + a r^{n+1} - a$$

$$\Rightarrow \quad S_n = \frac{a r^{n+1} - a}{r - 1}$$

$\square$

- $$f_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1$$

$$= n(n+1) = 2f_n$$

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- Έστω x με $|x| < 1$

τότε $\displaystyle f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$

Απόδειξη

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x^i = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

$\boxed{\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0 \text{ γιατί } |x|<1}$

$$= \frac{0-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$$

$\square$

- $\sum_{i=0}^{\infty} i x^{i-1}$ για $|x|<1$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i x^{i-1} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right)'$$

$$= f'(x)$$

$$= \left(\frac{1}{1-x}\right)'$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}$$

- $$\sum_{i=0}^{\infty} i x^i = \frac{x}{(1-x)^2}$$

- $$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

$\Rightarrow$

$$f(x) = e^x$$

Απόδειξη

$$f'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{x^i}{i!}\right)' =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i\, x^{i-1}}{i!}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{i-1}}{(i-1)!}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = f(x)$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = ce^x$$

για κάποιο c

αλλά $f(0) = 1$ άρα $c = 1$

$$\Rightarrow \quad f(x) = e^x$$

$\square$

Πληθικότητα Συνόλων

Ορισμός: Δυο σύνολα A και B έχουν την ίδια πληθικότητα αν υπάρχει συνάρτηση $f : A \to B$ 1-1 και επί (αμφιμονοσήμαντη)

$$|A| = |B|$$

$$|\{1,2,3\}| = |\{5,6,7\}|$$

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ 1 & \longrightarrow & 5 \\ 2 & \longrightarrow & 6 \\ 3 & \longrightarrow & 7 \end{array}$$

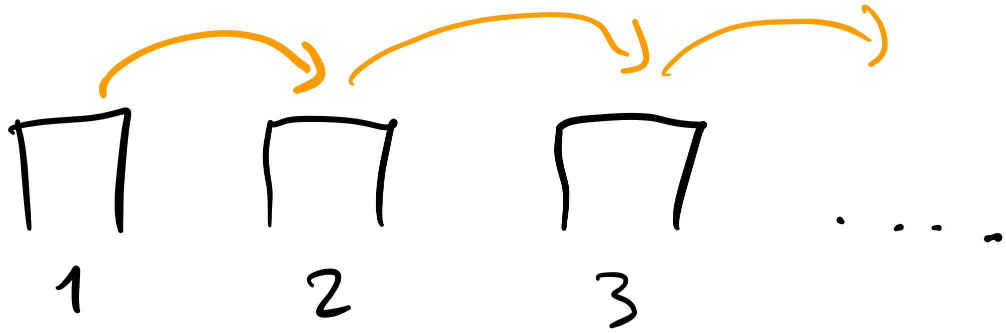
Ορισμός: Αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f: A \to B$ τότε $|A| \leq |B|$

Αριθμήσιμα ή Μετρήσιμα Σύνολα

Ορισμός: Ένα σύνολο A είναι αριθμήσιμο ή μετρησιμο αν $|A| \leq |\mathbb{N}|$

δηλαδή αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f: A \to \mathbb{N}$

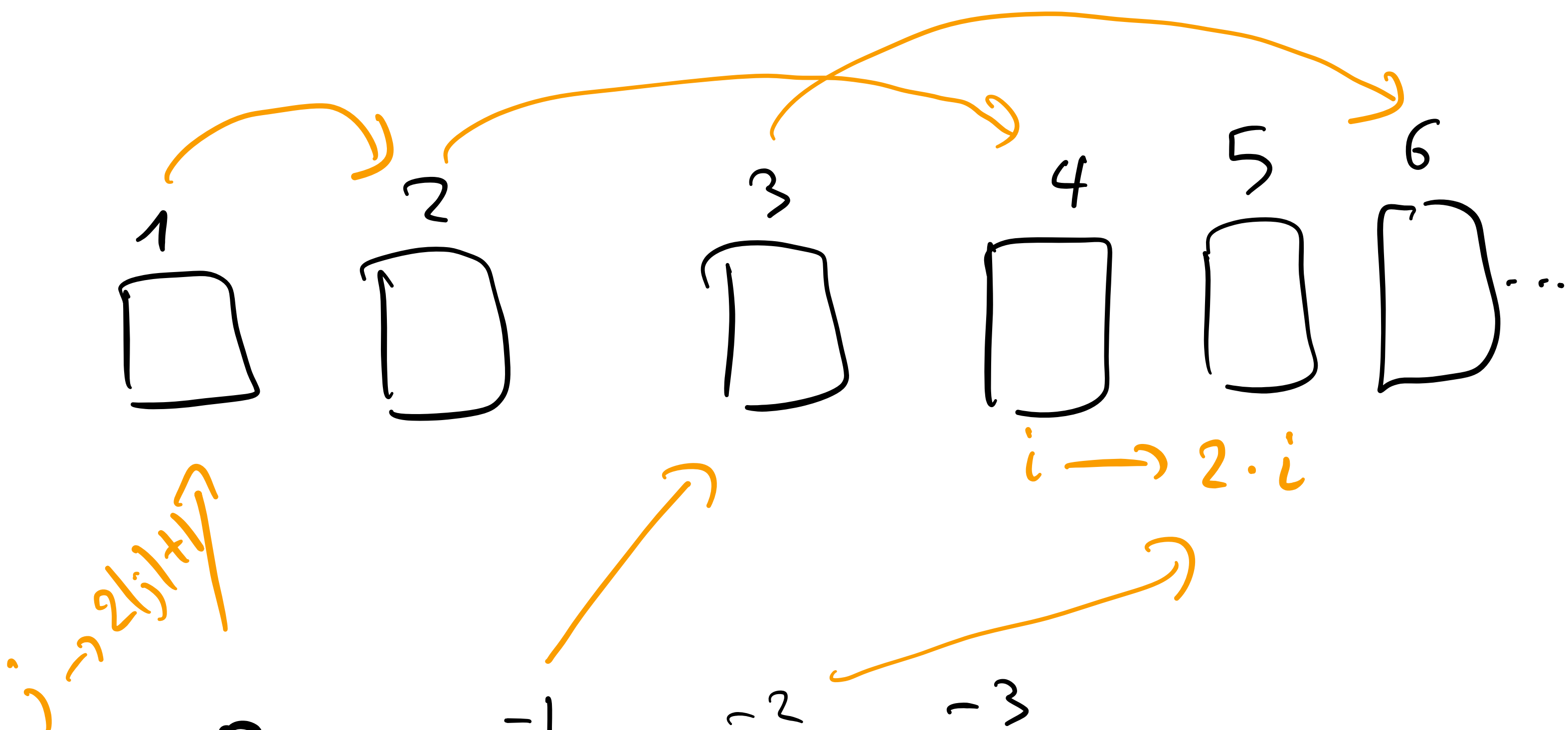
Ξενοδοχειο του Hilbert

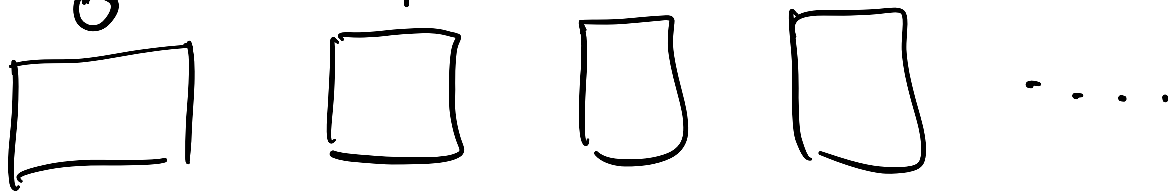


$f: \mathbb{N} \cup \{a\} \to \mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = a \\ x+1 & x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$|\mathbb{N} \cup \{a\}| \leq |\mathbb{N}|$$





$\mathbb{Z} - \mathbb{N}$

- Υπάρχει 1-1 συνάρτηση

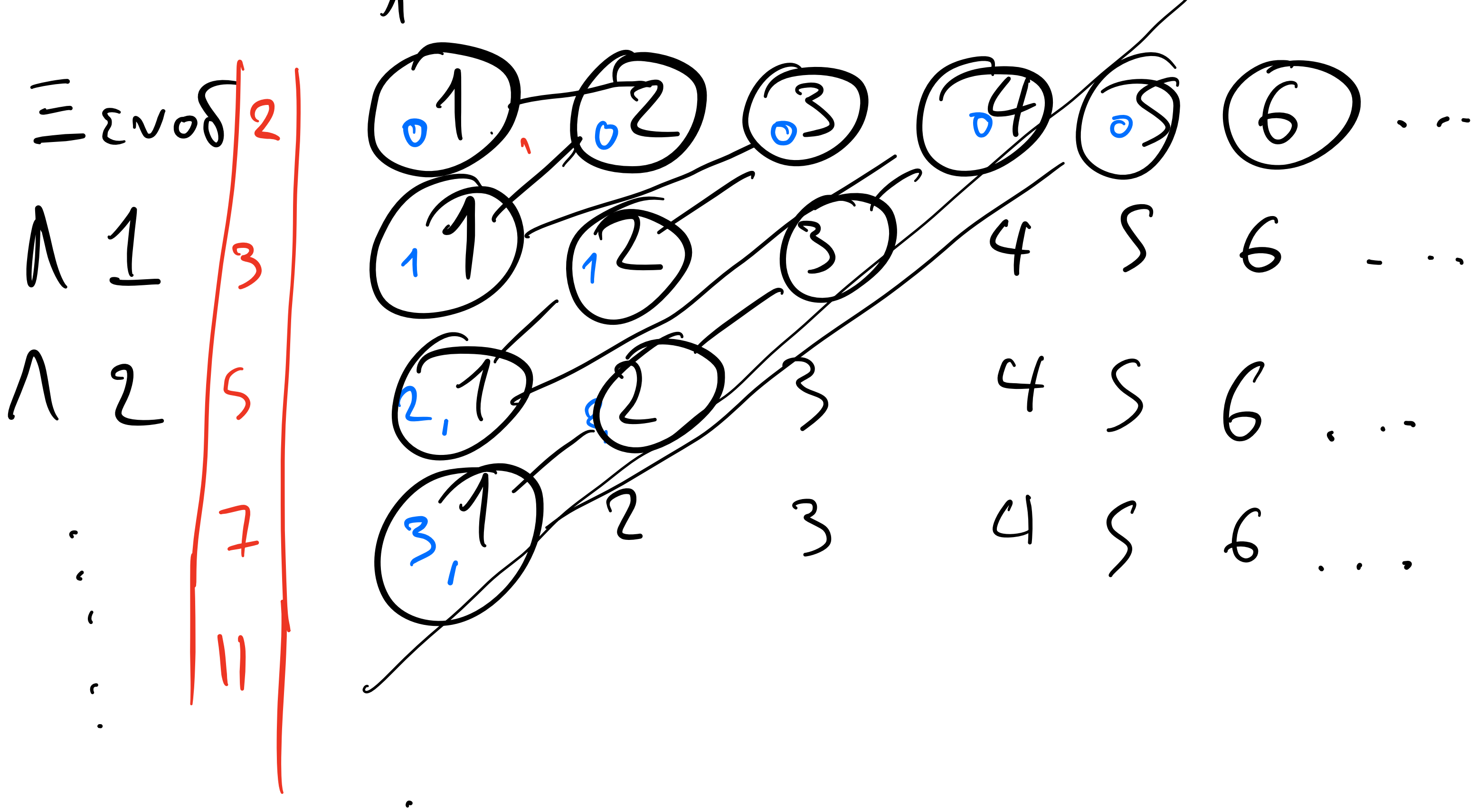
$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \cup (\mathbb{Z} - \mathbb{N})$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{αν } x > 0 \\ 2|x|+1 & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

$|\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{N}|$ αλλα $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$

$|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$ (Άλεφ Μηδέν)



Υπάρχει 1-1 συνάρτηση

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$(x, y) \longrightarrow x + y$$

όχι 1-1

$$(1, 3) \longrightarrow 4$$

$$(2, 2) \longrightarrow 4$$

$$f(x,y) \to (P_x)^y$$

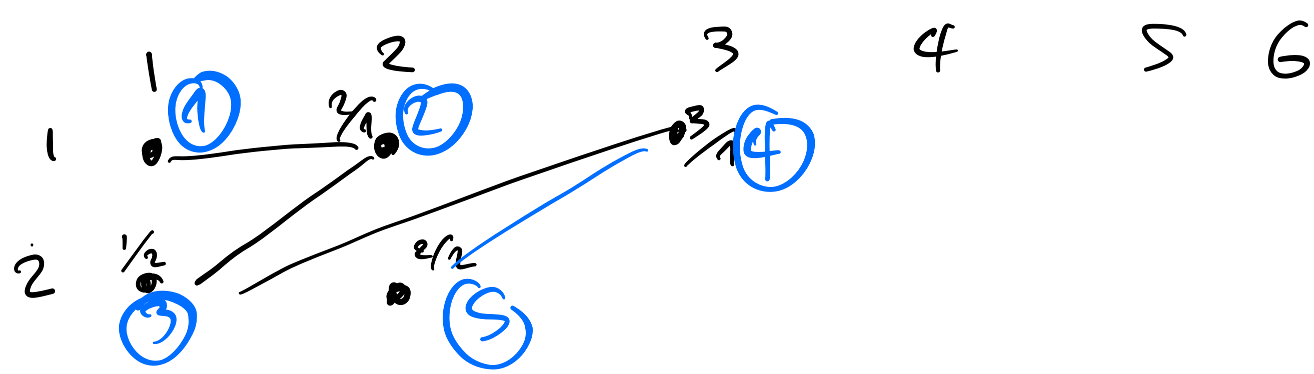
$$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}|$$

Υπάρχει

$$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \quad 1-1?$$

$\frac{a}{b}$

$$|\mathbb{Q}_{>0}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}|$$



3

4

5

6

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$

$|\mathbb{N}| \le |\mathbb{Q}|$

$$\frac{(x+y)(x+y-1)}{2}$$

0   1

(0, 0)   (0, 1)   (0, 2)   (   )

(1, 0)   (1, 1)

(2, 0)

$$f(x,y) = \frac{(x+y+1)(x+y)}{2} + x$$

$f(0,0) \to 0$

$f(0,1) \to 1$

$f(1,0) \to 2$

$f(2,0) \to 3$

Θεώρημα Schroder - Bernstein

Αν $|A| \leq |B|$ και $|B| \leq |A|$ τότε $|A| = |B|$

δηλαδή αν υπάρχει 1-1 $f_{AB} : A \to B$

και υπάρχει 1-1 $f_{BA} : B \to A$

τότε υπάρχει 1-1 και επί (αντιστρέψιμη)

$f : A \to B$

Λεωφορείο όπου υπάρχουν όλες οι πιθανές ακολουθίες χαρακτήρων a, b

aaaaa....

a b b a b b a . . .

. . .

.

.

b b b b . . .

$A = \{ c : c : \mathbb{N} \to \{a,b\}$ ακολουθία με $c_i \in \{a,b\} \}$

Είναι το A αριθμήσιμο;

Όχι

Απόδειξη με άτοπο

Έστω ότι υπάρχει τρόπος να χωρίσω το A στο $\mathbb{N}$

Τεχνική της διαγωνοποίησης (Cantor)

$x =$ b b a b

1	a	b	b	a	a	a	b	a	…
2	a	b	a	b	a	b	a	a	…
3	b	a	b	b	a	b	b	b	…
4			b						
5			⋮						
6									
⋮	a	a	a	a	a	a	a	a	

. . .

Θα δείξω ότι υπάρχει ακολουθία που δεν ανήκει στην απαρίθμηση

$$x_i = \begin{cases} a & \text{αν το } i\text{-οστό γράμμα της } i\text{-οστής ακολουθίας είναι } b \\ b & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Αν ο x είναι στη θέση j θα έχω ότι

$x_j \neq x_j$

άρα άτοπο.

Το A είναι υπεραριθμήσιμο.

a b b a a b ...

$\downarrow$

0. 4 5 5 4 4 5

Το [0,1] είναι υπεραριθμήσιμο

γιατί $|\mathbb{N}| < |A| \leq |[0,1]|$

υπάρχει 1-1 $f : A \to [0,1$