Λογική

Ορισμός

(Μαθηματική / Λογική) Πρόταση είναι μια φράση η οποία είναι είτε αληθής είτε ψευδής (όχι και τα 2)

π.χ. $2+2=3$ ✓ μαθηματική πρόταση

$x+2=3$ ✗ όχι μαθηματική πρόταση

Ορισμός

Ταυτολογία αν πάντα αλήθεια

1 ή A ή T

αληθής true

Αντίφαση αν πάντα ψευδής

0 ή Ψ ή F

false

Συμβολισμός: Γράμματα p, q, r

Πράξεις

- Άρνηση της p : $\overline{p}$ ή $\neg p$ (NOT)
- Συζευξη (και, AND) : $p \land q$ ισχύει όταν και το p και το q ισχύει
- Διάζευξη (ή, OR) : $p \lor q$

$p \land q$ $\neg(p \land q)$

$- =$ $(\neg p) \lor (\neg q)$

- Αποκλειστική Διάζευξη (είτε - είτε, XOR):

$\supset \oplus$

ισχύει όταν ακριβώς μια εκ των 2 είναι αληθής

Πίνακας Αλήθειας

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T	T	F
T	F	F	F	T	T	F	F
T	T	F	T	T	F	T	T

Συνεπαγωγή

Αν p τότε q : $p \rightarrow q$

Αν $0 = 1$ τοτε $1 = 2$ και $1=3$

Ισοδυναμία

p αν και μόνο αν q , $p \leftrightarrow q$

$\boxed{\text{ανν}}$

$p \equiv q$

$p \Leftrightarrow q$

<u>Θεώρημα</u> $(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \to q) \wedge (q \to p)]$

Απόδειξη με πίνακα αληθείας

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

Ιδιότητες

$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$$

Αντιθετοανάστροφος

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

$$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$$

$$p \wedge 1 \equiv p$$

$$p \wedge 0 \equiv 0$$

$$p \wedge p \equiv p$$

$$p \vee p \equiv p$$

$$p \vee 1 \equiv 1$$

$$p \vee 0 \equiv p$$

$$\left.\begin{array}{l} \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \\ \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \end{array}\right]$$ De Morgan

$$\overbrace{\neg(p \wedge q)} \equiv \overbrace{\neg p \vee \neg q}$$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \equiv$$

$$\neg\left[(p_1 \wedge p_2) \wedge p_3\right] \equiv$$

$$\neg(p_1 \wedge p_2) \vee \neg p_3 \equiv$$

$$(\neg p_1 \vee \neg p_2) \vee \neg p_3 \equiv$$

$$\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3$$

Προτεραιότητα

$\neg p \land r \to q$

$\neg$ υψηλότερο $((\neg p) \land r)''' \to q$

$\land$, $\lor$, $\oplus$ μεσαία

$\to$, $\leftrightarrow$ Χαμηλότερη

Γρίφος

Δυο φυλές - Παντα αλήθεια

- Πάντα ψέμματα

Ρωτάω : Υπάρχει χρυσός στο νησί;

Απάντηση : Υπάρχει ανν λέω την αλήθεια

Λύση A : Λέει αλήθεια

X : Υπάρχει χρυσός

Η απάντηση P ήταν $(A \leftrightarrow X)$

Απο τα δεδομένα

$A \leftrightarrow P$ δηλαδή

$$A \leftrightarrow (A \leftrightarrow X) \equiv X$$

	A	X	$A \leftrightarrow X$	$A \leftrightarrow (A \leftrightarrow X)$
	0	0	1	0
→	0	1	0	1
	1	0	0	0
→	1	1	1	1

Γρίφος

3 άτομα

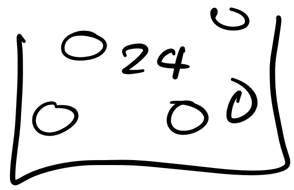
Ιππότης λέει αλήθεια πάντα

Κλέφτης λέει ψέμματα πάντα

Τεχνίτης λέει αλήθεια ή ψέμματα

1	2	3	Εγώ είμαι τεχνίτης	Εγώ είμαι τεχνίτης	ο 1ος τεχνίτης
Ι	Κ	Τ	✗	✓	✓
Ι	Τ	Κ			
Κ	Ι	Τ			
Κ	Τ	Ι	✓	✓	✗
Τ	Κ	Ι			
Τ	Ι	Κ			✗

Παιχνίδι



Έχω 24 πέτρες

Επιτρέπεται να πάρω 2, 5 ή 7 πέτρες κάθε φορά

Παίζουν 2 παίχτες εναλλάξ

Στόχος: Να μη χάσω.
Χάνει όποιος δεν μπορεί να κάνει κινηση

$$24 \to 22 \to 20 \to 13 \to 11 \to 6 \to 4$$

$$2 \to 2$$

Παιχνίδι με πέτρες

P_i : Έχω στρατηγική νίκης
όταν παίζω πρώτος
και υπάρχουν i πέτρες

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
F	F	T	T	F	T	T	T

P_8	P_9	10	11	12	13	14	15	16
T	T	F	T	T	F	F	T	T

17	18	19	20	21	22	23	24
T	T	T	T	T	F	F	T

25	26	27	28	29	30	31
T	F	T	T	T	T	T

32	33	34
F	T	T

$$\neg\left(\neg p_{i-7} \vee \neg p_{i-5} \vee \neg p_{i-2}\right) \leftrightarrow \neg p_i$$

$$p_{i-7} \wedge p_{i-5} \wedge p_{i-2} \leftrightarrow \neg p_i$$

Μπορώ να βρω κλειστό τύπο παρατηρώντας ότι ο κανόνας είναι περιοδικός με περίοδο 22. Χάνω <u>ανν</u>

$$n \bmod 22 \in \{0, 1, 4, 10, 13, 14\}$$

Μέχρι τώρα είδαμε:

- Προτάσεις
- Μετατροπή από φυσική γλώσσα σε μαθηματική
- Ισοδυναμία προτάσεων με
    - Πίνακα τιμών / ανάλυση περιπτώσεων
    - απλοποίηση μέσω ιδιοτήτων
- Επίλυση γρίφων

Ορισμός

Κατηγόρημα είναι μια πρόταση της οποίας η (λογική τιμή) εξαρτάται από την τιμή μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών π.χ.

$$\underbrace{P(x)}_{\text{Προτασιακή συνάρτηση}} : \quad \overbrace{\underbrace{x}_{\text{μεταβλητή}} > 3}^{\text{κατηγόρημα}}$$

$P(4)$ αληθής T

$P(3)$ F $(3 \ngtr 3)$

$$Q(x, y) : \quad x + y > 3$$

$Q(5, 7)$ T

$Q(2, 1)$ F

Ποσοδείκτες

- Υπαρξιακή Πρόταση

$$\underbrace{\exists x : P(x)}$$

Υπάρχει x έτσι ώστε να ισχύει το $P(x)$

π.χ.

$$\underbrace{\exists x : x > 4}$$ T γιατί υπάρχει $x=5$

$$\exists x \in \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{πεδίο ορισμού}} : x \notin \mathbb{Q}$$ T γιατί αν $x = \pi = 3,14\ldots$

$$\exists x \in \{1, 2, 3\} : x^2 > 10 \qquad F$$

$$\equiv (1^2 > 10) \vee (2^2 > 10) \vee (3^2 > 10)$$

$$\exists x \in \{0,1\} \ \exists y \in \{0,1\} : x \oplus y \qquad T$$

για $x=0$
$y=1$

$\exists y \in \{0,1\} \ \exists x \in \{0,1\} : x \oplus y$

$\exists x, y \in \{0,1\} : x \oplus y$

Μοναδικής ύπαρξης

$\exists! x : P(x)$ υπάρχει μοναδικό x

π.χ. $\exists! x \in \mathbb{R}_{\geq 0} : x^2 = 4$ T

$\mathbb{R}_{\geq 0} = \mathbb{R} \cap \{x : x \geq 0\}$

$x = 2$ είναι μοναδική λύση

$\exists! x \in \mathbb{R} : x^2 = 4$ F

$x = 2$
$x = -2$

$\exists! x, y \in \{0,1\} : \neg(x \to y)$ T

$x = 1 \quad y = 0$

$x \to y$	x	y
1	0	0
1	0	1
0	1	0
1	1	1

- Καθολική Πρόταση:

$\forall x : P(x)$

Για κάθε x $\wedge$ ισχύει η $P(x)$

σε κάποιο πεδίο ορισμού

π.χ. $\forall n$ περιττός ακέραιος : n^2 είναι περιττός

Αληθής γιατί $n = 2k+1$ όπου k ακέραιος

άρα $n^2 = (2k+1)^2$

$= 4k^2 + 4k + 1$

$= 2\underbrace{(2k^2 + 2k)}_{\lambda} + 1$

$= 2\lambda + 1$ όπου λ ακέραιος

$\forall n \in \{1, 2, 3, 4\} : n^2 \leq 10$ F

$\equiv$

$(1^2 \leq 10) \wedge (2^2 \leq 10) \wedge (3^2 \leq 10) \wedge (4^2 \leq 10)$

Άρνηση ποσοδεικτών

$$\neg(\forall x : P(x)) \equiv \exists x : \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x : P(x)) \equiv \forall x : \neg P(x)$$

κανόνες De Morgan για ποσοδείκτες

Αν θέλω να υπάρχουν ακριβώς 3 λύσεις

$$\exists!\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} : (x_1 < x_2 < x_3) \land P(x_1) \land P(x_2) \land P(x_3)$$

πχ. $\forall n \in \mathbb{N}$: $n! + 1$ είναι πρώτος (F)

$n = 2 \to n! + 1 = 3$

$n! = 1 . 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ \dots \ n$

$n = 3 \to n! + 1 = 7$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

Δεν ισχύει γιατί για $n = 4$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$n! + 1 = 25$ αλλά $25 = 5 \cdot 5$
όχι πρώτος

Άρα ψευδής

Ικανοποιησιμότητα (SATISFIABILITY - SAT)

Για ένα κατηγόρημα υπάρχουν τιμές που το κάνουν αληθές.

$$\exists x_1, x_2, x_3 : P(x_1, x_2, x_3)$$

π.χ. $P(p,q,r) =$

$$\overset{q \to p}{(p \lor \neg q)} \land \overset{r \to q}{(q \lor \neg r)} \land \overset{p \to r}{(r \lor \neg p)} \land \neg p \land q$$

→ $p = q = r = 1$

→ $p = q = r = 0$

→ F

<u>Sudoku</u>

Ορίζουμε μεταβλητές $x_{ijv} \in \{T, F\}$

Αν $x_{ijv} = T \Rightarrow$ στη θέση (i,j)

η τιμή είναι v

$x_{173} = T$ $(1,7)$ έχει τιμή 3

• Στην 1 γραμμή υπάρχει ο αριθμος 1

$$\underbrace{x_{111} \vee x_{121} \vee x_{131} \vee x_{141} \vee \ldots \vee x_{191}}_{\overset{9}{\underset{j=1}{\bigvee}} x_{1j1}}$$

Για κάθε $i, v \in \{1, \ldots, 9\}$

$\exists j : x_{ijv}$

$$\exists j : x_{ijv} \equiv \bigvee_{j=1}^{9} x_{ijv}$$

$$\bigwedge_{i=1}^{9} \bigwedge_{v=1}^{9} \left(\bigvee_{j=1}^{9} x_{ijv} \right)$$

- Για καθε στήλη j, για κάθε τιμή v

  $\exists i : x_{ijv}$

- Για κάθε 3×3 τετράγωνο T

  και κάθε τιμή v

  $\exists (i,j) \in T : x_{ijv}$

- Σε κάθε κελί ij να υπάρχει

  μοναδικο v ώστε x_{ijv}

  $\exists ! v : x_{ijv}$

Για κάθε ij

και κάθε v, v' όπου $v \neq v'$

$\neg x_{ijv} \vee \neg x_{ijv'}$

Ποσοτικοποίηση 2 ή περισσότερων μεταβλητών

$$\forall x \left(\forall y \quad P(x,y) \right) \equiv \forall y \ \forall x \quad P(x,y)$$

αληθής αν για κάθε ζεύγος (x,y) ισχύει

$$\exists x \ \exists y \ P(x,y) \equiv \exists y \ \exists x \ P(x,y)$$

$$\forall x \left(\exists y \quad P(x,y) \right)$$

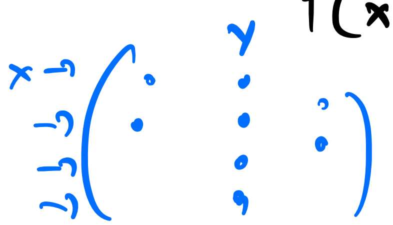
αληθής αν για κάθε x υπάρχει y

$$\not\equiv$$

ενώ

$$\exists y \left(\forall x \quad P(x,y) \right)$$

αληθής αν υπάρχει y (το ίδιο για όλα τα x) ώστε για κάθε x $P(x,y)$



π.χ. $\boxed{\forall x^{\in \mathbb{R}} \ \exists y, z^{\in \mathbb{R}} : \quad x = y + z}$

T γιατί $z = x - y$

αλλά

$\exists y, z \left(\forall x \quad x = y + z \right)$ ψευδής

όποια y και z

$$\left.\begin{aligned} x &= y + z \\ \text{πρέπει και} \quad x + 1 &= y + z \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1 = 0$$

$\exists y \ \forall x \quad xy = 0$

$$\underbrace{\forall x^{\in \mathbb{R} \neq 0} \ \exists y^{\in \mathbb{R} \neq 0} \quad xy = 1}_{|||}$$

Πρόταση: Κάθε πραγματικός αριθμός $x \neq 0$ έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο

η άρνηση

$$\exists x \quad \forall y \qquad xy \neq 1$$

$$\neg \left(\forall_{x}^{\in \mathbb{R}_{\neq 0}} \exists y \qquad xy = 1 \right) \equiv$$

$$\exists x \quad \neg \left(\exists y \qquad xy = 1 \right) \equiv$$

$$\exists x \quad \forall y \qquad xy \neq 1$$

Πρόταση: $\forall\ n \in \mathbb{N}_{>0} \quad \exists$ πρώτος p

τέτοιος ώστε

$$n < p \leq n! + 1$$

$n=1 \qquad 1 < p \leq 2$

$n=2 \qquad 2 < p \leq 1\cdot 2+1 = 3$

$n=4 \qquad 4 < p \leq 25 \rightarrow p=7$

Απόδειξη: Θα δείξω ότι για κάθε n υπάρχει κάποιος πρώτος p με $n<p\leq n!+1$

Αν $n!+1$ είναι πρώτος

τότε $p = \underbrace{n!+1}$

Αλλιώς

$\exists$ πρώτος q με $2 \leq q < n!+1$ που διαιρεί το $n!+1$

$\boxed{\text{Θ.δ.ο. } q > n}$

Έστω ότι $2 \leq q \leq n$

τότε το q διαιρεί το $n!$

αλλά το q διαιρεί το $n!+1$

άτοπο

Άρα θάλω $p = q$ $\square$

Το $p \leq n! + 1$

και $p > n$

<u>Ορισμος</u>

Επιχείρημα είναι μια ακολουθία προτάσεων

η τελική πρόταση λέγεται συμπέρασμα

Ορθά επιχειρήματα / Κανόνες

- Modus Ponens

$$\underbrace{p} \wedge \underbrace{(p \to q)} \to q$$

- Modus Tollens

$$(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$$

$$\begin{array}{l} \neg q \\ \underline{p \to q} \\ \therefore \quad \neg p \end{array}$$

- Υποθετικός συλλογισμός

$$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$$

- Διαζευκτικός συλλογισμός

$$(p \vee q) \wedge \neg p \to q$$

- Επίλυση

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \to (q \vee r)$$

$$(\neg p \to q) \wedge (p \to r) \to (q \vee r)$$

π.χ. — Δεν έχει ήλιο σήμερα και
Ν.δ.ο. ο καιρός είναι κρύος

— Θα πάμε για μπάνιο μόνο αν
έχει ήλιο

$\Rightarrow$ Δεν θα πάμε για μπάνιο

$H \equiv$ "Έχει ήλιο σήμερα"

$K \equiv$ "Ο καιρός είναι κρύος"

$M \equiv$ "Θα πάμε για μπάνιο

$$\boxed{\begin{array}{l} (\neg H \wedge K) \\ M \rightarrow H \\ \hline \therefore \quad \neg M \end{array}}$$

από Modus Tollens

Καθολικοί ποσοδείκτες

- Καθολική Εφαρμογή

$\forall x : P(x) \Rightarrow P(c)$ ισχύει για μια τιμή c στο πεδίο ορισμού

- Υπαρξιακή γενίκευση

Αν ισχύει το $P(c)$ για κάποιο c

τότε $\exists x : P(x)$

- Υπαρξιακή εφαρμογή

Αν ισχύει $\exists x: P(x)$ τότε ισχύει το $P(c)$ για κάποιο c που δεν γνωρίζω αναγκαία ποιο είναι

Π.χ. - Όσοι είναι στο 1ο έτος παρακολουθούν Διακριτά

- Η "Μ" είναι στο 1ο έτος

$\Rightarrow$ Η "Μ" παρακολουθεί Διακριτά

$p(x)$: "Ο x είναι στο 1ο έτος"

$q(x)$: "Ο x παρακολουθεί Διακριτά"

- $\forall x : p(x) \to q(x)$
- $p(\text{"M"})$

$\therefore \quad q(\text{"M"})$

καθολική εφαρμογή

$p(\text{"M"}) \to q(\text{"M"})$

$p(\text{"M"})$

$q(\text{"M"})$

από Modus Ponens

Απόδειξη μιας μαθηματικής πρότασης P

Τεκμηρίωση της αλήθειας της P

με βάση κάποια αξιώματα ή υποθέσεις

Y

$Y \to P$

Μέθοδοι Αποδείξεων

- Ευθεία απόδειξη

$Y \to Q \to P$

Αρκεί να δείξω και ισοδυναμίες

$Y \leftrightarrow Q \leftrightarrow P$

π.χ. $\forall n$ περιττός ακέραιος, n^2 είναι περιττός

n περιττός $\Rightarrow \exists \lambda$ ακέραιος : $n = 2\lambda + 1$

$$\Rightarrow n^2 = (2\lambda+1)^2 = 4\lambda^2 + 4\lambda + 1$$

$$= 2\underbrace{(2\lambda^2 + 2\lambda)} + 1$$

$\Rightarrow \exists k$ ακέραιος : $n^2 = 2k + 1$

$\Rightarrow n^2$ είναι περιττός $\square$

- Έμμεση απόδειξη / απαγωγή σε άτοπο

$\neg P \rightarrow \dots \rightarrow \neg Y$ (αντιθετοαντίστροφος)

Π.χ. $\forall\, n$ ακέραιος : n^2 είναι περιττός

$\to$ n περιττός

Απόδειξη

Με ευθεία n^2 περιττός

$\Rightarrow$ $n^2 = 2\kappa + 1$ για κάποιο κ

$\Rightarrow$ $n = \sqrt{2\kappa+1}$???

Με άτοπο : Έστω n όχι περιττός (άρτιος)

$\Rightarrow$ $n = 2\lambda$ για κάποιο ακέραιο λ

$\Rightarrow$ $n^2 = 4\lambda^2 = 2(2\lambda^2)$

$\Rightarrow$ $n^2 = 2\kappa$ για κάποιο ακέραιο κ

$\Rightarrow$ n^2 άρτιος άτοπο γιατί n^2 περιττός

$\square$

- Υπαρξιακή απόδειξη ή αντιπαράδειγμα

π.χ. $\forall n \in \mathbb{N}$: n γράφεται ως άθροισμα τριών τετραγώνων ακεραίων

$1 = 1^2 + 0^2 + 0^2$

$2 = 1^2 + 1^2 + 0^2$

$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$

$4 = 2^2 + 0 + 0$

$5 = 2^2 + 1^2 + 0$

...

$\boxed{7 = x^2 + y^2 + z^2}$

$x^2, y^2, z^2 \in \{0, 1, 4\}$

$12 = 2^2 + 2^2 + 2^2$

$\boxed{15 = 3^2 + 2^2}$

Το 7 δεν μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα τριών αριθμών στο $\{0, 1, 4\}$.

- Επαγωγή: $\forall n \geq n_0$, $P(n)$

  Αρκεί να δείξω $P(n_0)$ αληθές

  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Στρατηγικές Αποδείξεων

1a Απαρίθμηση περιπτώσεων / Εξαντλητική απόδειξη

Για να δείξω ότι

$$p_1 \lor p_2 \lor \dots \lor p_n \to q$$

αρκεί να δείξω

$$p_1 \to q$$

$$p_2 \to q$$

$$\vdots$$

$$p_n \to q$$

Π.χ. $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2 \geq n$

Ισοδύναμα $(n<0) \lor (n>0) \lor (n=0) \Rightarrow n^2 \geq n$

- Περίπτωση $n=0$ τότε $0^2 = 0$ ✓
- Περίπτωση $n>0$ τότε $n \geq 1 \Rightarrow n^2 \geq n$ ✓
- Περίπτωση $n<0$ τότε $n^2 \geq 0 \Rightarrow n^2 \geq 0 > n$

✓

☐

16 Αντίστροφος συλλογισμός

$Y \to P$ αρκεί $P \Leftarrow Q \Leftarrow Y$

Π.χ. Για θετικούς ακεραίους x, y με $x \neq y$ ο αριθμητικός μέσος (ΑΜ) είναι μεγαλύτερος από το γεωμετρικό μέσο (ΓΜ)

$AM : \frac{x+y}{2}$ $x=3$, $y=5$

$\Gamma M : \sqrt{x \cdot y}$ $AM = \frac{3+5}{2} = 4$, $\Gamma M = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15} < \sqrt{16} = 4$

$AM > \Gamma M \Leftarrow \frac{x+y}{2} > \sqrt{x \cdot y}$

$\Leftarrow \frac{(x+y)^2}{4} > x \cdot y$

$\Leftrightarrow \quad x^2+2xy+y^2>4x\cdot y$

$\Leftrightarrow \quad x^2-2x\cdot y+y^2>0$

$\Leftrightarrow \quad (x-y)^2>0$

ισχύει γιατί
$x\neq y$

2. Εις άτοπο απαγωγή

π.χ. Ν.δ.ο. $\sqrt{2}\notin \mathbb{Q}$ δηλ. άρρητος

Απόδειξη Έστω $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$

$\Rightarrow \exists\, a,b\in\mathbb{N}$ με $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$

$\Rightarrow \exists\, a,b\in\mathbb{N}$ όπου $\text{ΜΚΔ}(a,b)=1$

$\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ (ελάχιστων όρων)

$\frac{10}{15}=\frac{2\cdot\cancel{5}}{3\cdot\cancel{5}}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \sqrt{2}^2 = \frac{a^2}{b^2}$

$\Rightarrow \quad 2b^2 = a^2$

Αν ο a περιττός, άτοπο γιατι $2b^2$ είναι άρτιος

Αν ο a άρτιος, $2b^2 = (2\lambda)^2$
$(a = 2\lambda)$

$= 4\lambda^2$

$\Rightarrow \quad b^2 = 2\lambda^2$

$\Rightarrow \quad b^2$ άρτιος

$\Rightarrow \quad b$ άρτιος

άτοπο γιατι $\frac{a}{b}$ ελαχίστων όρων

$\square$

π.χ. Αν έχουμε τουλάχιστον 37 άτομα υπάρχουν 4 άτομα που έχουν γεννηθεί τον ίδιο μήνα.

Απόδειξη: Έστω ότι δεν ισχύει

δηλαδή υπάρχουν το πολύ 3 άτομα για κάθε μήνα

$\Rightarrow$ Η ομάδα θα έχει το πολύ

$3 \times 12 = 36$ άτομα

Άτοπο γιατί έχουμε 37 άτομα. $\square$

3. Υπαρξιακή απόδειξη

$\exists x : P(x)$

- κατασκευαστικές:

π.χ. $\exists\, x \in \mathbb{N}$ που γράφεται ως άθροισμα 2 κύβων με 2 τρόπους

$$1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$$

- Μη κατασκευαστικές

π.χ. Ν.δ.ο. $\exists\, x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} :$
$x^y \in \mathbb{Q}$

Ξέρουμε
$\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Εστω $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

- Αν είναι ρητός ✓

$x = \sqrt{2}$ $y = \sqrt{2}$

- Αν είναι άρρητος

$x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ $y = \sqrt{2}$

$x^y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q}$

$\square$

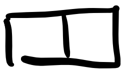
Ν.δ.ο. $\nexists\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ τ.ω. $n^3 + n^2 = 100$

Αν $n \geq 5$ $n^2 + n^3 \geq 5^3 + 5^2 = 125 + 25$

$= 150 > 100$

Αν $n \leq 4$ $n^2 + n^3 \leq 4^2 + 4^3 = 16 + 64 = 80 < 100$

Ντομινο στη σκακιέρα



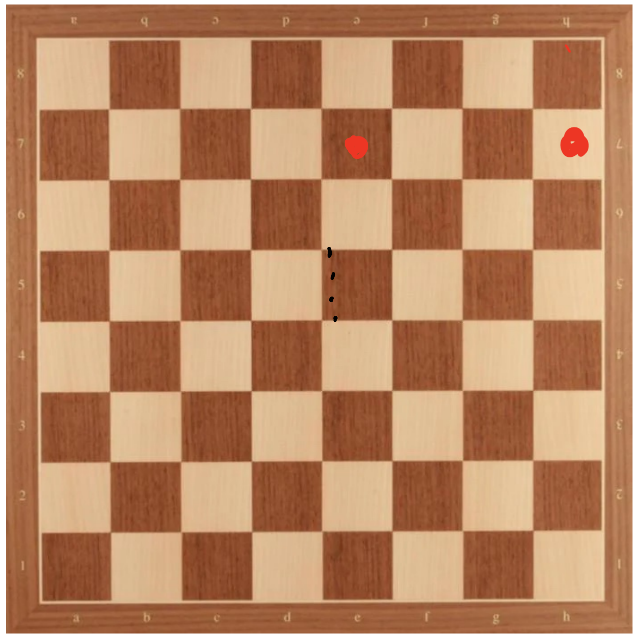
Ν.δ.ο. μπορώ να

καλύψω τη σκακιέρα

με ντόμινο 2×1

Απόδειξη Υπαρξιακή με κατασκευή

8



8

Εξετάστε αν μπορώ να καλύψω τη σκακιέρα

αν λείπει ένα τετράγωνο

Απόδειξη Δεν γίνεται κάθε κάλυψη καλύπτει

ζυγό αριθμό κελιών ενώ έχουμε

η σκακιέρα έχει 63 κελιά

(μονός αριθμός)