

Διακριτά Μαθηματικά

Πύρρος Χάιδος
Γιάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών, ΕΚΠΑ
<http://eclass.uoa.gr/courses/D268/>

Οκτώβριος 2026

Διαφάνειες: Γ. Εμίρης, Γ. Χαμόδρακας, Π. Χάιδος

Σύνολα, Συναρτήσεις, Ακολουθίες

Πράξεις συνόλων

Συναρτήσεις

Πληθικός αριθμός Συνόλου

Ακολουθίες, αθροίσματα

Σύνολα και Συναρτήσεις

Rosen, Κεφ. 2

Ορισμός συνόλου [Rosen 2.1]

Σύνολο είναι μια συλλογή διακεκριμένων (δηλ. διαφορετικών) αντικειμένων.

Π.χ. $\{\alpha, \beta\}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$, $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Π.χ. $A = \{a \in \mathbb{R} : 0 \leq a \leq 1\}$.

Π.χ. $\{1, 2, 4, 8, 16, \dots\} = \{x = 2^k : k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Τα αντικείμενα που συνθέτουν το σύνολο καλούνται **στοιχεία ή μέλη** του συνόλου. Συμβολίζουμε $a \in \{a, b\}$, $c \notin \{a, b\}$.

Ενα οποιοδήποτε αντικείμενο είτε ανήκει σε δεδομένο σύνολο είτε δεν ανήκει (αλλά ποτέ και τα δύο).

Τρόπος ορισμού

Ενα σύνολο ορίζεται

- ▶ με απαρίθμηση όλων των στοιχείων του, π.χ. $A = \{1, 2, 3\}$,
- ▶ με περιγραφή των στοιχείων του, π.χ.
 $A = \{\alpha \in \mathbb{Z} : 1 \leq \alpha \leq 3\}$,
- ▶ μέσω πράξεων σε σύνολα που έχουμε ήδη ορίσει (π.χ. ένωση, τομή). Π.χ. $A = \mathbb{Z} \cap [0.5, 3.14]$.

Τα **στοιχεία** ενός συνόλου:

- ▶ δεν επαναλαμβάνονται, δηλ. το $\{\alpha, \alpha, \beta\}$ ΔΕΝ έχει νόημα (εκτός απο ειδικές περιπτώσεις),
- ▶ δεν είναι ταξινομημένα, δηλ. $\{\alpha, \beta\} = \{\beta, \alpha\}$,
- ▶ μπορεί να είναι διαφορετικού είδους, ακόμη και σύνολα, π.χ. το $\{\alpha, 1, \frac{3}{4}, \{K, \Gamma\}, \{\}, \text{"Περσεφόνη"}\}$ έχει 6 στοιχεία.

Ορισμός ένωσης και τομής συνόλων [Rosen 2.2]

$$P \cup Q := \{a : a \in P \text{ ή } a \in Q\},$$

$$P \cap Q := \{a : a \in P \text{ και } a \in Q\}.$$

$$\text{Π.χ. } \{\alpha, \beta\} \cup \{\alpha, \mathbf{c}\} = \{\alpha, \beta, \mathbf{c}\}, \quad \{\alpha, \beta\} \cap \{\alpha, \mathbf{c}\} = \{\alpha\}, \\ \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\} \cap \{a : a = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\} = \emptyset.$$

Επέκταση ορισμών ένωσης/τομής σε οποιοδήποτε (ακόμη και άπειρο) πλήθος συνόλων, π.χ. $A_i := \{i\}, \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = \mathbb{N}$.

Υποσύνολα

Ορισμός.

Ένα σύνολο P καλείται **υποσύνολο** του Q , και συμβολίζεται $P \subseteq Q$ αν $\forall p \in P$ ισχύει πως $p \in Q$.

Π.χ. $\{\alpha\} \subseteq \{\alpha, \beta\}$, $\{\alpha, c\} \not\subseteq \{\alpha, \beta\}$.

Παρατήρηση.

- ▶ Για κάθε σύνολο A , ισχύει $A \subseteq A$.
- ▶ Μπορεί να ισχύει $A \subseteq B$ και $A \in B$, π.χ.
 $A = \{\alpha, \beta\}$, $B = \{\alpha, \beta, \{\alpha, \beta\}\}$.

Γνήσιο υποσύνολο $A \subset B$ καλείται το υποσύνολο A αν $A \neq B$.
Ισοδύναμα, $A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \ \& \ A \neq B)$.

Ισότητα Συνόλων

Ορισμός.

$P = Q$ αν τα δύο σύνολα περιέχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

Ορισμός.

$P = Q \Leftrightarrow (P \subseteq Q \ \& \ Q \subseteq P) \Leftrightarrow (p \in P \Leftrightarrow p \in Q).$

Π.χ. $\{a \in \mathbb{R} : 0 \leq a \leq 1\} = [0, 1].$

Π.χ. $\{1, 2, 4, 8, 16 \dots\} = \{x = 2^k : k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$

Π.χ. $\{\alpha, \beta\} \neq \{\alpha, \beta, \emptyset\}.$

Παράδειγμα

Ερώτηση. Υπάρχουν σύνολα A, B τ.ω. $A \in B$ και $A \subseteq B$?

Απάντηση. Ναι: $B = \{A\} \cup A = \{A, a_1, \dots, a_n\}$
όπου $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Π.χ. $A = \{1\}, B = \{\{1\}, 1\}$: $A \in B, A \subseteq B$.

Π.χ. $A = \{1\}, B = \{\{1\}, \{\{1\}\}\}$: $A \in B, A \not\subseteq B$.

Κενό σύνολο

Ορισμός.

Κενό καλείται το σύνολο $\{\}$, που δεν περιέχει κανένα στοιχείο, συμβολίζεται με $\emptyset$. Ισοδύναμα, για κάθε a ισχύει $a \notin \emptyset$.

Παράδειγμα: $\{x \in \mathbb{Q} | x^2 - 2 = 0\} = \emptyset$

Θεώρημα.

$\emptyset \subseteq P$, για κάθε σύνολο P .

Απόδειξη: Ο ορισμός του υποσυνόλου ικανοποιείται τετριμμένα.

Ασκ. ΔΕΝ ισχύει πως, για κάθε σύνολο P , $\emptyset \in P$.

Απόδειξη με αντιπαράδειγμα: Υπάρχει σύνολο $\{\alpha, \beta\}$ όπου δεν ανήκει το $\emptyset$.

Πληθικός αριθμός συνόλου

Αν ένα σύνολο S περιέχει **ακριβώς** n στοιχεία και $n \in \mathbb{N}$, τότε λέμε ότι είναι πεπερασμένο και έχει πληθικό αριθμό $|S| = n$.

Διαφορετικά, λέμε ότι το S είναι άπειρο.

Π.χ. $|\{\alpha, \beta\}| = 2$, $|[0, 1]|$ είναι άπειρο, $|\emptyset| = 0$.

Για τον πληθικό αριθμό του S χρησιμοποιούμε και την γραφή $\#S$.

Αν $|A| \in \mathbb{N}$, τότε το A είναι **πεπερασμένο**.

Αλλιώς (αν $|A|$ άπειρο), το A είναι **μη πεπερασμένο** (ισοδ. άπειρο).

Π.χ. το $\mathbb{R}$ είναι μη πεπερασμένο.

Π.χ. το $\{\mathbb{R}\}$ είναι πεπερασμένο με πληθικό αριθμό $= 1$.

Καρτεσιανό γινόμενο

Το **Καρτεσιανό γινόμενο** δύο συνόλων ονομάζεται το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (a, b) , όπου $a \in A$ και $b \in B$. Ορίζεται ως εξής:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Ο πληθικός του αριθμός είναι το γινόμενο των πληθικών αριθμών:
 $|A| \cdot |B|$.

Π.χ. $\{a, b\} \times \{c\} = \{(a, c), (b, c)\} \neq \{c\} \times \{a, b\}$ αν και
αμφότερα έχουν πληθικό αριθμό $= 2$.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ είναι το καρτεσιανό επίπεδο, $A \times \emptyset = \emptyset$, $\forall A$.

Δυναμοσύνολο

Ορισμός.

Δεδομένου συνόλου A , το **δυναμοσύνολο** του A είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A και συμβολίζεται $P(A)$ ή 2^A :

$$P(A) := \{B : B \subseteq A\}.$$

Π.χ. $P(\emptyset) = \{\emptyset\}.$

Π.χ. $P(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$

Π.χ. $A = \{a, b, c\} \Rightarrow 2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{c, b\}, \{a, c\}, A\}.$

Π.χ.

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2^A &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \\ &\quad \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \\ &\quad \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, A\}. \end{aligned}$$

Πληθικός αριθμός δυναμοσυνόλου

Θεώρημα.

$$|P(A)| = 2^{|A|}.$$

Θα αποδειχτεί με επαγωγή αργότερα.

- ▶ Κάθε στοιχείο του $P(A)$ αντιστοιχεί σε μια επιλογή στοιχείων του A . Κάθε επιλογή αντιστοιχεί σε μια αντιστοίχιση $A \rightarrow \{0, 1\}$.
Υπάρχουν $2^{|A|}$ διαφορετικές αντιστοιχίσεις/απεικονίσεις.
- ▶ Εναλλακτικά, όπου $n = |A|$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1 + 1)^n = 2^n.$$

Γι'αυτό χρησιμοποιείται ο συμβολισμός 2^A .

Σύνολα, Συναρτήσεις, Ακολουθίες

Πράξεις συνόλων

Συναρτήσεις

Πληθικός αριθμός Συνόλου

Ακολουθίες, αθροίσματα

Ορισμός ένωσης και τομής συνόλων [Rosen 2.2]

$$P \cup Q := \{a : a \in P \text{ ή } a \in Q\},$$

$$P \cap Q := \{a : a \in P \text{ και } a \in Q\}.$$

$$\text{Π.χ. } \{\alpha, \beta\} \cup \{\alpha, \mathbf{c}\} = \{\alpha, \beta, \mathbf{c}\}, \quad \{\alpha, \beta\} \cap \{\alpha, \mathbf{c}\} = \{\alpha\}, \\ \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\} \cap \{a : a = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\} = \emptyset.$$

Επέκταση ορισμών ένωσης/τομής σε κάθε "μετρήσιμο" (ακόμη και άπειρο) πλήθος συνόλων, π.χ. $A_i := \{i\}$, $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = \mathbb{N}$.

Ιδιότητες ένωσης και τομής συνόλων

- ▶ $\forall A, A \cup A = A, A \cap A = A,$
- ▶ $A \subseteq B \Rightarrow (A \cup B = B, A \cap B = A),$
- ▶ $A \subseteq A \cup B, A \cap B \subseteq A, \forall B,$
- ▶ $A, B \subseteq C \Rightarrow A \cap B \subseteq A \cup B \subseteq C,$
 $(A \subseteq B, A \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq B \cap C \subseteq B \cup C.$

Διαφορά (συμπλήρωμα) συνόλων

Διαφορά. $P - Q := \{p \in P : p \notin Q\}$, ή $P \setminus Q$.

Καλείται και **συμπλήρωμα** του Q ως προς το P .

Για το σύμπαν (ή σύνολο αναφοράς) Ω , το σύνολο

$$\overline{A} := \Omega - A$$

καλείται απλώς συμπλήρωμα του A .

Ιδιότητες: $A - \emptyset = A$, $A - A = \emptyset$.

Π.χ. $\{a, b\} - \{a, d\} = \{b\}$, $\{a, b\} - \{a, b, d\} = \emptyset$.

Συμμετρική διαφορά συνόλων

Συμμετρική διαφορά. $P \oplus Q := \{p \in P \cup Q : p \notin P \cap Q\}$.

Αντιστοιχεί στην αποκλειστική διάζευξη προτάσεων (xor).

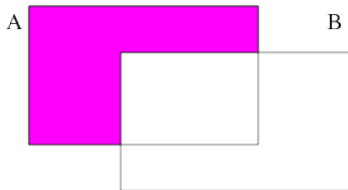
Αντιμεταθετικότητα: $P \oplus Q = Q \oplus P$.

Θεώρημα. $P \oplus Q = (P \cup Q) - (P \cap Q) = (P - Q) \cup (Q - P)$.

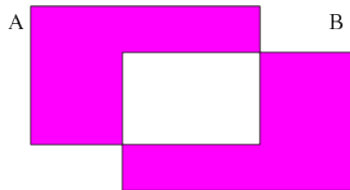
Π.χ. $\{a, b\} \oplus \{a, d\} = \{b, d\}$, $\{a, b\} \oplus \{a, b, d\} = \{d\}$.

Διαγράμματα Venn διαφορών

$$A - B$$



$$A \oplus B.$$



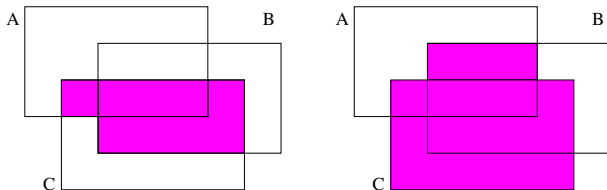
Ιδιότητες ένωσης και τομής συνόλων

Οι πράξεις ένωσης και τομής

- ▶ είναι **προσεταιριστικές**, δηλ.
$$A_1 \cup (A_2 \cup (\dots (A_{k-1} \cup A_k) \dots)) = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k,$$
$$A_1 \cap (A_2 \cap (\dots (A_{k-1} \cap A_k) \dots)) = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k,$$
- ▶ είναι **αντιμεταθετικές**, δηλ. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$,
- ▶ έχουν **ουδέτερο** στοιχείο: $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \Omega = A$, όπου το σύμπαν Ω (σύνολο αναφοράς) εξαρτάται από την συγκεκριμένη εφαρμογή,
- ▶ είναι **επιμεριστική** η μία ως προς την άλλη, δηλ.
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Επιμεριστικότητα

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$



Διαγράμματα Venn.

$$(P \cup Q) \cap R = (P \cap R) \cup (Q \cap R)$$

Απόδειξη.

Εστω $A := (P \cup Q) \cap R$,

$B_1 := P \cap R, B_2 := Q \cap R, B := B_1 \cup B_2$.

Πρέπει να δείξουμε $A = B$.

$[B \subseteq A]$

$B_1 \subseteq P \Rightarrow B_1 \subseteq P \cup Q, B_1 \subseteq R$ άρα $B_1 \subseteq A$.

Ομοίως $B_2 \subseteq A$. Συνεπώς $B = B_1 \cup B_2 \subseteq A$.

$[A \subseteq B]$

$a \in A \Rightarrow a \in P \cup Q \& a \in R$.

Αν $a \in P$, επειδή $a \in R$, έπεται $a \in P \cap R$.

Αλλιώς $a \notin P$, κι επειδή $a \in P \cup Q, a \in Q$; άρα $a \in Q \cap R$.

Τελικά, $a \in B$ άρα $A \subseteq B$.

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\begin{aligned}\overline{A \cap B} &= \{x : x \notin A \cap B\} \\ &= \{x : \neg(x \in A \cap B)\} \\ &= \{x : \neg(x \in A \wedge x \in B)\} \\ &= \{x : \overline{x \in A} \vee \overline{x \in B}\} \text{ [De Morgan]} \\ &= \{x : (x \notin A) \vee (x \notin B)\} \\ &= \{x : (x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{B})\} \\ &= \{x : x \in \overline{A} \cup \overline{B}\} \\ &= \overline{A} \cup \overline{B}\end{aligned}$$

Αναπαράσταση συνόλων στον υπολογιστή

Έστω $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$. Μπορώ να αναπαραστήσω κάθε υποσύνολο $A \subset \Omega$ ως μία συμβολοσειρά από **bits**.

Π.χ. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$
$\{1, 3, 4\}$	$\Rightarrow$ 1 0 1 1 0
$\{2, 3\}$	$\Rightarrow$ 0 1 1 0 0
$\emptyset$	$\Rightarrow$ 0 0 0 0 0

$$\{1, 3, 4\} \cap \{2, 3\} \rightarrow (10110)_{(2)} \& (01100)_{(2)} = (00100)_{(2)} \rightarrow \{3\}$$

$$\{1, 3, 4\} \cup \{2, 3\} \rightarrow (10110)_{(2)} \parallel (01100)_{(2)} = (11110)_{(2)} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$$

Σύνολα, Συναρτήσεις, Ακολουθίες

Πράξεις συνόλων

Συναρτήσεις

Πληθικός αριθμός Συνόλου

Ακολουθίες, αθροίσματα

Συναρτήσεις [Rosen 2.3]

Ορισμός.

Σχέση ανάμεσα σε δύο σύνολα A, B είναι ένα υποσύνολο του $A \times B$.

Μια σχέση D είναι **συνάρτηση** αν είναι μονοσήμαντη, δηλαδή

$$\forall a \in A, \exists! b \in B : (a, b) \in D$$

ή (αναλύουμε το $\exists!$)

$$\forall a \in A, \exists b \in B, \forall c \in B : (a, b) \in D \wedge ((a, c) \in D \rightarrow c = b)$$

Δηλ. πρόκειται για μια **μονοσήμαντη** απεικόνιση του A στο B .

Το A καλείται πεδίο ορισμού και το B πεδίο τιμών.

Αν $f(a) = b \in B$ τότε το b καλείται εικόνα του a .

Συναρτήσεις [Rosen 2.3]

Ορισμός.

Ισοδύναμα, συνάρτηση $A \rightarrow B$ καλείται μια ανάθεση ακριβώς ενός στοιχείου του B σε κάθε στοιχείο του A .

Δηλ. πρόκειται για μια **μονοσήμαντη** απεικόνιση του A στο B .

Το A καλείται πεδίο ορισμού και το B πεδίο τιμών.

Αν $f(a) = b \in B$ τότε το b καλείται εικόνα του a .

Είδη συναρτήσεων

Η συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ είναι **επί** αν $\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$.

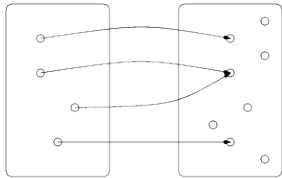
Η συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ είναι **1-1** αν $a \neq a' \in A \Rightarrow f(a) \neq f(a')$.

Κάθε συνάρτηση που είναι **1 – 1** και **επί** ονομάζεται **αμφιμονοσήμαντη**. Οπότε και ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση στο $f(A)$:

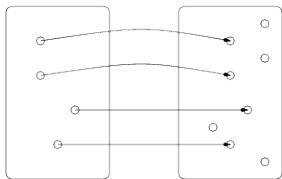
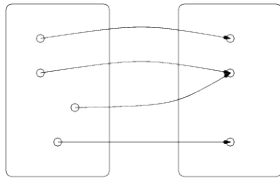
$$f^{-1} : f(A) \rightarrow A : f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow b = f(a).$$

Παραδείγματα συναρτήσεων

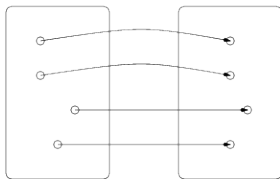
Συνάρτηση



Επί



1-1



1-1 και επί

Αντιστροφή και Σύνθεση

Ορισμός.

Εστω αμφιμονοσήμαντη $f : A \rightarrow B$. Η αντίστροφη είναι μια νέα συνάρτηση $f^{-1} : B \rightarrow A$ τ.ώ. $f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$.

Ορισμός.

Εστω συναρτήσεις $g : A \rightarrow B, f : B \rightarrow C$. Η σύνθεση των f και g είναι μια νέα συνάρτηση

$$f \circ g : A \rightarrow C : (f \circ g)(a) = f(g(a)).$$

Δάπεδο, Οροφή, Παραγοντικό

Ακέραιο μέρος ή δάπεδο:

$$x \in \mathbb{R} \rightarrow \lfloor x \rfloor = a \in \mathbb{Z} \text{ ανν } \max_{\mathbb{Z}} \{a \leq x\}.$$

$$\text{Π.χ. } \lfloor 3.5 \rfloor = 3, \lfloor -0.5 \rfloor = -1.$$

Οροφή: $x \in \mathbb{R} \rightarrow \lceil x \rceil = a \in \mathbb{Z} \text{ ανν } \min_{\mathbb{Z}} \{a \geq x\}.$

$$\text{Π.χ. } \lceil 3.5 \rceil = 4, \lceil -0.5 \rceil = 0.$$

Παραγοντικό: $n \in \mathbb{N} \rightarrow n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n.$

Stirling: $n! \sim \sqrt{2\pi n} (n/e)^n.$

Σύνολα, Συναρτήσεις, Ακολουθίες

Πράξεις συνόλων

Συναρτήσεις

Πληθικός αριθμός Συνόλου

Ακολουθίες, αθροίσματα

Πληθικός αριθμός συνόλου [Rosen 2.5]

- ▶ Είχαμε ορίσει πληθικότητα ενός πεπερασμένου συνόλου το πλήθος των στοιχείων του. Θα επεκτείνουμε την έννοια στα μη πεπερασμένα σύνολα.
- ▶ Τα σύνολα A και B έχουν την ίδια πληθικότητα, αν και μόνον αν (ανν) υπάρχει μία αντιστοιχία (συνάρτηση και αντίστροφη) ανάμεσα στο A και το B , δηλ. συνάρτηση $A \rightarrow B$ ένα-προς-ένα και επί, οπότε γράφουμε $|A| = |B|$.
- ▶ Αν υπάρχει μία συνάρτηση ένα-προς-ένα από το A στο B , τότε $|A| \leq |B|$. Αν επιπλέον τα A και B έχουν διαφορετική πληθικότητα, τότε $|A| < |B|$.

Πεπερασμένα σύνολα

Ορισμός.

Το σύνολο A καλείται **πεπερασμένο** αν ο πληθικός του αριθμός είναι πεπερασμένος. Αλλιώς καλείται **άπειρο**.

Π.χ: πεπερασμένο: $\{\alpha, \beta\}$, άπειρο: $\mathbb{Z}$.

Θεώρημα.

Το A είναι πεπερασμένο αν $\exists M \subseteq \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{N}$ και υπάρχει **1-1** συνάρτηση $f : A \rightarrow M : [\forall n \in M, b \geq n]$.

Δηλαδή (i) υπάρχει **1-1** απεικόνιση από το A σε κάποιο M και (ii) υπάρχει ένας συγκεκριμένος φυσικός b που είναι άνω φράγμα για όλα τα στοιχεία του M .

Π.χ. Για να δείξω ότι το σύνολο $S = \{\square, \dagger\}$ είναι πεπερασμένο, επιλέγω $M = \{1, 2, 3, 4\}$, $f : \{\square, \dagger\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ με $f(\square) = 4, f(\dagger) = 2$ και $b = 67$.

Γενικά, $b \geq |A|$, εφόσον $M \subset \mathbb{N}^*$.

Αριθμήσιμα (Μετρήσιμα) σύνολα

Ορισμός.

Το A είναι **αριθμήσιμο** αν $\exists$ **1-1** συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{N}$.

Π.χ. $\{ \text{περιττοί φυσικοί αριθμοί} \} \rightarrow \mathbb{N} : 2k + 1 \mapsto k \geq 0$.

Θεώρημα.

Το $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη.

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} : \begin{cases} x \mapsto 2x, & \text{αν } x \geq 0, \\ x \mapsto -2x - 1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Η f είναι συνάρτηση δηλαδή μία μονοσήμαντη απεικόνιση στο $\mathbb{N}$.

Δείχνω πως είναι **1-1** ως εξής: Εστω $x \neq x'$:

- αν $x, x' \geq 0$, έστω $x > x' \Rightarrow 2x > 2x'$,
- αν $x, x' < 0$, έστω $x > x' \Rightarrow -2x - 1 < -2x' - 1$,
- αλλιώς $xx' \leq 0 \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ (άρτιος και περιττός).

Μη αριθμήσιμο σύνολο

Θεώρημα.

Το $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ είναι μη αριθμήσιμο. Ομοίως το $(0, 1) - \mathbb{Q}$.

Απόδειξη.

Διαγώνιο επιχείρημα (διαγωνιοποίηση), απαγωγή σε άτοπο.

Αριθμήσιμο $\Rightarrow$ τα στοιχεία του $(0, 1)$ ταξινομούνται:

$$a_1 = 0, \textcolor{red}{a}_{11} a_{12} a_{13} \dots$$

$$a_2 = 0, a_{21} \textcolor{red}{a}_{22} a_{23} \dots$$

$$a_3 = 0, a_{31} a_{32} \textcolor{red}{a}_{33} \dots$$

$\vdots$

χωρίς άπειρη ακολουθία μηδενικών: $0, 15000 \dots = 0, 14999 \dots$

(μπορούμε να εξαιρέσουμε τους ρητούς).

$$\text{Θέτω } b_i := \begin{cases} 9, & \text{αν } a_{ii} \in \{0, 1, \dots, 8\} \\ 1, & \text{αν } a_{ii} = 9 \end{cases} \Rightarrow b_i \neq a_{ii}$$

$b := 0, b_1 b_2 b_3 \dots \in (0, 1)$ αλλά $b \neq a_i, \forall i$: άτοπο.



Κατηγορίες συνόλων

Κατηγορίες:

- Πεπερασμένα σύνολα, π.χ. $\{\alpha, \beta\}, \emptyset$.
- Αριθμήσιμα, π.χ. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ (πλήθος $\aleph_0$).
- Μη αριθμήσιμα, π.χ. $(0, 1), \mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ (πλήθος $2^{\aleph_0}$).

Παρατήρηση. Αν το σύνολο A είναι πεπερασμένο τότε είναι και αριθμήσιμο.

Το αντίθετο δεν ισχύει, π.χ. $\mathbb{N}$.

Υπόθεση του Συνεχούς [Cantor]

Δεν υπάρχει σύνολο με πληθικό αριθμό ανάμεσα στον πληθικό αριθμό του $\mathbb{N}$ ($\aleph_0$) και του $\mathbb{R}$ ($\aleph_1$).

Σύνολα, Συναρτήσεις, Ακολουθίες

Πράξεις συνόλων

Συναρτήσεις

Πληθικός αριθμός Συνόλου

Ακολουθίες, αθροίσματα

Ακολουθίες [Rosen 2.6]

Ορισμός.

Ακολουθία ονομάζεται μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο των φυσικών αριθμών (πεπερασμένο ή όχι) σε ένα σύνολο S

$$f : A \subset \mathbb{N} \rightarrow S$$

Συχνά χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό a_n για να αναπαραστήσουμε την τιμή της ακολουθίας στον ακέραιο n , που ονομάζεται (n -οστός) όρος της ακολουθίας.

Π.χ. Αριθμητική πρόοδος $a, a + d, a + 2d, \dots, a + nd, \dots$

Π.χ. Γεωμετρική πρόοδος $a, ar, ar^2, \dots, ar^n, \dots$

Αναδρομικές σχέσεις

Εστω η ακολουθία $\{a_n\}$ με τύπο $a_n = \frac{1}{n}$. Οι πρώτοι όροι της ακολουθίας είναι:

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{1}{5}.$$

Μια ακολουθία ορίζεται από μια αναδρομική σχέση εφόσον **ο** όρος a_n εκφράζεται βάσει κάποιων από τους προηγούμενους όρους, δηλ. των $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, και μιας αρχικής συνθήκης.

Παράδειγμα η ακολουθία **Fibonacci**:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad f_0 = 0, f_1 = 1.$$

Κλειστή σχέση

Λύνοντας την αναδρομική σχέση με τις αρχικές συνθήκες, υπολογίζουμε μια ρητή **κλειστή** σχέση που εκφράζει τους όρους της ακολουθίας.

Π.χ. [Rosen, παράδ. 5]

$a_n = a_{n-1} + 3, n \geq 1, a_1 = 2$. Δύο τρόποι:

$$a_2 = 2 + 3$$

$$a_3 = 2 + (3 + 3)$$

$$a_4 = 2 + (3 + 3 + 3)$$

$$\vdots$$

$$a_n = 2 + 3(n - 1)$$

$$= 3n - 1.$$

$$a_n = a_{n-1} + 3$$

$$= a_{n-2} + (3 + 3)$$

$$= a_{n-3} + (3 + 3 + 3)$$

$$\vdots$$

$$= a_{n-(n-1)} + 3(n - 1)$$

$$= 3n - 1.$$

Αθροίσματα [Rosen 2.7]

Αν $a, r \in \mathbb{R}, r \neq 1$ τότε

$$\sum_{0 \leq j \leq n} ar^j = \sum_{j=0}^n ar^j = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$