Άσκηση 1

Δώστε ασυμπτωτική εκτίμηση $\Theta(\cdot)$ για τις παρακάτω συναρτήσεις:

- a) $f(n) = n\log(n^3 + 7) + (\log n)^5$
- b) $g(n) = (n + \log n)^3 - n^3$
- c) $h(n) = \dfrac{n^4 + 3n^2}{n+1} + 10n\log n$
- d) $p(n) = \log(n!) + n$

a. Για $n \geq 2$: $n^3 \leq n^3 + 7 \leq 2n^3$. Άρα

$$\log(n^3) \leq \log(n^3 + 7) \leq \log(2n^3) = \log 2 + 3 \log n,$$

οπότε $\log(n^3 + 7) = \Theta(\log n)$ και

$$n \log(n^3 + 7) = \Theta(n \log n).$$

Επίσης, από το λήμμα $(\ln n)^a = O(n^b)$ (άρα και $(\log n)^5 = O(n^{1/2})$), παίρνουμε $(\log n)^5 = O(n^{1/2})$, άρα $(\log n)^5 = O(n \log n)$. Συνεπώς

$$f(n) = \Theta(n \log n).$$

b. Ανάπτυξη:

$$(n + \log n)^3 - n^3 = 3n^2 \log n + 3n(\log n)^2 + (\log n)^3.$$

Οι δύο τελευταίοι όροι είναι $O(n^2 \log n)$ (π.χ. $n(\log n)^2 \leq n^2 \log n$ για n μεγάλο και $(\log n)^3 \leq n^2 \log n$ επίσης). Άρα

$$g(n) = \Theta(n^2 \log n).$$

- Κάνουμε διαίρεση:

$$\frac{n^4}{n+1} = n^3 - n^2 + n - 1 + \frac{1}{n+1}, \qquad \frac{3n^2}{n+1} = 3n - 3 + \frac{3}{n+1}.$$

Άρα

$$\frac{n^4 + 3n^2}{n+1} = n^3 - n^2 + 4n - 4 + \frac{4}{n+1} = \Theta(n^3).$$

Και $10n \log n = O(n^3)$, οπότε

$$h(n) = \Theta(n^3).$$

- Από την Άσκηση 13 $\log(n!) = \Theta(n \log n)$. Επίσης $n = O(n \log n)$, άρα

$$p(n) = \Theta(n \log n).$$

Άσκηση 2

Βρείτε μάρτυρες $c > 0$ και n_0 ώστε να αποδείξετε με τον ορισμό ότι:

a. $3n^2 + 7n + 5 = O(n^2)$
b. $n \log(n+1) = O(n \log n)$
c. $\log(n^2 + 1) = O(\log n)$

Λύση Άσκησης 2

a. Για $n \geq 1$: $7n \leq 7n^2$ και $5 \leq 5n^2$. Άρα

$$3n^2 + 7n + 5 \leq 15n^2.$$

Μάρτυρες: $c = 15$, $n_0 = 1$.

b. Για $n \geq 2$: $n + 1 \leq 2n$, άρα $\log(n+1) \leq \log(2n) = \log 2 + \log n$. Για $n \geq 2$ ισχύει $\log n \geq 1$, άρα $\log 2 \leq \log n$ και

$$\log(n+1) \leq 2\log n \quad \Rightarrow \quad n\log(n+1) \leq 2n\log n.$$

Μάρτυρες: $c = 2$, $n_0 = 2$.

c. Για $n \geq 1$: $n^2 + 1 \leq 2n^2$, άρα

$$\log(n^2+1) \leq \log(2n^2) = \log 2 + 2\log n.$$

Για $n \geq 2$: $\log 2 \leq \log n$, οπότε $\log(n^2+1) \leq 3\log n$. Μάρτυρες: $c = 3$, $n_0 = 2$.

Άσκηση 3

Ταξινομήστε σε αύξουσα σειρά ρυθμού αύξησης (να δικαιολογήσετε σύντομα):

$$(\log n)^7,\ \sqrt{n},\ n^{2/3},\ n\log n,\ n(\log n)^2,\ n^{1.1},\ 2^{\sqrt{\log n}},\ 2^{\sqrt{n}},\ 1.01^n,\ 2^n,\ n!$$

Ζητείται αλυσίδα της μορφής $f_1 = O(f_2) = O(\cdots) = O(f_k)$.

Λύση Άσκησης 3 (1/6): Στόχος

Θέλουμε αλυσίδα $f_1 \preceq f_2 \preceq \cdots \preceq f_k$ όπου $a \preceq b$ σημαίνει $a = O(b)$. Δίνονται:

$$(\log n)^7,\ \sqrt{n},\ n^{2/3},\ n \log n,\ n(\log n)^2,\ n^{1.1},\ 2^{\sqrt{\log n}},\ 2^{\sqrt{n}},\ 1.01^n,\ 2^n,\ n!$$

Χρήσιμα δεδομένα από τη θεωρία:

- $(\log n)^c = O(n^\varepsilon)$ για κάθε $c > 0$ και κάθε $\varepsilon > 0$.
- Αν $a < b$ τότε $n^a = O(n^b)$.
- $n^b = O(\alpha^n)$ για κάθε $\alpha > 1$.
- $\alpha^n = O(n!)$ για κάθε σταθερό α.

Λύση Άσκησης 3 (2/6): Από $(\log n)^7$ στο $2^{\sqrt{\log n}}$

Θέτουμε $t = \log n$ (βάση 2). Τότε

$$(\log n)^7 = t^7, \qquad 2^{\sqrt{\log n}} = 2^{\sqrt{t}}.$$

Θα δείξουμε ότι $t^7 = O(2^{\sqrt{t}})$.

Αρκεί να ισχύει τελικά: $2^{\sqrt{t}} \geq t^7$. Λογαριθμίζοντας (βάση 2):

$$\sqrt{t} \geq 7 \log t.$$

Η $\sqrt{t}$ υπερβαίνει τελικά το $\log t$, άρα υπάρχει t_0 ώστε $\sqrt{t} \geq 7 \log t$ για κάθε $t \geq t_0$. Συνεπώς

$$(\log n)^7 \preceq 2^{\sqrt{\log n}}.$$

Λύση Άσκησης 3 (3/6): Από $2^{\sqrt{\log n}}$ στο $\sqrt{n}$ και μετά στο $n^{2/3}$

Θέτουμε πάλι $t = \log n$. Τότε

$$2^{\sqrt{\log n}} = 2^{\sqrt{t}}, \qquad \sqrt{n} = n^{1/2} = 2^{t/2}.$$

Για t αρκετά μεγάλο ισχύει $\sqrt{t} \leq t/2$, άρα

$$2^{\sqrt{t}} \leq 2^{t/2} \implies 2^{\sqrt{\log n}} \leq \sqrt{n},$$

δηλαδή

$$2^{\sqrt{\log n}} \preceq \sqrt{n}.$$

Επίσης

$$\sqrt{n} = n^{1/2} \preceq n^{2/3}.$$

Λύση Άσκησης 3 (4/6): Από $n^{2/3}$ μέχρι $n^{1.1}$

Για $n \geq 2$ ισχύει $\log n \geq 1$, άρα

$$n^{2/3} \leq n \leq n \log n \quad \Longrightarrow \quad n^{2/3} \preceq n \log n.$$

Προφανώς:

$$n \log n \preceq n(\log n)^2.$$

Και επειδή $(\log n)^2 = O(n^{0.1})$ (πάρε $\varepsilon = 0.1$ στο $(\log n)^c = O(n^\varepsilon)$),

$$n(\log n)^2 = O(n \cdot n^{0.1}) = O(n^{1.1}),$$

άρα

$$n(\log n)^2 \preceq n^{1.1}.$$

Λύση Άσκησης 3 (5/6): Από $n^{1.1}$ στο $2^{\sqrt{n}}$ και μετά στο 1.01^n

(i) $n^{1.1} \preceq 2^{\sqrt{n}}$**:** Θέτουμε $m = \sqrt{n}$, άρα $n = m^2$ και

$$\frac{n^{1.1}}{2^{\sqrt{n}}} = \frac{(m^2)^{1.1}}{2^m} = \frac{m^{2.2}}{2^m} \leq \frac{m^3}{2^m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0,$$

επειδή (λήμμα) $m^b/2^m \to 0$ για κάθε ακέραιο $b \geq 1$. Άρα $n^{1.1} = O(2^{\sqrt{n}})$.

(ii) $2^{\sqrt{n}} \preceq 1.01^n$**:** Για κάθε $\alpha > 0$ και n αρκετά μεγάλο ισχύει $\sqrt{n} \leq \alpha n$ (π.χ. για $n \geq 1/\alpha^2$). Διαλέγουμε $\alpha > 0$ ώστε $2^\alpha < 1.01$. Τότε, για n αρκετά μεγάλο:

$$2^{\sqrt{n}} \leq 2^{\alpha n} = (2^\alpha)^n \leq (1.01)^n,$$

άρα $2^{\sqrt{n}} = O(1.01^n)$.

Λύση Άσκησης 3 (6/6): Από 1.01^n μέχρι $n!$ και τελική αλυσίδα

Εφόσον $1.01 < 2$,

$$1.01^n \preceq 2^n.$$

Και από το λήμμα (ή πόρισμα) $\alpha^n = O(n!)$ για κάθε σταθερό $\alpha > 1$, παίρνουμε ειδικά:

$$2^n \preceq n!.$$

Τελική σειρά:

$$(\log n)^7 \preceq 2^{\sqrt{\log n}} \preceq \sqrt{n} \preceq n^{2/3} \preceq n \log n \preceq n(\log n)^2 \preceq n^{1.1} \preceq 2^{\sqrt{n}} \preceq 1.01^n \preceq 2^n \preceq n!.$$

Άσκηση 4

Δείξτε για κάθε ζεύγος αν ισχύει $f(n) = O(g(n))$, $f(n) = \Omega(g(n))$, και/ή $f(n) = \Theta(g(n))$.

a. $f(n) = n \log(n+1), \quad g(n) = n \log n$
b. $f(n) = 2^{\log n + \sqrt{\log n}}, \quad g(n) = n \cdot 2^{\sqrt{\log n}}$
c. $f(n) = (n + \log n)!, \quad g(n) = n!\, n^{\log n}$

(Θεωρούμε $\log = \log_2$.)

Λύση Άσκησης 4 (1/5): (a)

Συγκρίνουμε $f(n) = n\log(n+1)$ με $g(n) = n\log n$.
Για $n \geq 2$ ισχύει $n \leq n+1 \leq 2n$, άρα

$$\log n \leq \log(n+1) \leq \log(2n) = 1 + \log n.$$

Πολλαπλασιάζοντας με n:

$$n\log n \leq n\log(n+1) \leq n(\log n + 1) = n\log n + n.$$

Επειδή για $n \geq 2$ έχουμε $\log n \geq 1$ άρα $n \leq n\log n$, προκύπτει

$$n\log n \leq n\log(n+1) \leq 2\,n\log n \quad (n \geq 2).$$

Άρα

$$n\log(n+1) = \Theta(n\log n).$$

Λύση Άσκησης 4 (2/5): (b)

Υπολογίζουμε ακριβώς:

$$2^{\log n+\sqrt{\log n}} = 2^{\log n} \cdot 2^{\sqrt{\log n}} = n \cdot 2^{\sqrt{\log n}}.$$

Άρα $f(n) = g(n)$ για όλα τα n, και συνεπώς

$$f(n) = \Theta(g(n)) \quad (\text{άρα και } O, \Omega).$$

Λύση Άσκησης 4 (3/5): (c) — Μετασχηματισμός λόγου

Θέλουμε να συγκρίνουμε

$$f(n) = (n + \log n)!, \qquad g(n) = n!\, n^{\log n}.$$

Μελετάμε τον λόγο:

$$R(n) := \frac{(n + \log n)!}{n!\, n^{\log n}}.$$

Γράφουμε:

$$\frac{(n + \log n)!}{n!} = \prod_{i=1}^{\log n} (n + i),$$

άρα

$$R(n) = \prod_{i=1}^{\log n} \frac{n + i}{n} = \prod_{i=1}^{\log n} \left(1 + \frac{i}{n}\right).$$

Θα δείξουμε ότι $1 \leq R(n) \leq 2$ για n αρκετά μεγάλο, οπότε $f(n) = \Theta(g(n))$.

Λύση Άσκησης 4 (4/5): (c) — Κάτω φράγμα (Ω)

Για κάθε $i \geq 1$ ισχύει $\left(1 + \frac{i}{n}\right) \geq 1$. Άρα

$$R(n) = \prod_{i=1}^{\log n} \left(1 + \frac{i}{n}\right) \geq 1.$$

Ισοδύναμα:

$$(n + \log n)! \geq n!\, n^{\log n}.$$

Άρα

$$(n + \log n)! = \Omega\left(n!\, n^{\log n}\right).$$

Για κάθε $i \leq \log n$ ισχύει

$$1 + \frac{i}{n} \leq 1 + \frac{\log n}{n},$$

άρα

$$R(n) \leq \left(1 + \frac{\log n}{n}\right)^{\log n}.$$

Θέτουμε $x = \frac{\log n}{n} > 0$. Ισχύει η ανισότητα $1 + x \leq e^x$, οπότε

$$\left(1 + \frac{\log n}{n}\right)^{\log n} \leq \left(e^{\frac{\log n}{n}}\right)^{\log n} = e^{\frac{(\log n)^2}{n}}.$$

Επειδή $\frac{(\log n)^2}{n} \to 0$, υπάρχει n_0 ώστε για $n \geq n_0$ να ισχύει $e^{\frac{(\log n)^2}{n}} \leq 2$. Άρα για $n \geq n_0$:

$$R(n) \leq 2 \quad \Rightarrow \quad (n + \log n)! \leq 2\, n!\, n^{\log n}.$$

Δηλαδή

$$(n + \log n)! = O\left(n!\, n^{\log n}\right).$$

Μαζί με το κάτω φράγμα, καταλήγουμε:

$$(n + \log n)! = \Theta\left(n!\, n^{\log n}\right).$$

Άσκηση 5

Σωστό/Λάθος (με απόδειξη ή αντιπαράδειγμα):

a. Αν $f(n) = O(g(n))$ τότε $f(n) + h(n) = O(g(n) + h(n))$ για κάθε θετική h.
b. Αν $f(n) = \Theta(g(n))$ τότε $f(n)^2 = \Theta(g(n)^2)$.
c. Αν $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ και $f(n) = \Theta(g(n))$ και $k > 0$ σταθερά (πραγματικός), τότε
$$(f(n))^k = \Theta((g(n))^k).$$

Λύση Άσκησης 5

a. Σωστό. Αν $f(n) \le cg(n)$ για $n \ge n_0$, τότε

$$f(n) + h(n) \le cg(n) + h(n) \le \max\{c, 1\}\,(g(n) + h(n)).$$

b. Σωστό (για θετικές). Από $c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$ για $n \ge n_0$, παίρνουμε

$$c_1^2 g(n)^2 \le f(n)^2 \le c_2^2 g(n)^2.$$

Λύση (1/2)

Η πρόταση είναι αληθής.
Από $f(n) = \Theta(g(n))$ υπάρχουν $c_1, c_2 > 0$ και n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$:

$$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n).$$

Επειδή $f(n), g(n) > 0$ και $k > 0$, η συνάρτηση $x \mapsto x^k$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \infty)$. Άρα, υψώνοντας κατά δύναμη k:

$$(c_1 g(n))^k \leq (f(n))^k \leq (c_2 g(n))^k \qquad (n \geq n_0).$$

Αναπτύσσοντας:

$$c_1^k (g(n))^k \leq (f(n))^k \leq c_2^k (g(n))^k \qquad (n \geq n_0).$$

Θέτοντας $C_1 := c_1^k > 0$ και $C_2 := c_2^k > 0$, παίρνουμε ακριβώς τον ορισμό:

$$(f(n))^k = \Theta((g(n))^k).$$

Άσκηση 6

Για κάθε πρόταση βρείτε ποιο από O, Ω, Θ μπορούν να μπουν στη θέση του $\square$:

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \square(\log n)$
b. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \log k = \square(n^2 \log n)$
c. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^k = \square(6^n)$
d. $n^{\log n} = \square\left(2^{(\log n)^2}\right)$

Λύση Άσκησης 6

- a. Γνωστό: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \Theta(\log n)$, άρα ισχύουν και τα 3: O, Ω, Θ.
- b. Άνω φράγμα: $\log k \leq \log n$, άρα

$$\sum_{k=1}^{n} k \log k \leq (\log n) \sum_{k=1}^{n} k = (\log n) \cdot \frac{n(n+1)}{2} = O(n^2 \log n).$$

Κάτω φράγμα: για $k \in [\lceil n/2 \rceil, n]$, $\log k \geq \log(n/2) = \log n - 1$, άρα

$$\sum_{k=1}^{n} k \log k \geq (\log n - 1) \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n} k = \Omega(n^2 \log n).$$

Δεδομένου ότι:

$$\sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n} k \;\geq\; \left(n - \lceil n/2 \rceil + 1\right) \cdot \frac{n}{2} \;\geq\; \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4}.$$

Άρα $\Theta(n^2 \log n)$ (και συνεπώς ισχύουν και O, Ω).

Λύση Άσκησης 6

- Δυωνυμικό:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^k = (1+5)^n = 6^n.$$

  Άρα ισχύουν και τα 3.

- Με $\log = \log_2$:

$$n^{\log n} = (2^{\log n})^{\log n} = 2^{(\log n)^2}.$$

  Άρα ισχύουν και τα 3.

Άσκηση 7

Αλγόριθμος αναζήτησης σε ταξινομημένο πίνακα $A[1..n]$:

- Χωρίζουμε σε blocks μεγέθους $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$.
- Σαρώνουμε το τελευταίο στοιχείο κάθε block για να βρούμε το block όπου βρίσκεται το αναζητούμενο στοιχείο.
- Σαρώνουμε γραμμικά μέσα στο block.

a. Υπολογίστε συγκρίσεις στη χειρότερη περίπτωση.
b. Δώστε $\Theta(\cdot)$.
c. Συγκρίνετε με δυαδική αναζήτηση.

Λύση Άσκησης 7

Θέτουμε $b = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

- **a** Αριθμός blocks: $\lceil \frac{n}{b} \rceil \leq \lceil \sqrt{n} \rceil$. Στη χειρότερη περίπτωση ελέγχουμε όλα τα blocks: $\leq \lceil \sqrt{n} \rceil$ συγκρίσεις, και μετά μέχρι b μέσα στο block. Άρα

$$T(n) \leq \lceil \sqrt{n} \rceil + \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq 2\sqrt{n} + 1.$$

- **b** Άνω φράγμα: $T(n) = O(\sqrt{n})$. Κάτω φράγμα: υπάρχει περίπτωση που χρειάζεται έλεγχο $\Theta(\sqrt{n})$ blocks, άρα $T(n) = \Omega(\sqrt{n})$. Δηλαδή υπάρχει είσοδος, όπου δεν μπορεί ο αριθμός των συγκρίσεων να είναι καλύτερος από τη χειρότερη περίπτωση (π.χ. $n > maxA[i]$). Συνεπώς $T(n) = \Theta(\sqrt{n})$.
- **c** Δυαδική αναζήτηση: $\Theta(\log n)$, και για n μεγάλο ισχύει $\log n \leq \sqrt{n}$, άρα ασυμπτωτικά η δυαδική είναι καλύτερη.

Άσκηση 8

Ορίστε $f(n) = \lfloor \log n \rfloor$ και $g(n) = \log n$.

a. Αποδείξτε ότι $f(n) = \Theta(g(n))$.
b. Είναι αληθές ότι $2^{f(n)} = \Theta(2^{g(n)})$; Αιτιολογήστε.
c. Είναι αληθές ότι $n^{f(n)} = \Theta(n^{g(n)})$; Αιτιολογήστε.

Λύση Άσκησης 8

- (a) Ισχύει $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Με $x = \log n$:

$$f(n) \leq g(n) < f(n) + 1.$$

Για $n \geq 2$ έχουμε $g(n) \geq 1$, άρα $g(n) < f(n) + 1 \leq f(n) + g(n) \leq 2g(n)$. Και $f(n) \leq g(n)$. Άρα $f(n) = \Theta(g(n))$.

- (b) Έχουμε:

$$2^{f(n)} \leq 2^{g(n)} < 2^{f(n)+1} = 2 \cdot 2^{f(n)}. \text{ Άρα } 2^{f(n)} = \Theta(2^{g(n)})$$

Λύση Άσκησης 8

b

$$n^{f(n)} \leq n^{g(n)} < n^{f(n)+1} = n \cdot n^{f(n)}.$$

Άρα πάντα $n^{f(n)} = O(n^{g(n)})$. Όμως δεν ισχύει Ω: πάρε $n = 2^m - 1$. Τότε $g(n) = \log(2^m - 1)$, που είναι είναι λίγο μικρότερο από m, όταν το n είναι αρκετά μεγάλο ενώ το $f(n) = m - 1$, άρα $0 < g(n) - f(n) < 1$ κοντά στο 1 και $\frac{n^{g(n)}}{n^{f(n)}} = n^{g(n)-f(n)}$ μπορεί να γίνει όσο μεγάλο θέλουμε (καθώς το n μεγαλώνει). Άρα $n^{f(n)} \neq \Theta(n^{g(n)})$.
Αναλυτικότερα: Για $m \geq 2$ θέτουμε $n = 2^m - 1$. Τότε
$f(n) = \lfloor \log n \rfloor = m - 1$ και

$$2^m - 1 \ \geq \ 3 \cdot 2^{m-2} \quad (\text{αφού } 2^m - 1 = 4 \cdot 2^{m-2} - 1 \geq 3 \cdot 2^{m-2}).$$

Λογαριθμίζοντας (βάση 2):

$$g(n) = \log(2^m - 1) \ \geq \ \log\left(3 \cdot 2^{m-2}\right) = (m-2) + \log 3.$$

Άρα

$$g(n) - f(n) \ \geq \ \left((m-2) + \log 3\right) - (m-1) = \log 3 - 1.$$

Άσκηση 9

Δείξτε ότι:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\log k\right)^2 = \Theta\left(n(\log n)^2\right).$$

(Θεωρούμε $\log = \log_2$.)

Λύση Άσκησης 9 (1/2)

Θέτουμε

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} (\log k)^2.$$

Άνω φράγμα: Για κάθε $k \leq n$ ισχύει $\log k \leq \log n$, άρα

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} (\log k)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} (\log n)^2 = n(\log n)^2.$$

Άρα $S(n) = O\big(n(\log n)^2\big)$.

Λύση Άσκησης 9 (2/2)

Κάτω φράγμα: Για $k \in \{\lceil n/2 \rceil, \dots, n\}$ έχουμε $k \geq n/2$, άρα

$$\log k \geq \log(n/2) = \log n - 1.$$

Επομένως

$$S(n) \geq \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n} (\log k)^2 \geq \Big(n - \lceil n/2 \rceil + 1\Big) (\log n - 1)^2.$$

Για $n \geq 2$ ισχύει $n - \lceil n/2 \rceil + 1 \geq n/2$. Επίσης, για $n \geq 4$ έχουμε $\log n \geq 2$ και άρα

$$\log n \geq 2 \iff \frac{1}{2}\log n \geq 1 \iff \log n - \frac{1}{2}\log n \geq 1 \iff \log n - 1 \geq \frac{1}{2}\log n.$$

$$\log n - 1 \geq \frac{1}{2}\log n \quad \Rightarrow \quad (\log n - 1)^2 \geq \frac{1}{4}(\log n)^2.$$

Άρα για $n \geq 4$: $S(n) \geq \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{4}(\log n)^2 = \frac{n(\log n)^2}{8}$, δηλαδή $S(n) = \Omega\big(n(\log n)^2\big)$.
Συνεπώς $S(n) = \Theta\big(n(\log n)^2\big)$.

Γιατί $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \Theta(\log n)$

Θέτουμε

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad (n \geq 2).$$

Θα δείξουμε ότι $H_n = \Theta(\log n)$.
Ορίζουμε

$$m = \lfloor \log n \rfloor.$$

Τότε από την ιδιότητα του πατώματος:

$$m \leq \log n < m + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2^m \leq n < 2^{m+1}.$$

Άρα το 2^m είναι η *μεγαλύτερη δύναμη του 2* που δεν ξεπερνά το n.

Ομαδοποίηση σε blocks (δυνάμεις του 2)

Χωρίζουμε το άθροισμα σε blocks:

$$H_n = 1 + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^m+1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Τα πλήρη blocks έχουν άκρα $2^{j-1}+1, \ldots, 2^j$ (μέχρι το 2^m), και μένει ένα (πιθανώς κενό) υπόλοιπο από $2^m + 1$ μέχρι n.

$$\text{Δηλαδή: } H_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

Κάτω φράγμα: κάθε πλήρες block $\geq \frac{1}{2}$

Για $j = 1, \ldots, m$ και κάθε $k \in \{2^{j-1} + 1, \ldots, 2^j\}$ ισχύει $k \leq 2^j$, άρα

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2^j}.$$

Το block έχει ακριβώς $2^j - (2^{j-1} + 1) + 1 = 2^{j-1}$ όρους, οπότε

$$\sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{k} \geq 2^{j-1} \cdot \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2}.$$

Κάτω φράγμα: $H_n = \Omega(\log n)$

Από τα m πλήρη blocks:

$$H_n \geq 1 + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} = 1 + \frac{m}{2}.$$

Επειδή $m = \lfloor \log n \rfloor \geq \log n - 1$, παίρνουμε

$$H_n \geq 1 + \frac{\log n - 1}{2} = \frac{1}{2} \log n + \frac{1}{2}.$$

Άρα $H_n = \Omega(\log n)$ (π.χ. για $n \geq 2$).

Άνω φράγμα: κάθε πλήρες block ≤ 1

Για $j = 1, \ldots, m$ και κάθε $k \in \{2^{j-1} + 1, \ldots, 2^j\}$ ισχύει $k > 2^{j-1}$, άρα

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{2^{j-1}}.$$

Το block έχει 2^{j-1} όρους, οπότε

$$\sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{k} \leq 2^{j-1} \cdot \frac{1}{2^{j-1}} = 1.$$

Άνω φράγμα: το υπόλοιπο (tail) είναι < 1

Για το υπόλοιπο άθροισμα ισχύει για κάθε $k \geq 2^m + 1$ ότι

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{2^m + 1}.$$

Το πλήθος των όρων είναι $n - 2^m$. Επειδή $n < 2^{m+1}$, έχουμε $n - 2^m < 2^m$. Άρα

$$\sum_{k=2^m+1}^{n} \frac{1}{k} \leq (n - 2^m) \cdot \frac{1}{2^m + 1} < 2^m \cdot \frac{1}{2^m + 1} < 1.$$

Άνω φράγμα: $H_n = O(\log n)$

Συνδυάζοντας:

$$H_n \leq 1 + \sum_{j=1}^{m} 1 + 1 = m + 2.$$

Επειδή $m = \lfloor \log n \rfloor \leq \log n$, έχουμε

$$H_n \leq \log n + 2.$$

Για $n \geq 4$ ισχύει $\log n \geq 2$, άρα $2 \leq \log n$ και

$$\log n + 2 \leq 2 \log n.$$

Συνεπώς, για $n \geq 4$:

$$H_n \leq 2 \log n,$$

δηλαδή $H_n = O(\log n)$ (μάρτυρες $c = 2$, $n_0 = 4$).

Συμπέρασμα: $\Theta(\log n)$

Δείξαμε:

$$H_n = \Omega(\log n) \quad \text{και} \quad H_n = O(\log n).$$

Άρα

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \Theta(\log n).$$